

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук

на правах рукописи

Миронов Сергей Андреевич

**Особенности возмущений в конформной
космологии и массивной гравитации**

специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация

*на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор, физ.-мат. наук,
академик **Рубаков В.А.**

Москва 2014

Содержание

1	Введение	2
2	Модель с конформным скатыванием	13
2.1	Линейное приближение	13
2.1.1	Возмущения фазы	13
2.1.2	Возмущения модуля	15
2.2	Влияние инфракрасных радиальных мод на возмущения фазы: первый порядок по h	17
2.3	Статистическая анизотропия	19
2.3.1	Первый порядок по h	19
2.3.2	Порядок h^2 : вклад глубоко инфракрасных мод	20
2.4	Генезис с галилеоном и конформное скатывание	21
2.4.1	Явная проверка	21
2.4.2	Общее доказательство	24
2.5	Негауссовость	26
2.5.1	Гамильтониан	26
2.5.2	Спаривание и T -произведение	28
2.5.3	4-точечные функции. Координатное представление	29
2.5.4	4-точечные функции. Импульсное представление. Лидирующий вклад	31
2.5.5	Формы негауссовости	36
2.5.6	Четырехточка без приближений	41
3	Псевдоконформная модель	50
3.1	Классическое решение	50
3.2	Гравитационные возмущения	56
4	Массивная гравитация	64
4.1	Метод	64
4.1.1	Пропагатор $\Pi(k)$ в зависимости от параметров.	64

4.1.2	Собственные значения и их неоднозначность.	65
4.1.3	Спектр и фазовая диаграмма.	67
4.1.4	Духи, тахионы, сверхсветовые частицы и DVZ скачки . . .	67
4.2	Пример: Лоренц-нарушающая массивная гравитация	70
4.2.1	Общая структура, примеры	70
4.2.2	Явные формулы	72
4.3	Смешивание с другими полями, теория Калуцы-Клейна	80
4.3.1	Пример калуца-клейновского гравитона, $d + 1 = 5 \rightarrow d = 4$	80
5	Заключение	85
6	Приложение: структура собственных значений в зависимости от параметров	87
6.1	Деформации четырех пересечений	87
6.2	Последовательный анализ бифуркаций	88
6.3	Примеры	89
6.4	Структура расслоения	90

1 Введение

На нынешнем этапе развития теоретической космологии и наблюдательных методов можно многое с уверенностью сказать не только о современной Вселенной, но и о ее прошлом. Основой космологии служит модель горячего Большого Взрыва, которая описывает эволюцию Вселенной, по крайней мере начиная с температур порядка 1 МэВ, и во всем согласуется с экспериментом. Однако, если мы рассматриваем совсем ранние этапы развития Вселенной, в такой модели обнаруживаются внутренние теоретические проблемы, связанные с тонкой подстройкой начальных данных. Во-первых, однородная Вселенная, по крайней мере видимая ее часть, раньше состояла из 10^{89} причинно не связанных областей, так что априори мы должны были бы видеть на небе большое количество сильно непохожих областей. Во-вторых, современная Вселенная плоская, с хорошей

точностью, а это значит, что на старте (планковские времена) плоскостность была на уровне 10^{-60} . В-третьих, энтропия современной Вселенной превышает 10^{88} , но в теории горячего Большого Взрыва эволюция практически равновесная, что означает огромное начальное значение энтропии. Чтобы избежать этих проблем, надо предположить, что начальная стадия эволюции Вселенной сильно отличалась от того, что предполагается в теории горячего Большого Взрыва. Более того, и для нас это будет особенно важно, специфическая ранняя стадия необходима для генерации космологических возмущений.

Первичные скалярные возмущения во Вселенной являются практически гауссовыми и имеют почти плоский спектр мощности [1, 2, 3]. Первое предполагает, что эти возмущения являются усиленными вакуумными флуктуациями слабодействующего квантового поля. Плоскостность же спектра, по видимому, должна быть следствием какой-либо симметрии. Самый известный вариант – симметрия пространства де Ситтера, описывающего экспоненциальное расширение Вселенной. Это – приближенная симметрия инфляционной Вселенной [4, 5, 6, 7, 8], гарантирующая приближенную плоскостность скалярного спектра, получаемого благодаря инфляционному механизму [9, 10, 11, 12, 13]. Однако, инфляция – не единственный возможный вариант. Плоский спектр, к примеру, получается в модели скалярного поля в плоском пространстве с отрицательным экспоненциальным потенциалом [14, 15, 16] (также [17, 18]). Уравнения движения этого поля инвариантны при одновременном растяжении пространства-времени и сдвиге поля. Эта симметрия сохраняется при медленной эволюции Вселенной (экирозис [19, 20]), и из нее следует плоскостность скалярного спектра. Существуют и другие механизмы получения плоского спектра, например [21, 22, 23, 24, 25], причем иногда нет очевидной симметрии, гарантирующей плоскостность, и спектр получается плоским "случайно".

При поиске альтернативных симметрий, стоящих за плоским спектром, естественно обратиться к конформной инвариантности [26, 27]. В моделях, предложенных в [26, 27], предполагается, что до горячей стадии была эпоха, когда действие было конформно инвариантным. В обеих моделях главной компонен-

той является скалярное поле, эволюционирующее во Вселенной. В первой модели это комплексное скалярное поле со стандартным кинетическим членом и отрицательным потенциалом четвертой степени, а во второй – два действительных скалярных поля, одно из которых имеет необычный кинетический член с производными второго порядка. В обеих моделях после эпохи конформной эволюции предполагается отскок или разогрев, после которого наступает горячая стадия. В целом, концепция похожа на инфляционную, однако и динамика, и, главное, экспериментальные следствия этих моделей сильно отличаются от инфляционных. Столь же естественно, как и в инфляции, в моделях с конформной симметрией возмущения скалярного поля приобретают плоский спектр мощности, причем предполагается, что спектр не искажается на стадии разогрева, при переработке возмущений скалярного поля в адиабатические возмущения. Отличия моделей ранней Вселенной с конформной инвариантностью от инфляционных заключаются в следующем: во-первых, скалярные возмущения получают негауссовость необычной формы; во-вторых, как было показано в работе [28], они становятся анизотропными; в-третьих, в конформных моделях практически не генерируются гравитационные волны. Основной задачей данной диссертации является изучение особых свойств первичных возмущений в конформных моделях, которые позволяют отличить эти модели от инфляционных.

Что касается самих моделей с конформной симметрией, то, несмотря на существенное различие в мотивации и динамическом описании, модели работ [26] и [27] приводят к одному и тому же механизму генерации скалярных космологических возмущений. С этой точки зрения все сводится к модели с двумя скалярными полями ρ и Θ с лагранжианом

$$L = L_\rho + \frac{1}{2}\rho^2 (\partial_\mu \Theta)^2, \quad (1)$$

где L_ρ определяет динамику поля ρ . Требуется, чтобы при растяжениях поле ρ преобразовывалось следующим образом: $\rho(x) \rightarrow \lambda\rho(\lambda x)$; предполагается, что имеет место нетривиальный фон ρ_c . Поле Θ растягивается тривиально, $\Theta(x) \rightarrow \Theta(\lambda x)$; возмущения поля Θ являются предшественниками адиабати-

ческих мод. Нужно потребовать, чтобы на протяжении всего периода генерации возмущений Θ влияние гравитационных эффектов на динамику этих двух полей было незначительным (это достигается разными путями в [26] и [27]) и предположить пространственную однородность фона ρ_c . Тогда можно однозначно написать:

$$\rho_c(x_0) = -\frac{1}{x_0}, \quad x_0 < 0, \quad (2)$$

где $x_0 = \eta$ – конформное время в модели с конформным скатыванием [26], и $x_0 = t$ – физическое время в модели генезиса [27].

Далее мы подробно сравним две модели и покажем их сходство. Пока, для определенности, будем работать в сценарии [26]. В нем конформная инвариантность дополнена глобальной симметрией, в простейшем случае $U(1)$, и включает в себя конформно связанное скалярное поле

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{R}{6} \phi^* \phi - V(\phi) \right],$$

эволюционирующее достаточно долго в потенциале

$$V(\phi) = -h^2 |\phi|^4. \quad (3)$$

Модуль этого скалярного поля соответствует полю ρ , а фаза – полю Θ из формулы (1). Предполагается, что $h \ll 1$, то есть теория находится в режиме слабой связи. Кроме того, пространство-время предполагается однородным, изотропным и пространственно плоским,

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\mathbf{x}^2).$$

Тогда из-за конформной связи динамика поля $\chi(\eta, \mathbf{x}) = a\phi$ не зависит от поведения масштабного фактора и сводится к динамике поля в пространстве Минковского. Классическим решением является $\chi_c(\eta)$ – однородное поле, скатывающееся в потенциале четвертой степени. Его поведение на поздних временах полностью определяется конформной инвариантностью,

$$\chi_c(\eta) = \frac{1}{h(\eta_* - \eta)}, \quad (4)$$

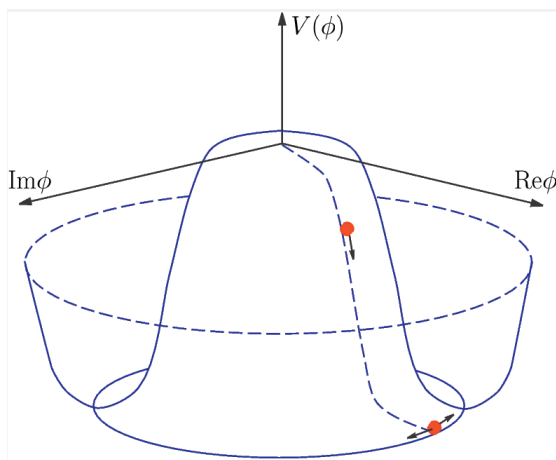


Рис. 1: Скалярный потенциал. Точки показывают эволюцию скалярного поля. Стрелки в конечной точке на дне потенциала показывают, что там имеются возмущения фазы.

где η_* – произвольный действительный параметр, и без потери общности мы рассматриваем действительное решение. Как будет показано, на ранних временах линейные возмущения над этим решением осциллируют как моды свободного скалярного поля в пространстве Минковского, в то время как на поздних временах возмущения фазы

$$\theta = \sqrt{2} \text{Arg } \phi$$

перестают зависеть от времени. В линейном порядке спектр возмущений фазы плоский,

$$\sqrt{\mathcal{P}_{\delta\theta}} = \frac{h}{2\pi}. \quad (5)$$

В [26] обсуждалось, что это свойство является следствием конформной и глобальной симметрий.

