

ОТЗЫВ

официального оппонента Решетихина Николая Юрьевича
на диссертацию Слепцова Алексея Васильевича "Симметрии квантовых
инвариантов узлов и квантовых б_j-символов", представленную на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук по специальности
01.04.02 – «теоретическая физика».

Представленная А.В.Слепцовым диссертационная работа посвящена исследованию корреляционных функций теории Черна-Саймонса и разработке методов теории групп для их точного вычисления. Данные корреляционные функции представляют из себя квантовые инварианты узлов и играют важную роль в теории инвариантов. Для квантовых инвариантов узлов существует несколько эквивалентных описаний на языке различных моделей таких, как конформная теория поля, интеграл Концевича, теория квантовых групп и теория топологических струн. Таким образом, квантовые инварианты узлов являются точкой пересечения нескольких направлений исследований, что позволяет находить новые дуальности и соотношения между различными теориями, а также применять и создавать новые методы исследования.

Теория Черна-Саймонса является очень важным примером неабелевой квантовой теорией поля, поскольку на ее примере можно увидеть, как методы теории групп позволяют точно вычислять ее корреляционные функции. В то время как пертурбативный подход к теории Черна-Саймонса содержит совершенно стандартные методы и величины характерные для любой подобной теории Янга-Миллса, то непертурбативный подход описывается с помощью теории квантовых групп, которая содержит R-матрицы и квантовые б_j-символы. R-матрицы отвечают за интегрируемость

соответствующей динамической системы, а b_j -символы отвечают за смену базиса s -канала на базис t -канала. Их применение в задачах спектроскопии в квантовой механике, ядерной физике и физике элементарных частиц широко известно. Квантовые b_j -символы последнее время находят большое применение в конформной теории поля, моделях 3-мерной квантовой гравитации, квантовых вычислениях и других теориях. Таким образом, актуальность данной работы и ее важность для развития теоретической и математической физики несомненна.

Диссертация включает в себя введение, пять глав и заключение, сопровождаемые одним приложением. Во введении автор обосновывает актуальность диссертационной работы и делает обзор современного состояния исследования. Далее автор кратко излагает основные положения квантовой теории поля Черна-Саймонса, теории узлов и квантовых b_j -символов. Завершается введение определениями целей и задач диссертационной работы, описанием используемых методов исследования, обоснованием научной новизны и значимости полученных результатов.

В первой главе вводятся основные положения R -матричного формализма Решетихина-Тураева для вычисления квантовых инвариантов узлов. Формулируется гипотеза о решениях уравнения Янга-Бакстера, которая играет важную роль на протяжении всей диссертации. В этой главе автор вычисляет все квантовые b_j -символы с тремя произвольными симметрическими входящими представлениями для квантовой алгебры $sl(N)$. Это позволяет ему вычислить квантовый инвариант произвольного узла или зацепления, полученного замыканием трехнитевой косы, раскрашенной произвольными симметрическими представлениями. Далее представлена новая симметрия квантовых инвариантов узлов, которая связывает пару инвариантов, раскрашенных разными представлениями при определенных значениях N . Обсуждается, как возникает эта симметрия из

теории представлений супералгебр, а также какие ограничения она накладывает на общую теоретико-групповую структуру пертурбативного разложения в теории Черна-Саймонса. Показан вывод симметрии из гипотезы о собственных значениях.

Во второй главе представлено вычисление квантовых инвариантов крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями. Вычисление проведено в формализме конформной теории поля Весса-Зумино-Виттена (ВЗВ). Важное наблюдение автора, благодаря которому удалось получить результат, состоит в том, что процедура топологической склейки крендельных узлов из четырехнитевой косы рациональных узлов переносится на функциональный интеграл теории ВЗВ. Следовательно, для вычисления крендельных узлов требуются те же данные, что и для вычисления рациональных узлов: собственные значения сплетающего оператора и особый тип квантовых \mathfrak{b}_j -символов, названный автором эксклюзивным. Найденные автором явные формулы для таких \mathfrak{b}_j -символов в симметрическом представлении позволяют вычислять квантовые инварианты произвольных крендельных узлов, раскрашенных симметрическими представлениями. С помощью полученных инвариантов дана классификация крендельных узлов в рамках стандартной классификационной таблицы Рольфсена.