Далее, в этом сценарии предполагается, что скалярный потенциал $V(\phi)$ на самом деле имеет минимум при больших значениях поля, и что модуль $|\phi|$ в итоге в нем заканчивает эволюцию, см. рис. 1. Что касается дальнейшей эволюции, то тут возможны варианты. Наиболее простой случай заключается в том, что

возмущения $\delta\theta$ находятся за космологическим горизонтом к моменту окончания конформной стадии. Мы будем работать в таком предположении. Возмущения фазы остаются замороженными,¹ а их – спектр плоским. В гораздо более позднюю эпоху эти возмущения фазы переводятся в адиабатические скалярные возмущения с помощью, к примеру, механизма работ [32, 33, 34, 35] (в этом случае θ будет псевдо намбу-голдстоуновским бозоном, и переработка возмущений происходит как в [36]) или механизма модулированного распада [37, 38, 39]. В любом случае, спектр мощности не искажается, так что получившиеся адиабатические возмущения имеют изначальный плоский спектр. Если конформная инвариантность не точная на этапе скатывания, то скалярный спектр мощности имеет слабый наклон, зависящий как от отклонения от конформности, так и от эволюции масштабного фактора при скатывании [40].

Своеобразной чертой модели является то, что во время скатывания поля модуль тоже получает возмущения. В поздние времена эти возмущения имеют красный спектр (ниже это будет показано),

$$\sqrt{\mathcal{P}_{|\phi|}(k)} \propto k^{-1}. \quad (6)$$

Следствием этого является наличие возмущений плотности энергии с красным спектром во время скатывания, перед тем, как возмущения модуля заморозятся в минимуме потенциала $V(\phi)$. Они не опасны, если энергия поля ϕ мала по сравнению с полной энергией на всех временах до заморозки модуля, то есть космологическая эволюция определяется другой материей в раннюю эпоху. Здесь мы будем использовать именно это предположение.

Другим важным следствием является то, что инфракрасные радиальные моды взаимодействуют с возмущениями фазы, что, в принципе, может оказать большое влияние на последние. Это один из важных вопросов, которые мы будем обсуждать ниже. Вслед за авторами работы [28] мы покажем, что

¹Для сжимающейся Вселенной это свойство загоризонтных мод сохраняется, если доминирующее вещество имеет жесткое уравнение состояния, $w > 1$. Это свойство, впрочем, в любом случае необходимо для жизнеспособности сценария с отскоком, см. обсуждения в работах [29, 30, 31].

в линейном порядке по h инфракрасные эффекты могут быть сведены к переопределению полей, так что сильного изменения результатов линейного анализа из-за инфракрасных мод не возникает.

Однако, совсем пренебречь длинноволновыми модами $\delta|\phi|$ нельзя. Моды, чьи длины волн сегодня превышают хаббловский размер H_0^{-1} , индуцируют статистическую анизотропию возмущений фазы $\delta\theta$ и, следовательно, получающихся адиабатических возмущений: спектр мощности адиабатических возмущений ζ имеет следующий вид [28],

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_0(k) \left(1 + c_1 \cdot h \cdot \frac{H_0}{k} \cdot \hat{k}_i \hat{k}_j w_{ij} - c_2 \cdot h^2 \cdot (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u})^2 \right). \quad (7)$$

Первый нетривиальный член, линейный по h , не содержит инфракрасных эффектов; w_{ij} – это симметричный бесследовый тензор общего вида, с единичной нормировкой, $w_{ij}w_{ij} = 1$, $\hat{\mathbf{k}}$ – единичный вектор, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$, а c_1 – константа порядка единицы, чье значение не может быть предсказано из-за космической неопределенности. В последнем члене \mathbf{u} – некоторый единичный вектор, независимый от w_{ij} , а положительный параметр c_2 логарифмически усилен инфракрасными поправками. Это первое место, где проявляются глубоко инфракрасные моды. Очевидно, этот эффект мал при малых h .

Статистическая анизотропия в последнем члене в (7) похожа на ту, которая обычно обсуждается в контексте инфляции [41, 42]. Именно она генерируется в некоторых конкретных моделях инфляции [43, 44, 45, 46]: эта анизотропия ненулевая при больших импульсах и имеет специальную тензорную структуру $(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u})^2$ с постоянным \mathbf{u} . С другой стороны, первый нетривиальный член в (7) имеет общую тензорную структуру и уменьшается с импульсом. Последнее свойство похоже на ситуацию с космологическими моделями, включающими анизотропное расширение перед инфляцией [47, 48]. В целом, статистическая анизотропия (7) может быть весьма существенной, поскольку сильных ограничений на h поставить нельзя, по крайней мере в рамках механизма модулированного распада для переработки возмущений фазы в адиабатические моды.

Поскольку скалярный потенциал нелинеен, возмущения фазы $\delta\theta$, а следова-

тельно и адиабатические моды, в рассматриваемом сценарии получают негауссовость помимо той, которая может генерироваться во время переработки возмущений. Из результата, сформулированного выше, понятно, что негауссовость не связана с инфракрасными эффектами в первом нетривиальном порядке по \hbar . Поэтому ее невозможно вычислить с помощью градиентных разложений эффективного фонового поля, а приходится проводить прямой расчет. Вычислению негауссовости и посвящена часть этой диссертации. Благодаря симметрии $\theta \rightarrow -\theta$ трехточечный коррелятор фазы равен нулю, так что нашей задачей будет расчет четырехточечного коррелятора. Для этого мы будем использовать технику Келдыша-Швингера, позволяющую находить одновременные корреляторы операторов в представлении взаимодействия. Она адекватна для вычисления средних от полей по *начальным* состояниям. Результаты оказываются громоздкими, однако они упрощаются в пределе малого переданного импульса. Явные выражения в этом случае даются формулой (86).

Кроме того, мы рассмотрим другой важный пример модели псевдоконформного класса. Мы изучим случай, когда нарушенная конформная симметрия приводит к такой же космологической эволюции, как в моделях экпирозиса. Экпирозис – это эпоха очень медленного сжатия, на которой доминирует давление, то есть реализуется уравнение состояния $-p \gg \rho > 0$ (кроме того, благодаря такому уравнению состояния Вселенная сама приходит в изотропное состояние). Модель, которую мы будем рассматривать, основана на скалярном поле с отрицательным потенциалом ϕ^4 . Этот пример рассматривался в работе [49], где авторами была рассмотрена экпиротическая стадия и получен плоский спектр скалярных возмущений; кроме того, был написан ответ для тензорного спектра, который генерируется на этой стадии. Здесь мы не будем касаться скалярных возмущений, имея в виду, что их свойства достаточно хорошо изучены.

Итак, мы рассмотрим комплексное скалярное поле ϕ с действием:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \right], \quad (8)$$

причем скатывание начинается из симметричной точки $\phi = 0$.

Сначала мы найдем решения классических уравнений, то есть опишем эволюцию Вселенной, но не только на ранних временах (экспериментальная стадия), но и на поздних, где, как мы увидим, Вселенная быстро коллапсирует. Мы предполагаем, что разогрев (мгновенный отскок) происходит после второй стадии. После этого мы изучим тензорные возмущения, которые генерируются в такой модели и на первой стадии, и на второй. Их спектр оказывается синим, при генерации на первой стадии он имеет вакуумный профиль ($P \sim \frac{1}{k}$), а на второй – еще синее на одну степень импульса (P не зависит от k). Наконец, мы попытаемся поставить ограничения на параметры модели из рассмотрения гравитационных волн. Эти ограничения оказываются очень слабыми, то есть гравитационные волны в такой модели практически не генерируются.

В последней главе мы отойдем от обсуждения ранней Вселенной, и изучим общие свойства возмущений в линеаризованной гравитации, в особенности нас будет интересовать инфракрасно модифицированная гравитация.

Теория массивной гравитации [50, 51, 52, 53] в последнее время привлекает новое внимание [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60], отчасти из-за того, что современная Вселенная расширяется с ускорением. Ускоренное расширение может интерпретироваться как проявление темной энергии, но может указывать и на инфракрасную модификацию гравитации. На самом деле, мотивировка исследований инфракрасно модифицированной гравитации не исчерпывается проблемой темной энергии, другие примеры можно найти в [56, 57, 58] и [61, 62, 63].

Однако, нарушение общей ковариантности, как известно, дает ряд нетривиальных эффектов, таких как появление духов или выход из режима слабой связи на малых расстояниях [64]. Более того, при попытке избавиться от духов, появляются скачки ван Дама-Велтмана-Захарова (DVZ) [65, 66, 67] и неустойчивости Бульвара-Дезера [68]. На самом деле, от этих проблем, по-видимому, можно избавиться, если пожертвовать Лоренц-инвариантностью [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 54, 55, 56, 57, 58], что позволяет расширить количество возможных массовых членов и обойти все сингулярности в пространстве параметров. Следует

отметить, что эти члены могут быть очень малы (например, порядка космологической постоянной) и не проявляться в эксперименте. Возможность избежать патологий была показана для линеаризованной гравитации, с квадратичным действием ²

$$\begin{aligned}
& K_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} = \\
& = \left\{ \frac{1}{2} \left(k_\mu k_\alpha \eta_{\beta\nu} + k_\mu k_\beta \eta_{\alpha\nu} + k_\nu k_\alpha \eta_{\beta\mu} + k_\nu k_\beta \eta_{\alpha\mu} \right) - \right. \\
& - \left. \left(k_\mu k_\nu \eta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \eta_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} k^2 \left(\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} \right) + k^2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right\} h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} + \\
& + m_0^2 h_{00}^2 + 2m_1^2 h_{0i}^2 - m_2^2 h_{ij}^2 + m_3^2 h_{ii}^2 - 2m_4^2 h_{00} h_{ii}, \tag{9}
\end{aligned}$$

где первая и вторая строки являются квадратичным приближением действия Гильберта-Эйнштейна, а третья строка содержит пять различных массовых членов,³ нарушающих и калибровочную (общееординатную), и лоренцеву $SO(d-1, 1)$ инвариантность, но сохраняющих пространственные вращения $SO(d-1)$. В наших обозначениях $h_{ii}^2 = \left(\sum_{i=1}^{d-1} h_{ii} \right)^2$, а $h_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{d-1} h_{ij}^2$. Теория имеет также симметрию относительно отражений P и T , так что все скалярные физические величины зависят от квадратов ω^2 и \vec{k}^2 частот и пространственных импульсов. Лоренц-инвариантность восстанавливается, если пять массовых параметров выражаются через две независимые величины, A и B :

$$m_0^2 = B - A, m_1^2 = m_2^2 = A, m_3^2 = m_4^2 = B$$

и $\mathcal{K}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ в (9) приводится к

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(k_\mu k_\alpha \eta_{\beta\nu} + k_\mu k_\beta \eta_{\alpha\nu} + k_\nu k_\alpha \eta_{\beta\mu} + k_\nu k_\beta \eta_{\alpha\mu} \right) - \left(k_\mu k_\nu \eta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \eta_{\mu\nu} \right) - \\
& - \frac{1}{2} (k^2 + A) \left(\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} \right) + (k^2 + B) \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \tag{10}
\end{aligned}$$

²Здесь мы будем использовать сигнатуру метрики $(-, +, \dots, +)$.

³Конечно, можно нарушить Лоренц-симметрию не только в массовом секторе, но и в кинетическом члене и добавить высшие пространственные производные, не получая новых духов. Подобное делается, к примеру, в [97, 98]. Методы, которые мы будем обсуждать, напрямую применимы к неминимальным деформациям, однако их рассмотрение приводит к расширению пространства параметров \mathcal{M} и усложнению структуры собственных значений.

Лоренц-инвариантная массивная гравитация без духов отвечает случаю $A = B$ (массивная гравитация Паули-Фирца [50, 51]). Этот случай, однако, тоже имеет вышеперечисленные проблемы, и потому не выглядит жизнеспособным [54]. Лоренц-нарушающие теории (9) могут не иметь духов при $m_0 = 0$ или $m_1 = 0$, и второй выбор сейчас является наиболее предпочтительным с точки зрения феноменологии [56, 57, 58].

Лоренц-нарушение ломает многие привычные свойства моделей квантовой теории поля и выглядит необычным во многих отношениях. Оно порождает многообразие нетривиальных квазичастиц, которые могут быть духами или сверхсветовыми частицами, или могут даже совсем не быть похожими на частицы. Мы проведем подробный анализ теории (9), используя новый метод, разработанный для изучения квадратичных теорий. Этот метод, основанный на исследовании структуры собственных значений, позволяет эффективно выявлять патологии различных типов; кроме того, он легко программируется на компьютере.

Диссертация организована следующим образом. В первой главе мы рассматриваем модель с конформным скатыванием. Сначала мы повторяем известные результаты: находим спектры линейных возмущений и статистическую анизотропию. Затем, в двух последних параграфах, сравниваем эту модель с моделью генезиса, и находим негауссовость в модели с конформным скатыванием. Во второй главе мы рассматриваем псевдоконформную модель: в первом параграфе мы изучаем классическую эволюцию Вселенной, а во втором – находим спектры тензорных мод, в том же параграфе мы ставим ограничения. В третьей главе мы кратко обсуждаем массивную гравитацию. В первом параграфе описываем общий подход к изучению квадратичных теорий, во втором – применяем его к случаю Лоренц-нарушающей массивной гравитации, в третьем – кратко обсуждаем теорию Калуцы-Клейна. В приложение вынесено обсуждение структуры собственных значений на пространстве параметров и приведены соответствующие графики.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [99, 100, 101, 102,

103] и доложены на научных семинарах в ИЯИ РАН и ИТЭФ, международной конференции "2th Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics" (SISSA Триест, 2009), международной школе "International School for Subnuclear Physics" (Erice, 2011), международной конференции "4th Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics" (SISSA Триест, 2011), конкурсе Хохлова (МГУ, 2012), на международных конференциях "5th Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics" (SISSA Триест, 2012) и "2nd Workshop on Aspects of Non-Associative and Non-Commutative Geometries in String Theory" (Стамбул, 2013).

2 Модель с конформным скатыванием

2.1 Линейное приближение

В эпоху конформного скатывания динамика скалярного поля определяется действием

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{R}{6} \phi^* \phi - V(\phi) \right],$$

где скалярный потенциал $V(\phi)$ отрицателен и имеет конформно инвариантный вид (3). В терминах поля $\chi = a\phi$ уравнение поля выглядит следующим образом:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \chi - 2h^2 |\chi|^2 \chi = 0. \quad (11)$$

Пространственно однородное классическое решение на больших временах достигает аттрактора (4).

2.1.1 Возмущения фазы

На линейном уровне возмущения фазы и модуля ϕ отщепляются друг от друга. Начнем с возмущений фазы, или, так как фоновое решение мы выбрали действительным (4), с возмущений мнимой части $\chi_2 \equiv \text{Im } \chi / \sqrt{2}$. Они удовлетворяют линеаризованному уравнению,

$$(\delta\chi_2)'' - \partial_i \partial_i \delta\chi_2 - 2h^2 \chi_c^2 \delta\chi_2 = 0, \quad (12)$$

где штрих обозначает производную по конформному времени η . Обозначим за \mathbf{k} конформный импульс возмущения. Важным предположением в нашем сценарии будет то, что конформное скатывание начинается достаточно рано, чтобы существовали времена, на которых

$$k(\eta_* - \eta) \gg 1 . \quad (13)$$

Поскольку существенные импульсы k малы (имеют порядок современного параметра Хаббла), это неравенство означает, что длительность скатывания с точки зрения конформного времени больше чем длительность, скажем, расширения после Большого Взрыва до сегодняшнего дня. Единственная возможность для этого – наличие какой-нибудь другой эпохи, предшествующей эпохе горячего Большого Взрыва, на которой бы была решена стандартная проблема горизонта; механизм, который мы обсуждаем, работает именно в эту эпоху. Отметим, что последнее свойство присуще почти всем, если не всем, механизмам генерации космологических возмущений

Уравнение (12) совпадает с уравнением для минимально связанного безмассового скалярного поля в пространстве де Ситтера. В дальнейшем нам понадобится его решение в следующем виде:

$$\delta\chi_2(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k}} \left(\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta)\hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c. \right) .$$

Здесь

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \cdot F(k, \eta_* - \eta) , \quad (14)$$

где

$$F(k, \xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}k\xi H_{3/2}^{(1)}(k\xi) , \quad (15)$$

а $H_{3/2}^{(1)}$ – функция Ханкеля. На ранних временах мода осциллирует,

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta} . \quad (16)$$

При этом $\hat{A}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger$ – операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям, $[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Как обычно, мы предполагаем, что поле $\delta\chi_2$ изначально находится в вакуумном состоянии.

На поздних временах, когда $k(\eta_* - \eta) \ll 1$, возмущения фазы зависят от времени следующим образом:

$$\delta\theta(\mathbf{x}) = \frac{\delta\chi_2(\mathbf{x}, \eta)}{\chi_c(\eta)} = ih \int \frac{d^3k}{4\pi^{3/2}k^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c. \quad (17)$$

Это выражение описывает гауссово случайное поле, чей спектр мощности дается выражением (5).

Возмущения фазы могут быть превращены в адиабатические моды по крайней мере двумя способами. Первый работает, если θ на самом деле является псевдо-нambu-голдстоуновским полем, которое высаживается на склон потенциала. Этот механизм генерирует негауссовость локального вида в адиабатических возмущениях. Для общих значений фазы, на которую высаживается поле, $\theta_c \sim \pi/2$, экспериментальное отсутствие негауссовости [1, 3] предполагает $\mathcal{P}_{\delta\theta} \lesssim 10^{-4}$ ([36]), а правильная скалярная амплитуда получается для

$$h \lesssim 10^{-2}. \quad (18)$$

Вообще говоря, такое ограничение не возникает при альтернативном механизме модулированного распада [37, 38, 39]. В этом случае, если соответствующий параметр массы или ширины зависит линейно от θ , получающийся параметр негауссовости весьма мал (подробности см. в [39, 104]), $f_{NL} \sim 1$, в полном согласии с существующим пределом [1, 3].

2.1.2 Возмущения модуля

Рассмотрим теперь радиальные возмущения, или, с учетом нашего соглашения, что классическое решение χ_c действительно, возмущения действительной части $\chi_1 \equiv \text{Re } \chi/\sqrt{2}$. В линейном порядке они удовлетворяют следующему уравнению на стадии конформного скатывания:

$$(\delta\chi_1)'' - \partial_i\partial_i \delta\chi_1 - 6h^2\chi_c^2\delta\chi_1 \equiv (\delta\chi_1)'' - \partial_i\partial_i \delta\chi_1 - \frac{6}{(\eta_* - \eta)^2}\delta\chi_1 = 0.$$

Решение этого уравнения, стремящееся к канонически нормированной моде при $k(\eta_* - \eta) \rightarrow \infty$, выглядит следующим образом:

$$\delta\chi_1 = -e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \cdot \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\eta_* - \eta}{2}} H_{5/2}^{(1)} [k(\eta_* - \eta)] \cdot \hat{B}_{\mathbf{k}} + h.c. ,$$

где $\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger$ – другой набор операторов рождения и уничтожения. На поздних временах, когда $k(\eta_* - \eta) \ll 1$, мы получаем

$$\delta\chi_1 = -e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \cdot \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{k^{5/2}(\eta_* - \eta)^2} \cdot \hat{B}_{\mathbf{k}} + h.c. .$$

Следовательно, возмущения модуля получают красный спектр мощности (6).

Зависимость $\delta\chi_1 \propto (\eta_* - \eta)^{-2}$ естественно представлять себе как локальный сдвиг параметра окончания скатывания η_* . Действительно, с учетом фонового решения (4), сумма $\chi_c + \delta\chi_1/\sqrt{2}$, то есть радиальное поле с учетом возмущений, является линеаризацией выражения

$$\chi_c[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta] = \frac{1}{h[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]} , \quad (19)$$

где

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_* + \delta\eta_*(\mathbf{x}) \quad (20)$$

и

$$\delta\eta_*(\mathbf{x}) = \frac{3h}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int \frac{d^3k}{k^{5/2}} \left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \cdot \hat{B}_{\mathbf{k}} + h.c. \right) . \quad (21)$$

Таким образом, инфракрасные радиальные моды модифицируют фоновое решение, превращая параметр окончания скатывания η_* в случайное поле, медленно меняющееся в пространстве, как показывают формулы (19), (20).

Следует отметить, что инфракрасные моды вкладывают не только в поле $\delta\eta_*(\mathbf{x})$, но и в его пространственную производную. Вклад мод, находящихся за горизонтом сегодня, то есть имеющих импульсы $k \lesssim H_0$, в флуктуацию последних дается следующим выражением

$$\langle \partial_i \eta_*(\mathbf{x}) \partial_j \eta_*(\mathbf{x}) \rangle_{k \lesssim H_0} = \delta_{ij} \cdot \frac{3h^2}{8\pi} \int_{k \lesssim H_0} \frac{dk}{k} = \delta_{ij} \cdot \frac{3h^2}{8\pi} \log \frac{H_0}{\Lambda} , \quad (22)$$

где Λ – инфракрасное обрезание, параметризующее наше незнание динамики в начале стадии конформного скатывания.

2.2 Влияние инфракрасных радиальных мод на возмущения фазы: первый порядок по h

Рассмотрим теперь, как взаимодействие с радиальными модами влияет на свойства возмущений фазы $\delta\theta$. Для этого рассмотрим возмущения мнимой части $\delta\chi_2$, чьи длины волн гораздо меньше характерного масштаба изменения модуля (подробнее см. [28]). Для них масштабы разделяются, и возмущения $\delta\chi_2$ могут все еще рассматриваться в линейном приближении, но в поле (19).