В третьей главе автор детально исследует влияние полученных симметрий на теоретико-групповые структуры раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в специальном пределе $A=1$. Этот предел играет важную роль в теории полиномиальных инвариантов узлов, поскольку позволяет получить знаменитый полиномом Александера. Автор устанавливается соответствие между дисперсионными соотношениями односолитонной тау-

функции иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП) и групповыми факторами цветного полинома Александра. Используя данное соответствие, представлено достаточно простое комбинаторное описание групповых факторов в терминах диаграмм Юнга.

В четвертой главе автор приводит многочисленные примеры вычислений спектра БПС состояний в рамках гипотезы о топологической струнной дуальности, которая связывает теорию Черна-Саймонса с топологической теорией струн на разрешенном конифолде – некомпактном многообразии Калаби-Яу. Вычисления проводятся как для группы $SU(N)$, так и для группы $SO(N)$. Полученные результаты подтверждают все имеющиеся гипотезы о целочисленности коэффициентов разложения по родам статсуммы Оогури-Вафы, которая является производящей функцией для всех раскрашенных квантовых инвариантов фиксированного узла или зацепления. Кроме того, на основе полученных результатов автор формулирует интересную гипотезу о гауссовском распределении этих коэффициентов разложения. Обсуждаются различные свидетельства в поддержку этого наблюдения, которое, вероятно, подразумевает, что БПС состояния, которые определяют амплитуды ориентированной топологической струны, на самом деле могут быть составными частями, сделанными из еще более элементарных объектов.

Пятая глава довольно обширная и состоит из одиннадцати разделов. В ней автором представлен метод, позволяющий находить новые симметрии квантовых b_j -символов. Этот оригинальный метод, разработанный автором, проистекает из конкретной схемы доказательства гипотезы о собственных значениях для квантовой алгебры $sl(2)$. Само доказательство разобрано в деталях, что позволяет хорошо понять идею метода построения новых симметрий, основанного на эквивалентности гипотезы о собственных

значениях и симметриях b_j -символов. Автор детально показывает, как работает метод для разных классов b_j -символов. Важно подчеркнуть, что метод позволяет находить только матричные симметрии, то есть это симметрии между целыми матрицами b_j -символов, а не между отдельными матричными элементами. С одной стороны, это означает, что должны быть еще неизвестные симметрии между отдельными матричными элементами, с другой стороны, с точки зрения вычисления квантовых инвариантов узлов в первую очередь интересны именно матричные симметрии. Это позволяет автору вычислять значения квантовых инвариантов для ранее недоступных представлений. Далее для каждой найденной симметрии автор находит и обсуждает различные интересные свойства b_j -символов, например, анализирует связь с q -гипергеометрическими функциями и ортогональными многочленами или изучает асимптотику Понцано-Редже для больших представлений.

В заключении приведены основные результаты диссертации, а в приложении изложены необходимые элементы теории узлов.

К недостаткам работы можно отнести то, что недостаточно места уделено квазиклассическим асимптотикам 3_j и b_j , но этому есть естественное объяснение: это отдельная важная тема, а в диссертации уже достаточно первоклассных результатов. Это замечание нужно скорее рассматривать как одно из возможных направлений для дальнейших исследований.

Представленная диссертация является законченным научным исследованием, а ее автор проявил себя как вполне сложившийся исследователь. Все основные результаты диссертации своевременно опубликованы в зарубежных и отечественных журналах и докладывались на

международных научных конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Резюмируя, можно с уверенностью сказать, что диссертация "Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых б_j-символов" удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении учёных степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842, а ее автор Слепцов Алексей Васильевич заслуживает присуждения искомой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – «теоретическая физика».