Поскольку нас заботит инфракрасная часть $\eta_*(\mathbf{x})$, мы используем градиентное разложение, рассматривая пока область вблизи нуля, и запишем

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_*(0) - v_i x_i + \dots, \quad (23)$$

где

$$v_i = -\partial_i \eta_*(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0},$$

а точки обозначают члены высших порядков по \mathbf{x} . Важно, что поле $\partial_i \partial_j \eta_*(\mathbf{x})$ имеет синий спектр мощности, так что главный эффект инфракрасных мод приходится на два члена, которые мы выписали явно в (23). Кроме того, мы предполагаем в дальнейшем, что

$$|\mathbf{v}| \ll 1, \quad (24)$$

и опускаем пока поправки порядка \mathbf{v}^2 . Разложение по $|\mathbf{v}|$ допустимо, поскольку поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ имеет плоский спектр мощности, так что разложение по $|\mathbf{v}|$ является, на самом деле, разложением по h , с точностью до инфракрасных логарифмов. Далее мы также проведем анализ лидирующих эффектов в порядке \mathbf{v}^2 .

Оставляя в (23) только два члена, мы имеем, вместо формулы (4),

$$\chi_c = \frac{1}{h[\eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x}]} . \quad (25)$$

Это выражение включает комбинацию $\eta_*(0) - (\eta + \mathbf{v}\mathbf{x})$. Мы интерпретируем ее как локальный сдвиг времени и лоренцев буст изначального фонового решения (4). Заметим, что поле (25) является решением полевых уравнений (11) в

нашем приближении. Такая интерпретация позволяет нам найти решения уравнения (12) с внешним полем (25) и начальным условием (16): они получаются временным сдвигом и лоренцевым поворотом исходного решения (14), (15):

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}+\mathbf{v}\eta)-iq\eta_*(0)} \cdot F(q, \eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x}), \quad (26)$$

где функция F также определяется выражением (15), с Лоренц-преобразованным импульсом

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} + k\mathbf{v}, \quad q = |\mathbf{q}| = k + k\mathbf{v}, \quad (27)$$

где имеется в виду, что членами порядка \mathbf{v}^2 надо пренебречь. Мы рассматриваем поправки к этому решению порядка $\partial_i\partial_j\eta_*(\mathbf{x})$ и \mathbf{v}^2 далее в параграфах 2.3.1 и 2.3.2, соответственно.

Из уравнений (25) и (26) мы получаем, что возмущения фазы снова перестают осциллировать, когда $k[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta] \rightarrow 0$:

$$\delta\theta(\mathbf{x}) = \frac{\delta\chi_2(\mathbf{x})}{\chi_c(\mathbf{x})} = i \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \frac{h}{4\pi^{3/2}q} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}-ik\eta_*(\mathbf{x})} \hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c., \quad (28)$$

Это означает, что в первом порядке градиентного разложения, которым мы пока ограничились, свойства случайного поля $\delta\theta$ такие же, как и свойства поля (17). Действительно, поскольку $\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_*(0) - \mathbf{v}\mathbf{x}$ в (28), инфракрасные эффекты исчезают при переопределении поля,

$$\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}} = e^{-ik\eta_*(0)} \sqrt{\frac{k}{q}} \hat{A}_{\mathbf{k}}, \quad (29)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{q} так же связаны уравнением (27). Поскольку мера d^3k/k Лоренц-инвариантна, операторы $\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}}^\dagger$ подчиняются стандартным коммутационным соотношениям, в то время как в нашем приближении поле (28), записанное через эти операторы, совпадает с линейным полем (17). Итак, инфракрасные радиальные моды, на самом деле, не особенно опасны, так как они качественным образом не меняют свойств поля $\delta\theta$.

2.3 Статистическая анизотропия

2.3.1 Первый порядок по h

В первом порядке по h нетривиальное воздействие длинноволновых возмущений $\delta\eta_*(\mathbf{x})$ на возмущения фазы появляется впервые во втором порядке градиентного разложения, то есть в порядке $\partial_i\partial_j\eta_*$. Здесь мы обратим внимание на эффект от мод $\delta\eta_*$, чьи современные длины волн превосходят хаббловский размер. Мы имеем дело с единственной реализацией случайного поля $\delta\eta_*$, так что во втором порядке градиентного разложения $\partial_i\partial_j\eta_*$ – это просто тензор, постоянный во всей видимой Вселенной. В этом параграфе мы приведем вычисление статистической анизотропии, которая связана с этим тензором.

До сих пор мы использовали теорию возмущений по $\partial_i\partial_j\eta_*$. Фон (19) больше не является решением полевых уравнений (11) во втором порядке градиентного разложения. Комбинация, входящая в уравнение (12) для возмущений мнимой части, дается теперь выражением [28]

$$2h^2\chi_c^2 = \frac{2}{(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial_i\partial_i\eta_*}{\eta_* - \eta}. \quad (30)$$

Решением уравнения (12) на фоне (30) с начальным условием (16) на больших временах является

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = \frac{ie^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})}}{q(\eta_* - \eta)} \left(1 - \frac{\pi}{2k} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2} \partial_i \partial_j \eta_* + \frac{\pi}{6k} \partial_i \partial_i \eta_* \right).$$

Два нетривиальных члена в скобках определяют поправку к спектру мощности возмущений фазы, вызванную радиальными модами с длинами волн больше современного хаббловского размера. Такую же поправку получают и адиабатические возмущения, так что в итоге мы имеем:

$$\mathcal{P}_\zeta = A_\zeta \left[1 - \frac{\pi}{k} \cdot \frac{k_i k_j}{k^2} \left(\partial_i \partial_j \eta_* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_* \right) \right]. \quad (31)$$

Следует отметить, что среднее по углам от этой поправки зануляется, как и должно быть со статистической анизотропией.

Ни величина, ни точная форма тензора $\partial_i \partial_j \eta_* - (1/3) \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_*$ не может быть однозначно предсказана из-за космической неопределенности. Чтобы оценить статистическую анизотропию, рассмотрим следующую величину

$$\left\langle \left(\partial_i \partial_j \eta_* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_* \right) \cdot \left(\partial_i \partial_j \eta_* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_* \right) \right\rangle_{k \lesssim H_0} \simeq \frac{3h^2}{8\pi^2} H_0^2 ,$$

где обозначения отражают тот факт, что мы рассматриваем только те моды, чьи сегодняшние длины волн превышают хаббловский размер. Таким образом, мы приходим к первому нетривиальному члену в (7). Старшие порядки градиентного разложения дают вклады в статистическую анизотропию, подавленные дополнительными факторами H_0/k .

2.3.2 Порядок h^2 : вклад глубоко инфракрасных мод

Теперь перейдем к рассмотрению статистической анизотропии во втором порядке по h . Поскольку общий сдвиг времени $\eta_*(0)$ не важен, главный вклад в этом порядке пропорционален логарифмически усиленной комбинации $\partial_i \eta_* \partial_j \eta_* \equiv v_i v_j$. Поэтому, мы используем два члена разложения по производным, явно выписанные в формуле (23).

В порядке \mathbf{v}^2 функция (25) уже не является решением полевого уравнения (11). Вместо этого решением будет

$$\chi_c = \frac{1}{h\gamma [\eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x}]}, \quad (32)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Мы будем изучать решения уравнения (12) с этим фоном. Несложно увидеть, что решение, удовлетворяющее начальному условию (16), имеет вид

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{iq_{\parallel}\gamma(x_{\parallel} + v\eta) + i\mathbf{q}^T \mathbf{x}^T - iq\gamma\eta_*(0)} \cdot F[q, \gamma(\eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x})], \quad (33)$$

где Лоренц-повернутый импульс, как обычно, равен $q_{\parallel} = \gamma(k_{\parallel} + kv)$, $\mathbf{q}^T = \mathbf{k}^T$, $q = \gamma(k + k_{\parallel}v)$, а обозначения \parallel и T относятся к компонентам, параллельным и перпендикулярным к \mathbf{v} , соответственно.

Согласно сценарию, которому мы следуем, возмущения фазы $\delta\theta$ вымораживаются на гиперповерхности $\eta = \eta_*(0) - \mathbf{v}\mathbf{x} \equiv \eta_*(0) - vx_{\parallel}$, а потом остаются постоянными во времени. Из (32) и (33) следует, что на поздних временах возмущения фазы выглядят следующим образом:

$$\delta\theta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{\sqrt{q}} \frac{h}{4\pi^{3/2}q} e^{i\gamma^{-1}q_{\parallel}x_{\parallel} + i\mathbf{q}^T\mathbf{x}^T} \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}} + h.c. , \quad (34)$$

где операторы $\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}}$ определены (29) и удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям; здесь мы отбросили постоянный фазовый множитель, от которого ничто не зависит. Видно, что в порядке \mathbf{v}^2 влияние глубоко инфракрасных мод представлено множителем γ^{-1} в первом члене в экспоненте: импульс возмущения, соответствующего \mathbf{q} , на самом деле равен $\mathbf{p} = (\gamma^{-1}q_{\parallel}, \mathbf{q}^T)$. Соответственно, спектр мощности (помимо поправки, обсуждаемой ранее в параграфе 2.3.1) дается выражением

$$\mathcal{P}_{\zeta}(\mathbf{k}) = A_{\zeta} \frac{k^3}{[(\gamma k_{\parallel})^2 + (\mathbf{k}^T)^2]^{3/2}} = A_{\zeta} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2} \right) .$$

Итак, мы пришли к последнему члену в (7). Опять же, ни направление, ни величина \mathbf{v} не могут быть однозначно определены из-за космической неопределенности; вспомним, однако, что значение $|\mathbf{v}|$, а, следовательно, параметра c_2 в (7), логарифмически усилено инфракрасными поправками, см. (22).

Если предположить, что возмущения фазы переводятся в адиабатические возмущения курватонным механизмом, оба члена статистической анизотропии (7) малы из-за условия (18). С другой стороны, эффект может быть сильнее в случае механизма модулированного распада.

2.4 Генезис с галилеоном и конформное скатывание

2.4.1 Явная проверка

Модель с галилеоном была введена в [105]. Скатывающийся галилеон в ней служит полем ρ , входящим в (1) и (2). В пространстве Минковского лагранжиан простейшей конформно инвариантной версии [27] этой модели выглядит

следующим образом

$$L_\pi = -f^2 e^{2\pi} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \frac{f^3}{\Lambda^3} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \square \pi + \frac{f^3}{2\Lambda^3} (\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi)^2, \quad (35)$$

где $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Уравнение поля в пространстве Минковского допускает однородное решение π_c следующего вида

$$e^{\pi_c} = -\frac{1}{H_* x_0}, \quad (36)$$

где $x_0 = t < 0$ и

$$H_*^2 = \frac{2\Lambda^3}{3f}.$$

Следовательно, определяем

$$\rho = H_* e^\pi \quad (37)$$

так, чтобы фоновое решение давалось (2).

Запишем квадратичное действие для возмущений над этим решением:

$$S_{\delta\pi} = \frac{f^2}{H_*^2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{x_0^2} [(\partial_0 \delta\pi)^2 - (\partial_i \delta\pi)^2] + \frac{4}{x_0^4} \delta\pi^2 \right\}.$$

Удобно ввести переменную $\delta\rho = -x_0^{-1} \delta\pi$. Из (37) следует, что $\delta\rho$ – возмущение поля ρ над фоном $\rho_c = -x_0^{-1}$. Его действие:

$$S_{\delta\rho} = \frac{2f^2}{H_*^2} \int d^4x \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \delta\rho)^2 - (\partial_i \delta\rho)^2 + \frac{6}{x_0^2} (\delta\rho)^2 \right].$$

Уравнение поля имеет простую форму:

$$\partial_0^2 \delta\rho - \Delta \delta\rho - \frac{6}{x_0^2} \delta\rho = 0. \quad (38)$$

Канонически нормированное решение с импульсом \mathbf{k} дается следующим выражением

$$\delta\rho = h \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{-t}{2}} H_{5/2}^{(1)}(-kx_0) \cdot \hat{B}_{\mathbf{k}} + h.c., \quad (39)$$

где $\hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $\hat{B}_{\mathbf{k}}$ – операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям $[\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$, а

$$h = \frac{H_*}{\sqrt{2}f}. \quad (40)$$

Эта теория находится в режиме слабой связи в интересном диапазоне импульсов, если $h \ll 1$.

Мода (39) осциллирует на ранних временах, когда $k|x_0| \gg 1$, а на поздних временах ведет себя следующим образом

$$\delta\rho = h \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{k^{5/2}x_0^2} \cdot \hat{B}_{\mathbf{k}} + h.c. .$$

Это поведение также можно интерпретировать как локальный сдвиг времени [26, 27]. Действительно, для сдвинутого решения для галилеона (36) мы имеем

$$e^{\pi_c + \delta\pi} = e^{\pi_c}(1 + \delta\pi) = -\frac{1}{H_*(x_0 + \delta x_0)} = -\frac{1}{H_*x_0} + \frac{\delta x_0}{H_*x_0^2}.$$

Следовательно,

$$\delta x_0 = -x_0\delta\pi = x_0^2\delta\rho.$$

таким образом, $\delta x_0(\mathbf{x})$ не зависит от времени на поздних временах и имеет красный спектр мощности:

$$\mathcal{P}_{\delta x_0} = \frac{9h^2}{4\pi^2} \frac{1}{k^2}. \quad (41)$$

В сценарии с галилеоном поле Θ вводится как дополнительное поле, именно с целью генерации космологических возмущений. Благодаря конформной инвариантности квадратичный лагранжиан для этих возмущений имеет форму второго члена в (1). В поле $\rho_c = -x_0^{-1}$ они себя ведут следующим образом:

$$\Theta = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} (-x_0)^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(-kx_0) \cdot \hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c. , \quad (42)$$

где $\hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}}$ – другой набор операторов рождения и уничтожения. На ранних временах поле Θ находится в режиме ВКБ, а когда $k|x_0| \ll 1$ мода не зависит от времени. В результате, на поздних временах спектр мощности плоский,

$$\mathcal{P}_\Theta = \frac{1}{4\pi^2}. \quad (43)$$

Этот результат верен в линейном приближении. Низший порядок взаимодействия полей Θ и $\delta\rho$ определяется гамильтонианом взаимодействия, чья плотность (в представлении взаимодействия)

$$\mathcal{H}_I = -L_{\text{int}} = -\rho_c \delta\rho (\partial_\mu \Theta)^2. \quad (44)$$

Именно это взаимодействие ответственно за негауссовость, которую мы позже найдем.

В проведенных рассуждениях мы пренебрегли влиянием гравитации. Это законно в таком сценарии на ранних этапах, когда плотность энергии поля галилеона мала, а остальные поля вообще, как предполагается, несущественны. Последнее предположение имеется и в сценарии с конформным скатыванием, но, в отличие от галилеона, в модели с конформным скатыванием есть скалярный потенциал. Напомним, что конформная симметрия диктует его вид: $V(\phi) = -h^2|\phi|^4$. Используем параметризацию

$$\phi = \frac{\rho}{h} \exp\left(i \frac{h\Theta}{\sqrt{2}}\right). \quad (45)$$

Тогда, фоновое поле ρ_c скатывается согласно (2), где $x_0 = \eta$ – теперь *конформное* время [26]. Лагранжиан для Θ совпадает со вторым членом в (1), а возмущения $\delta\rho$ снова подчиняются уравнению (38). Канонически нормированное решение для поля Θ и возмущения $\delta\rho$ совпадает с (42) и (39), соответственно, только h – константа самодействия, а $x_0 = \eta$. Таким образом, динамика возмущений в модели с конформным скатыванием идентична модели с галилеоном.

2.4.2 Общее доказательство

Убедимся, что форма уравнения (38), определяющего возмущения $\delta\rho$ в линейном порядке, полностью определяется конформной инвариантностью. А именно, рассмотрим теорию, в которой классическое уравнение поля для ρ имеет второй порядок по производным, действие для ρ локально и инвариантно относительно пространственных сдвигов и вращений, временных сдвигов, растяже-

ний

$$\rho(x) \rightarrow \lambda \rho(\lambda x)$$

и инверсии

$$\rho(x^\mu) \rightarrow \frac{1}{x^2} \rho\left(\frac{x^\mu}{x^2}\right) .$$

В такой теории автоматически имеется решение $\rho_c = -x_0^{-1}$ (общую константу всегда можно сделать равной единице переобозначением поля). Это решение инвариантно относительно и растяжения, и инверсии. Таким образом, квадратичное действие для возмущений $\delta\rho$ над этим решением тоже должно быть инвариантно. Запишем для квадратичного действия:

$$S^{(2)} = h^{-2} \int d^4x \delta\rho \mathcal{L} \delta\rho , \quad (46)$$

где \mathcal{L} – дифференциальный оператор второго порядка, а h – некоторая константа, выбор которой будет определен ниже. Поскольку фон зависит только от времени, оператор \mathcal{L} не содержит явно пространственных координат, но может содержать время. Он также инвариантен относительно пространственных вращений.

Инвариантность относительно растяжений означает, что с точностью до общей константы, часть \mathcal{L} , включающая производные, имеет вид

$$\mathcal{L} \supset -\partial_0^2 + v_s^2 \Delta , \quad (47)$$

где v_s не зависит от времени. Мы можем выбрать константу h в (46) таким образом, чтобы член с двумя производными по времени входил с коэффициентом -1 . Масштабной инвариантности не достаточно⁴ для того, чтобы получить $v_s = 1$. Однако требование инвариантности относительно инверсии однозначно определяет $v_s = 1$. Член без производных практически однозначно определяется из условия инвариантности относительно растяжения и инверсии,

$$\mathcal{L} \supset \frac{c}{x_0^2} \quad (48)$$

⁴Простой способ это увидеть – рассмотреть модификацию модели галилеона, в которой коэффициенты при втором и третьем членах в (35) независимы.

где c – пока произвольная константа. Наконец, инвариантность исходного действия относительно временных сдвигов означает, что $\delta\rho = \dot{\rho}_c = x_0^{-2}$ должно быть решением уравнения $\mathcal{L}\delta\rho = 0$. Это дает $c = 6$. Таким образом, все квадратичное действие для возмущений однозначно определяется конформной инвариантностью с точностью до общего постоянного множителя, а линейное уравнение для $\delta\rho$ имеет один и тот же вид в целом классе конформно инвариантных моделей с лагранжианами общего вида (1). В лидирующем *нелинейном* порядке свойства возмущений Θ идентичны в этих моделях, так как они определяются гамильтонианом взаимодействия (44).

2.5 Негауссовость

Теперь перейдем к обсуждению негауссовости. Поскольку модель инвариантна относительно замены $\theta \rightarrow -\theta$, трехточка полей фазы равна нулю. Поэтому нижней неисчезающей корреляционной функцией будет четырехточечная. В этом параграфе мы найдем четырехточечную корреляционную функцию $\langle\theta(x)\theta(y)\theta(z)\theta(w)\rangle$ и изложим метод, которым это сделано, так называемый $\langle\text{In-In}\rangle$ -формализм. Для произвольного оператора \mathcal{O} запишем :

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \left\langle \left[\bar{T} \exp \left(i \int_{-\infty}^0 dx_0 H_I \right) \right] \mathcal{O}_{(I)} \left[T \exp \left(-i \int_{-\infty}^0 dx_0 H_I \right) \right] \right\rangle \quad (49)$$

где $\mathcal{O}_{(I)}$ – оператор \mathcal{O} в представлении взаимодействия. Поскольку нам потребуется гамильтониан взаимодействия, в следующем параграфе мы его аккуратно вычислим.

2.5.1 Гамильтониан

Нас будут интересовать члены взаимодействия первого порядка по \hbar , поэтому для поля χ запишем

$$\chi = \left(\frac{\rho_c}{\hbar} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right) \exp \left[i \frac{\hbar\theta}{\sqrt{2}} \right],$$

где

$$\rho_c = \frac{1}{\eta_* - \eta} \equiv \frac{1}{\xi} \equiv -\frac{1}{x_0}$$

- классическое решение уравнений поля, умноженное на h ; мы используем здесь обозначение ρ для возмущений модуля. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 (\partial_\mu \theta)^2 + 3\rho_c^2 \rho^2 + \sqrt{2}h\rho_c \rho^3 + \frac{h^2}{4}\rho^4 \quad (50)$$

Из (50) находим канонически сопряженные переменные

$$\pi_\theta = \dot{\theta} \left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad \pi_\rho = \dot{\rho} \quad (51)$$

и плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{\pi_\theta^2}{2 \left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2} + \frac{1}{2} \left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 (\partial_i \theta)^2 + \mathcal{H}_\rho, \quad (52)$$

здесь \mathcal{H}_ρ содержит только ρ и ρ_c .