Доктор физико-математических наук
главный научный сотрудник
кафедры квантовой механики физического факультета

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет"
198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Ульяновская 1, НИИФ СПбГУ,
теоротдел, тел. +7 812 4284552, e-mail: reshetik@math.berkeley.edu

06 июня 2022 года

Н.Ю.Решетихин

Подпись д.ф.м.н., г.н.с. Н.Ю.Решетихина удостоверяю:

И.о.начальника

отдела кадров №3

06.06.2022.г

И.И.Константинова

Ученый секретарь
физического факультета СПбГУ

А.А.Лезова

Текст документа размещен
в открытом доступе
на сайте СПбГУ по адресу
<http://spbu.ru/science/expert.htm>

Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей

Решетихин Николай Юрьевич

доктор физико-математических наук, специальность 01.01.03-математическая физика

Список основных публикаций по теме диссертации А.В.Слепцова:

1. Cattaneo A. S., Mnev P., Reshetikhin N. Perturbative quantum gauge theories on manifolds with boundary //Communications in Mathematical Physics. – 2018. – Т. 357. – №. 2. – С. 631-730
2. Reshetikhin N., Sridhar A. Limit shapes of the stochastic six vertex model //Communications in Mathematical Physics. – 2018. – Т. 363. – №. 3. – С. 741-765
3. Reshetikhin N., Sridhar A. Integrability of limit shapes of the six vertex model //Communications in Mathematical Physics. – 2017. – Т. 356. – №. 2. – С. 535-565
4. Cattaneo A. S., Mnev P., Reshetikhin N. A cellular topological field theory //Communications in Mathematical Physics. – 2020. – Т. 374. – №. 2. – С. 1229-1320
5. Stokman J. V., Reshetikhin N. N-point spherical functions and asymptotic boundary KZB equations //Inventiones mathematicae. – 2022. – С. 1-86
6. Postnova O., Reshetikhin N. On multiplicities of irreducibles in large tensor product of representations of simple Lie algebras //Letters in Mathematical Physics. – 2020. – Т. 110. – №. 1. – С. 147-178
7. Keating D., Reshetikhin N., Sridhar A. Integrability of limit shapes of the inhomogeneous six vertex model //Communications in Mathematical Physics. – 2022. – С. 1-27
8. Blanchet, C., Geer, N., Patureau-Mirand, B., Reshetikhin, N. Holonomy braidings, biquandles and quantum invariants of links with $\mathbb{SL}_2(\mathbb{C})$ flat connections //Selecta Mathematica. – 2020. – Т. 26. – №. 2. – С. 1-58
9. Arthamonov S., Reshetikhin N. Superintegrable systems on moduli spaces of flat connections //Communications in Mathematical Physics. – 2021. – Т. 386. – №. 3. – С. 1337-1381
10. Reshetikhin N. Degenerate integrability of quantum spin Calogero–Moser systems //Letters in Mathematical Physics. – 2017. – Т. 107. – №. 1. – С. 187-200
11. Cattaneo A. S., Mnev P., Reshetikhin N. Poisson sigma model and semiclassical quantization of integrable systems //Reviews in Mathematical Physics. – 2018. – Т. 30. – №. 06. – С. 1840004
12. Reshetikhin N., Stokman J., Vlaar B. Integral solutions to boundary quantum Knizhnik–Zamolodchikov equations //Advances in Mathematics. – 2018. – Т. 323. – С. 486-528.
13. Reshetikhin N. Semiclassical geometry of integrable systems //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2018. – Т. 51. – №. 16. – С. 164001.
14. Reshetikhin N., Schrader G. Superintegrability of Generalized Toda Models on Symmetric Spaces //International Mathematics Research Notices. – 2021. – Т. 2021. – №. 17. – С. 12993-13010
15. Kitanine N., Nepomechie R. I., Reshetikhin N. Quantum integrability and quantum groups: a special issue in memory of Petr P Kulish //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2018. – Т. 51. – №. 11. – С. 110201