Теперь перейдем к представлению взаимодействия. Для этого разложим гамильтониан (52) на квадратичную часть \mathcal{H}_0 и член взаимодействия \mathcal{H}_I

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\theta, \pi_\theta) &= \frac{\pi_\theta^2}{2\rho_c^2} + \frac{1}{2}\rho_c^2(\partial_i \theta)^2 \\ \mathcal{H}_I(\theta, \pi_\theta) &= -\frac{\pi_\theta^2}{2\rho_c^2} \left[\frac{\left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 - \rho_c^2}{\left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 - \rho_c^2 \right] (\partial_i \theta)^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Введем переменные в представлении взаимодействия $\theta_{(I)}$ и $\pi_{\theta(I)}$. Они по определению удовлетворяют свободным уравнениям

$$\dot{\theta}_{(I)} = i [\mathcal{H}_0(\theta_{(I)}, \pi_{\theta(I)}), \theta_{(I)}], \quad \dot{\pi}_{\theta(I)} = i [\mathcal{H}_0(\theta_{(I)}, \pi_{\theta(I)}), \pi_{\theta(I)}] \quad (54)$$

с вакуумными начальными условиями. Как и должно быть, уравнения (54) эквивалентны свободным уравнениям, вытекающим из (50):

$$\begin{aligned} \partial_\mu^2 \theta_{(I)} + 2 \frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c} \dot{\theta}_{(I)} &= 0 \\ \partial_\mu^2 \rho_{(I)} - 6\rho_c^2 \rho_{(I)} &= 0 \end{aligned}$$

с решениями

$$\rho_{(I)} = -\frac{i}{4\pi} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{k\xi}{2}} H_{\frac{5}{2}}^{(1)}(k\xi) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} B_{\mathbf{k}} + \text{h.c.} \quad (55)$$

$$\theta_{(I)} = -\frac{1}{4\pi\rho_c} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{k\xi}{2}} H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(k\xi) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_{\mathbf{k}} + \text{h.c.} \quad (56)$$

Путем стандартных манипуляций получаем гамильтониан взаимодействия (53) в представлении взаимодействия $\mathcal{H}_I(\theta_{(I)}, \pi_{\theta_{(I)}})$. Соответственно, первое уравнение в (54) дает

$$\pi_{\theta_{(I)}} = \rho_c^2 \dot{\theta}_{(I)},$$

так что

$$\mathcal{H}_I(\theta_{(I)}, \pi_{\theta_{(I)}}) = -\frac{\dot{\theta}_{(I)}^2 \rho_c^2}{2} \left[\frac{\left(\rho_c + \frac{h\rho_{(I)}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \rho_c^2}{\left(\rho_c + \frac{h\rho_{(I)}}{\sqrt{2}}\right)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\rho_c + \frac{h\rho_{(I)}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \rho_c^2 \right] (\partial_i \theta_{(I)})^2.$$

Разлагая это выражение по h и $\rho_{(I)}$ до первого порядка, получаем гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия (для упрощения обозначений индекс (I) у полей будем опускать)

$$\mathcal{H}_I = \frac{h\rho_c\rho}{\sqrt{2}} \left((\partial_i \theta)^2 - \dot{\theta}^2 \right) = -\mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (57)$$

именно его мы будем использовать в (49).

2.5.2 Спаривание и T -произведение

Ниже нам понадобятся следующие функции:

$$\theta(x)\theta(y) =: \theta(x)\theta(y) : + D(x, y), \quad \rho(x)\rho(y) =: \rho(x)\rho(y) : + D_\rho(x, y). \quad (58)$$

Используя (55), (56) получаем:

$$D(x, y) = \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d^3k}{[\rho_c(x)\rho_c(y)]^{3/2}} H_{3/2}^{(1)}(-kx_0) H_{3/2}^{(2)}(-ky_0) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (59)$$

$$D_\rho(x, y) = \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d^3k}{[\rho_c(x)\rho_c(y)]^{1/2}} H_{5/2}^{(1)}(-kx_0) H_{5/2}^{(2)}(-ky_0) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (60)$$

Легко проверить, что любая из функций спаривания D удовлетворяет условию

$$D_{(\rho)}(x, y) = D_{(\rho)}^*(y, x) . \quad (61)$$

Кроме того, нам понадобится (анти) T -произведение полей ρ . А именно,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{xy} + T_{xy} &\equiv \langle \bar{T}(\rho_x \rho_y) \rangle + \langle T(\rho_x \rho_y) \rangle = \\ &= \Theta(x_0 - y_0) D_\rho(y, x) + \Theta(y_0 - x_0) D_\rho(x, y) + \\ &+ \Theta(x_0 - y_0) D_\rho(x, y) + \Theta(y_0 - x_0) D_\rho(y, x) = \\ &= D_\rho(x, y) + D_\rho(y, x) = 2\text{Re}(D_\rho(x, y)) \end{aligned} \quad (62)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{T}_{xy} - T_{xy} &= -\varepsilon(x_0 - y_0) [D_\rho(x, y) - D_\rho(y, x)] = \\ &= -2i\varepsilon(x_0 - y_0) \text{Im}(D_\rho(x, y)) \end{aligned} \quad (63)$$

2.5.3 4-точечные функции. Координатное представление

В этом параграфе мы найдем коррелятор $\langle \theta(x)\theta(y)\theta(z)\theta(w) \rangle$, который в дальнейшем мы будем для простоты часто обозначать θ^4 . Нам интересен вклад порядка \hbar^2 . Подставим (57) в (49). В корреляторе будет два типа вкладов; первый соответствует разложению и левой, и правой экспоненты до первого порядка. В этом случае (анти) T -произведение нам не понадобится, единственная возможность – спарить ρ , приходящие из двух гамильтонианов, друг стругом, а θ из обоих гамильтонианов – с θ из θ^4 . Итак, используя (49), (57) и (58), получаем

для вклада первого типа

$$\begin{aligned}
& \langle i \left(\int d^4 x' \mathcal{H}_I(x') \right) \theta^4(-i) \left(\int d^4 x'' \mathcal{H}_I(x'') \right) \rangle = \\
& = \left\{ 2h^2 \int d^4 x' d^4 x'' \rho_c(x') \rho_c(x'') \times \right. \\
& \times \left[\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y) \partial''_\nu D(z, x'') \partial''_\nu D(w, x'') D_\rho(x', x'') + \left(\begin{array}{c} x \leftrightarrow z \\ y \leftrightarrow w \end{array} \right) \right] \left. \right\} + \\
& + \{y \leftrightarrow z\} + \{y \leftrightarrow w\} \tag{64}
\end{aligned}$$

Определим еще две функции:

$$\begin{aligned}
R(x'; x, y) & \equiv R_{x'xy} \equiv \text{Re} [\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y)] \\
Q(x'; x, y) & \equiv Q_{x'xy} \equiv \text{Im} [\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y)] \tag{65}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (61), получим

$$\partial''_\nu D(z, x'') \partial''_\nu D(w, x'') = \partial''_\nu D^*(x'', z) \partial''_\nu D^*(x'', w) = R_{x''zw} - iQ_{x''zw} .$$

Сделав замену $x' \leftrightarrow x''$ во втором члене в квадратных скобках (64), получим (для выражения в квадратных скобках):

$$\begin{aligned}
& (R_{x'xy} + iQ_{x'xy}) (R_{x''zw} - iQ_{x''zw}) D_\rho(x', x'') + \\
& = (R_{x'xy} - iQ_{x'xy}) (R_{x''zw} + iQ_{x''zw}) D_\rho(x'', x') = \\
& = (R_{x'xy} R_{x''zw} + Q_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') + D_\rho(x'', x')] + \\
& + i(Q_{x'xy} R_{x''zw} - R_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x')] . \tag{66}
\end{aligned}$$

Теперь обсудим второй тип вкладов. Он отвечает разложению только одной

экспоненты, но до второго порядка:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left(\frac{i^2}{2} \int d^4x' d^4x'' \bar{T} \mathcal{H}_I(x') \mathcal{H}_I(x'') \right) \theta^4 \right\rangle + \left\langle \theta^4 \left(\frac{(-i)^2}{2} \int d^4x' d^4x'' T \mathcal{H}_I(x') \mathcal{H}_I(x'') \right) \right\rangle \\
& = \left\{ -2h^2 \int d^4x' d^4x'' \rho_c(x') \rho_c(x'') \left[\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y) \partial''_\nu D(x'', z) \partial''_\nu D(x'', w) \bar{T}_{x'x''} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \partial'_\mu D(x, x') \partial'_\mu D(y, x') \partial''_\nu D(z, x'') \partial''_\nu D(w, x'') T_{x'x''} \right] \right\} + \{y \leftrightarrow z\} + \{y \leftrightarrow w\} \quad (67)
\end{aligned}$$

Используя (62), (63) и (65), получаем выражение в квадратных скобках предыдущей формулы:

$$\begin{aligned}
& (R_{x'xy} R_{x''zw} - Q_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') + D_\rho(x'', x')] - \\
& - i\varepsilon(x'_0 - x''_0) (Q_{x'xy} R_{x''zw} + R_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x')] . \quad (68)
\end{aligned}$$

Подставляя (68) в (67) и (66) в (64), получаем в итоге

$$\begin{aligned}
\langle \theta_x \theta_y \theta_z \theta_w \rangle & = 4h^2 \int d^4x' d^4x'' \rho_c(x') \rho_c(x'') [Q_{x'xy} Q_{x''zw} (D_\rho(x', x'') + D_\rho(x'', x')) + \\
& + i (D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x')) \{ \Theta(x'_0 - x''_0) Q_{x'xy} R_{x''zw} - \Theta(x''_0 - x'_0) R_{x'xy} Q_{x''zw} \}] + \\
& \quad + [y \leftrightarrow z] + [y \leftrightarrow w] \quad (69)
\end{aligned}$$

2.5.4 4-точечные функции. Импульсное представление. Лидирующий вклад

Лидирующий вклад, на самом деле, дает последний член, явно выписанный в (69). Позже мы это увидим. Нас интересует формальный предел $x_0 = y_0 = z_0 = w_0 \rightarrow 0$, что отвечает поздним временам. Спаривание D регулярно в этом пределе. Поэтому мы кладем время равным нулю прямо в формуле (59):

$$D(x', \mathbf{x}, x_0 = 0) = \frac{i}{32\pi^2 \rho_c(\xi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{d^3k}{k^{3/2}} H_{3/2}^{(1)}(k\xi) e^{ik(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \quad (70)$$

Здесь и ниже мы используем обозначения $\xi = -x'_0$ и $\chi = -x''_0$. Найдем⁵ функции $R_{x'\mathbf{x}y}$ и $Q_{x'\mathbf{x}y}$. Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} \partial'_\mu D(x', \mathbf{x}) \partial'_\mu D(x', \mathbf{y}) &= -\frac{1}{(32\pi^2)^2} \frac{2}{\pi} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{k_1^{3/2} k_2^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}'-\mathbf{x})+i\mathbf{k}_2(\mathbf{x}'-\mathbf{y})} \times \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(k_1 \xi) \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(k_2 \xi) \right) + \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \xi^3 H_{3/2}^{(1)}(k_1 \xi) H_{3/2}^{(1)}(k_2 \xi) \right] \end{aligned} \quad (71)$$

Разделим выражение в квадратных скобках (71) на действительную

$$\begin{aligned} \tilde{R}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) &\equiv \pi(k_1 k_2)^{3/2} \text{Re}[\dots] = \\ &= \cos(\xi(k_1 + k_2)) \cdot [\xi^2 k_1 k_2 (k_{12}^2 - (k_1 + k_2)^2) + k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2] + \\ &\quad + \sin(\xi(k_1 + k_2)) \cdot \xi(k_1 + k_2)(k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2) \end{aligned} \quad (72)$$

и мнимую части

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) &\equiv \pi(k_1 k_2)^{3/2} \text{Im}[\dots] = \\ &= \sin(\xi(k_1 + k_2)) \cdot [\xi^2 k_1 k_2 (k_{12}^2 - (k_1 + k_2)^2) + k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2] - \\ &\quad - \cos(\xi(k_1 + k_2)) \cdot \xi(k_1 + k_2)(k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2) \end{aligned} \quad , \quad (73)$$

где

$$\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (74)$$

Мы учли, что интеграл

$$\int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(k)$$

⁵Кажется заманчивым избавиться от производных в (69) с помощью уравнений движения и интегрирования по частям. Несмотря на то, что получившееся выражение выглядит проще, этот подход бесполезен из-за появляющегося граничного члена, а главное, из-за сингулярности при $\xi \rightarrow 0$, которая отсутствует в исходной формуле (69).

действителен для произвольной действительной функции $f(k)$. Из (65), (70), (71) получаем:

$$\begin{aligned} R_{x'xy} &= -\frac{1}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{k_1^3 k_2^3} e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{x}' - \mathbf{k}_1\mathbf{x} - \mathbf{k}_2\mathbf{y}]} \tilde{R}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \\ Q_{x'xy} &= -\frac{1}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{k_1^3 k_2^3} e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{x}' - \mathbf{k}_1\mathbf{x} - \mathbf{k}_2\mathbf{y}]} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \end{aligned} \quad (75)$$

Теперь найдем четырехточечную функцию в импульсном представлении. Рассмотрим сначала вклад первого члена в квадратных скобках (69). Принимая во внимание (61), подставляем (60) и (75) в (69), и интегрируем по \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' . В результате мы получаем две δ -функции, первая из которых дает (74), где \mathbf{k}_{12} – импульс D_ρ , а вторая отвечает закону сохранения полного импульса. Итак, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \theta^4 \rangle_{l.c.} &= 8h^2 \int dx' dx'' \rho_c(x') \rho_c(x'') Q_{x'xy} Q_{x''zw} \text{Re}(D_\rho(x', x'')) = \\ &= \frac{h^2}{64(2\pi)^8} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 p_1 d^3 p_2}{k_1^3 k_2^3 p_1^3 p_2^3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) e^{i[\mathbf{k}_1\mathbf{x} + \mathbf{k}_2\mathbf{y} + \mathbf{p}_1\mathbf{z} + \mathbf{p}_2\mathbf{w}]} \times \end{aligned} \quad (76)$$

$$\times \int_0^\infty d\xi d\chi \sqrt{\rho_c(\xi)\rho_c(\chi)} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \tilde{Q}(p_1, p_2, k_{12}, \chi) [Y_{5/2}(k_{12}\xi)Y_{5/2}(k_{12}\chi) + J_{5/2}(k_{12}\xi)J_{5/2}(k_{12}\chi)].$$

Определим в импульсном представлении n -точечную функцию следующим образом

$$(2\pi)^3 \delta\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i\right) G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \int \prod_{i=1}^n \{d^3 x_i e^{-i\mathbf{k}_i \mathbf{x}_i}\} G_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

тогда для четырехточки имеем

$$\theta_{4(l.c.)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{h^2 \pi}{32} \frac{1}{k_1^3 k_2^3 p_1^3 p_2^3} \times \quad (77)$$

$$\times \int_0^{\infty} d\xi d\chi \sqrt{\rho_c(\xi)\rho_c(\chi)} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \tilde{Q}(p_1, p_2, k_{12}, \chi) [Y_{5/2}(k_{12}\xi)Y_{5/2}(k_{12}\chi) + J_{5/2}(k_{12}\xi)J_{5/2}(k_{12}\chi)].$$

Видно, что интегралы по ξ и χ разделяются на произведение двух интегралов, каждый из которых берется явно. При помощи компьютерных программ (Mathematica, Maple), а также, используя стандартные методы интегрирования, получаем следующий результат

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(k_1, k_2, k_{12}) &\equiv \int_0^{\infty} d\xi \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \sqrt{\rho_c(\xi)} Y_{5/2}(k_{12}\xi) = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k_{12}^{5/2}} [3(k_1^2 - k_2^2)^2 - 2(k_1^2 + k_2^2)k_{12}^2 - k_{12}^4] \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(k_1, k_2, k_{12}) &\equiv \int_0^{\infty} d\xi \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \sqrt{\rho_c(\xi)} J_{5/2}(k_{12}\xi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_{12}^{5/2}} \left[k_{12}(k_{12}^2 - 3(k_1 - k_2)^2)(k_1 + k_2) + \right. \\ &\quad \left. + (3(k_1^2 - k_2^2)^2 - 2(k_1^2 + k_2^2)k_{12}^2 - k_{12}^4) \operatorname{arctanh} \frac{k_{12}}{k_1 + k_2} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

Теперь выделим лидирующий порядок. Нам интересна следующая конфигурация:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}, & \mathbf{Z} &= \frac{\mathbf{z} + \mathbf{w}}{2} \\ \vec{\varepsilon} &= \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (80)$$

соответственно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \frac{\vec{\varepsilon}}{2}, & \mathbf{z} &= \mathbf{Z} + \frac{\vec{\varepsilon}}{2}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{X} - \frac{\vec{\varepsilon}}{2}, & \mathbf{w} &= \mathbf{Z} - \frac{\vec{\varepsilon}}{2}. \end{aligned}$$

Из (80) следует, что

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{Z} = \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{w}$$

В дальнейшем интересным для нас режимом будет

$$L \gg \varepsilon. \quad (81)$$

Через новые переменные показатель экспоненты в (76) выражается следующим образом

$$\mathbf{X}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \mathbf{Z}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \frac{\vec{\varepsilon}}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \frac{\vec{\varepsilon}}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (82)$$

Или, вводя новые переменные (мы учитываем δ -функцию в (76)),

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_{12}, & \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= -\mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 &= 2\mathbf{Q}, & \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 &= 2\mathbf{P}, \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{\mathbf{k}_{12}}{2} + \mathbf{Q}, & \mathbf{k}_2 &= \frac{\mathbf{k}_{12}}{2} - \mathbf{Q}, \\ \mathbf{p}_1 &= -\frac{\mathbf{k}_{12}}{2} + \mathbf{P}, & \mathbf{p}_2 &= -\frac{\mathbf{k}_{12}}{2} - \mathbf{P}, \end{aligned}$$

получаем в показателе экспоненты

$$\mathbf{Lk}_{12} + \vec{\varepsilon}(\mathbf{Q} + \mathbf{P}). \quad (84)$$

Это означает, что в режиме (81)

$$Q \sim P \sim \frac{1}{\varepsilon} \gg k_{12} \sim \frac{1}{L}.$$

Используя (78), (79), находим лидирующее поведение функций \mathcal{Y} и \mathcal{J} при малых k_{12} :

$$\mathcal{Y}(\mathbf{Q}, \mathbf{k}_{12}) = \sqrt{\frac{2\pi}{k_{12}}} Q^2 \left[1 - 3 \left(\frac{\mathbf{k}_{12}\mathbf{Q}}{k_{12}Q} \right)^2 + \mathcal{O}(k_{12}^2/Q^2) \right] \quad (85)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{k}_{12}) = \mathcal{O}(k_{12}^{5/2}).$$

Отметим, что лидирующие члены порядка $1/k_{12}^{5/2}$ и $1/k_{12}^{3/2}$, которые мы бы наивно ожидали в (78), сократились.

Итак, подставляя (85) в (77), получаем (поскольку функция \mathcal{J} регулярна, она не дает лидирующего вклада)

$$\theta_{4(l.c.)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{k}_{12}) = \frac{h^2 \pi^2}{16} \frac{1}{k_{12} Q^4 P^4} \left[1 - 3 \left(\frac{\mathbf{k}_{12} \mathbf{Q}}{k_{12} Q} \right)^2 \right] \left[1 - 3 \left(\frac{\mathbf{k}_{12} \mathbf{P}}{k_{12} P} \right)^2 \right] \quad (86)$$

В режиме малых k_{12} второй член в квадратных скобках (69) не имеет сингулярности. После перехода в импульсное представление, из (72), (73), (75) видно, что функции R и Q регулярны при $k_{12} \rightarrow 0$. Фактор $D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x') = 2i \text{Im}(D_\rho(x', x''))$ включает произведение функций Бесселя и Неймана $J_{3/2}(k_{12}\xi)Y_{3/2}(k_{12}\chi)$, и, следовательно, тоже конечен. Соответственно, интеграл по ξ и χ также не имеет сингулярности. Получаем, что вклад от второго слагаемого в (69) конечен при малых k_{12} и, следовательно, подавлен по сравнению с (86).

Перекрестные слагаемые (в третьей строчке в формуле (69)) тоже подавлены по сравнению с лидирующим вкладом. Для определенности рассмотрим слагаемое $y \leftrightarrow z$. Из (76) следует, что это отвечает замене $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{p}_2$ в экспоненте, а \mathbf{k}_{12} в (76) остается в этом случае неизменным (74). Таким образом, получаем, что выражение в показателе экспоненты (82) остается верным, с заменой $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{p}_2$, и уравнение (83) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 &= \tilde{\mathbf{k}}_{12}, & \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2 &= -\tilde{\mathbf{k}}_{12} \\ \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1 &= 2\mathbf{Q}, & \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2 &= 2\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (87)$$

Что касается уравнения (84), то оно тоже остается, но с заменой $\mathbf{k}_{12} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}_{12}$. Это означает, что в данном случае малым становится $\tilde{\mathbf{k}}_{12}$, а не \mathbf{k}_{12} . Но функции \mathcal{U} и \mathcal{J} все еще зависят от k_{12} , а не от \tilde{k}_{12} , и поэтому инфракрасное усиление (сингулярность), такое, как было в (86), в перекрестном члене отсутствует.

2.5.5 Формы негауссовости

Вычисление вклада (67) проведено в следующем разделе, где также приведен полный результат для четырехточки. Мы определяем четырехточку, или три-

спектр \mathcal{T} в нашем случае следующим образом

$$G_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{h^2}{4} \mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14}) ,$$

$$\prod_{i=1}^4 k_i^3$$

где $\mathbf{k}_{14} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4$. Комбинации $k_{13} = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|$ и $k_{24} = |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|$ не являются независимыми, так как

$$k_{13} = k_{24} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_{12}^2 - k_{14}^2} .$$

Для иллюстрации удобно разложить триспектр на часть \mathcal{T}_s , сингулярную при $k_{12} \rightarrow 0$, $k_{13} \rightarrow 0$, или $k_{14} \rightarrow 0$, и на регулярную часть \mathcal{T}_r ,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_s + \mathcal{T}_r .$$

Сингулярная часть получается⁶ из (86),

$$\mathcal{T}_s = \frac{\pi}{32} [\mathcal{Y}_s(k_1, k_2, k_{12})\mathcal{Y}_s(k_3, k_4, k_{12}) + (\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_4)] , \quad (88)$$

тогда как остальная часть находится из (98) и (99). Важно отметить, что никакой другой сингулярности в \mathcal{T} нет: можно проверить, что логарифмические расходимости, появляющиеся в промежуточных формулах, сокращаются при учете всех вкладов.

Как и авторы [106], мы будем сравнивать наш триспектр с триспектрами локального вида. Последние получаются из анзатца в координатном пространстве [107, 108]

$$\zeta(\mathbf{x}) = \zeta_g + \frac{3}{5} f_{NL}(\zeta_g^2 - \langle \zeta_g^2 \rangle) + \frac{9}{25} g_{NL}(\zeta_g^3 - 3\langle \zeta_g^2 \rangle \zeta_g) , \quad (89)$$

где ζ_g – гауссово поле, а f_{NL} и g_{NL} – константы. Мы имеем [106]:

$$G_{4,\text{loc}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{\text{const}}{4} (f_{NL}^2 \mathcal{T}_{\text{loc}1} + g_{NL} \mathcal{T}_{\text{loc}2}) ,$$

$$\prod_{i=1}^4 k_i^3$$

⁶Произведение $\mathcal{Y}_s \mathcal{Y}_r$ регулярно в пределе $k_{12} \rightarrow 0$.

где две локальные формы – следующие:

$$\mathcal{T}_{\text{loc1}} = \frac{9}{50} \left(\frac{k_1^3 k_3^3 + k_1^3 k_4^3 + k_2^3 k_3^3 + k_2^3 k_4^3}{k_{12}^3} + \{\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3\} + \{\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_4\} \right), \quad (90)$$

$$\mathcal{T}_{\text{loc2}} = \frac{27}{100} \sum_{i=1}^4 k_i^3. \quad (91)$$

Определим величину негауссовости. Стандартная оценка t_{NL} связана с четырехточечной функцией в пределе тетраэдра, $k_i = k_{12} = k_{14} \equiv k$,

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}}^4 \rangle_{k_i=k_{12}=k_{14} \equiv k} = (2\pi)^9 \mathcal{P}_\zeta^3 \delta \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \frac{1}{k^9} t_{NL}. \quad (92)$$

Отметим, что стандартное определение включает \mathcal{P}_ζ^3 в правой части. Это имеет смысл для локального анзатца (89), и величины в локальных моделях следующие [106]:

$$t_{NL}^{\text{loc1}} = 2.16 f_{NL}^2, \quad t_{NL}^{\text{loc2}} = 1.08 g_{NL}.$$

С другой стороны, величина, которую мы можем явно найти в нашей модели – это

$$\langle \theta_{\mathbf{k}}^4 \rangle_{k_i=k_{12}=k_{14} \equiv k} = (2\pi)^9 \mathcal{P}_\theta^3 \delta \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \frac{1}{k^9} t_{NL}^{(\theta)},$$

где $\mathcal{P}_\theta = 1/(4\pi^2)$, согласно (43). Величина негауссовости для θ в нашей модели получается из (98) и (99),

$$t_{NL}^{(\theta)} = 2.87 h^2. \quad (93)$$

Адиабатические возмущения ζ пропорциональны θ , а именно,

$$\zeta = r \frac{\theta}{\bar{\theta}}, \quad (94)$$

где $\bar{\theta}$ – однородное фоновое значение скалярного поля, и $r \lesssim 1$ – ослабляющий фактор, не зависящий от k ни для курватонного механизма перевода возмущений θ в адиабатические, ни для механизма модулированного распада⁷. Поэтому

⁷Напомним, что мы не учитываем негауссовость, которая может генерироваться во время переработки возмущений. Таким образом, использование линейной связи между ζ и θ оправдано.

в нашей модели величина негауссовости адиабатических возмущений следующая

$$t_{NL} = \frac{\mathcal{P}_\theta}{\mathcal{P}_\zeta} \cdot t_{NL}^{(\theta)} = 2.87 \frac{h^2}{4\pi^2 \mathcal{P}_\zeta} .$$

Так же, как и в инфляционных моделях с такими механизмами переработки возмущений, в нашей модели мы можем получить $t_{NL} \gg 1$. Как уже обсуждалось, никаких модельно независимых ограничений на $\bar{\theta}$ и h нет, так что внутренняя негауссовость, о которой идет речь, вполне может преобладать над негауссовостью, связанной с переходом от возмущений θ к адиабатическим возмущениям, и быть достаточной для экспериментального наблюдения.

Отметим, однако, что в сценарии с конформным скатыванием [26], спектр мощности адиабатических возмущений сам пропорционален h^2 . Причина этого лежит в том, что θ – поле фазы в рассматриваемой модели. С нашей нормировкой его фоновое значение ограничено сверху, это видно из формулы (45),

$$|\bar{\theta}| \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{h} ,$$

и если не предполагать тонкой подстройки, то $|\bar{\theta}| \sim \pi/h$. Формула (94) тогда дает

$$\mathcal{P}_\zeta \geq \frac{r^2 h^2}{8\pi^4} ,$$

так что

$$t_{NL} \leq 2.87 \frac{2\pi^2}{r^2} .$$

Поэтому внутренняя негауссовость может быть значительной только для небольших факторов ослабления r . Если возмущения θ переводятся в адиабатические моды с помощью курватонного механизма, негауссовость, связанная с переходом, большая для малых r , $f_{NL} \sim r^{-1}$ [109, 110, 111, 112], так что ее вклад в триспектр, грубо говоря, одного порядка с внутренней негауссовостью. В этом случае вопрос возможности наблюдения внутренней негауссовости заслуживает отдельного изучения. Это относится и к основной массе моделей модулированного распада, в которых тоже $f_{NL} \sim r^{-1}$ [113, 114]. Есть, однако, исключение [115]: если ширина распадающихся частиц $\Gamma(\theta)$ линейна по θ или имеет

вид $\Gamma(\theta) = (\gamma_0 + \gamma_1\theta)^2$ (что более правдоподобно с точки зрения физики частиц), тогда f_{NL} , g_{NL} будут, грубо говоря, порядка единицы даже для малых $r \sim \gamma_1/\gamma_0$, и, следовательно, больших t_{NL} . В целом можно сказать, что в сценарии с конформным скатыванием доминирование и детектируемость внутренней негауссовости возможно, но только в некоторых случаях.

Теперь перейдем к обсуждению различных форм негауссовости. Чтобы их сравнивать, мы задаем

$$\frac{h^2}{4\pi^2\mathcal{P}_\zeta} = f_{NL} = g_{NL} = 1 ;$$

тогда величины четырехточек во всех моделях схожи.

Мы будем рассматривать различные пределы для функции \mathcal{T} . Мы пользуемся номенклатурой, используемой в [106, 116]. Первые три графика на рис. 2, 3, 4 и 5 показывают: полный триспектр \mathcal{T} , сингулярный вклад \mathcal{T}_s и регулярную часть \mathcal{T}_r в нашей модели, соответственно. Четвертый и пятый графики показывают два локальных триспектра $\mathcal{T}_{\text{loc}1}$ и $\mathcal{T}_{\text{loc}2}$. Отметим, что вертикальные масштабы в последних двух графиках отличаются между собой, и отличаются от вертикального масштаба первых трех графиков. Области определения на этих графиках ограничены различными неравенствами, которым подчиняются импульсы. В частности,

$$k_{12}^2 + k_{14}^2 \leq \sum_{i=1}^4 k_i^2 ,$$

$$\sqrt{k_1^2 + k_4^2 - 2k_1k_4} \leq k_{14} \leq \sqrt{k_1^2 + k_4^2 + 2k_1k_4} .$$

Мы рассматриваем следующие пределы.

1. Равносторонний предел, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$. Мы представляем на графике 2 четырехточку как функцию k_{12}/k_1 и k_{14}/k_1 . Сразу видна особенность $\mathcal{T} \propto k_{12}^{-1}, k_{14}^{-1}$ в нашем триспектре и его сингулярной части, а также сингулярность более высокого порядка $\mathcal{T}_{\text{loc}1} \propto k_{12}^{-3}, k_{14}^{-3}$ в первом локальном триспектре. Как ранее было отмечено, инфляционные модели с одним полем инфлатона имеют триспектр, регулярный в точках $k_{12} \rightarrow 0$ и $k_{14} \rightarrow 0$ [106, 117, 118, 119,

120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 116]. Таким образом, сингулярность, вызванная инфракрасным усилением радиальных мод $\delta\rho$, является отличительной чертой конформных моделей.

2. Специальный планарный предел, $k_1 = k_3 = k_{14}$ и

$$k_{12} = \left[k_1^2 + \frac{k_2 k_4}{2k_1^2} \left(k_2 k_4 + \sqrt{(4k_1^2 - k_2^2)(4k_1^2 - k_4^2)} \right) \right]^{1/2} .$$

Четырехточки на графике 3 показаны как функции k_2/k_1 и k_4/k_1 . Структуры на диагонали опять появляются из-за сингулярности, теперь при $k_{13} \rightarrow 0$, что соответствует $k_2 \rightarrow k_4$. Отметим, что полный триспектр зануляется на границах $k_2 = 0$ и $k_4 = 0$ (это может быть получено аналитически). Последняя черта схожа со многими инфляционными моделями [106, 116], однако отсутствует в $\mathcal{T}_{\text{loc1}}$ в $\mathcal{T}_{\text{loc2}}$.

3. Дважды сжатый предел, $k_3 = k_4 = k_{12}$. На рис. 4 показаны следующие комбинации

$$\frac{\mathcal{T}}{\prod_{i=1}^4 k_i} ,$$

а на рис. 5 сами триспектры \mathcal{T} как функции k_2/k_1 и k_4/k_1 . Очевидно, наш триспектр сильно отличается от локальных в таком пределе.

2.5.6 Четырехточка без приближений

В этом параграфе мы проведем явное вычисление четырехточки. Как ни странно, это можно сделать полностью аналитически.

Вычисления удобнее проводить в терминах симметричных полиномов. В s -канале (диаграмма на рис. 6) это следующие комбинации

$$K_1 = k_1 + k_2 , \quad K_2 = k_1 k_2 , \quad P_1 = k_3 + k_4 , \quad P_2 = k_3 k_4 .$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующие обозначения

$$Z_{K_1, K_2} = K_1(3K_1^2 - 12K_2 - k_{12}^2) , \quad X_{K_1, K_2} = k_{12}^4 + 2k_{12}^2(K_1^2 - 2K_2) + 12K_1^2 K_2 - 3K_1^4 .$$

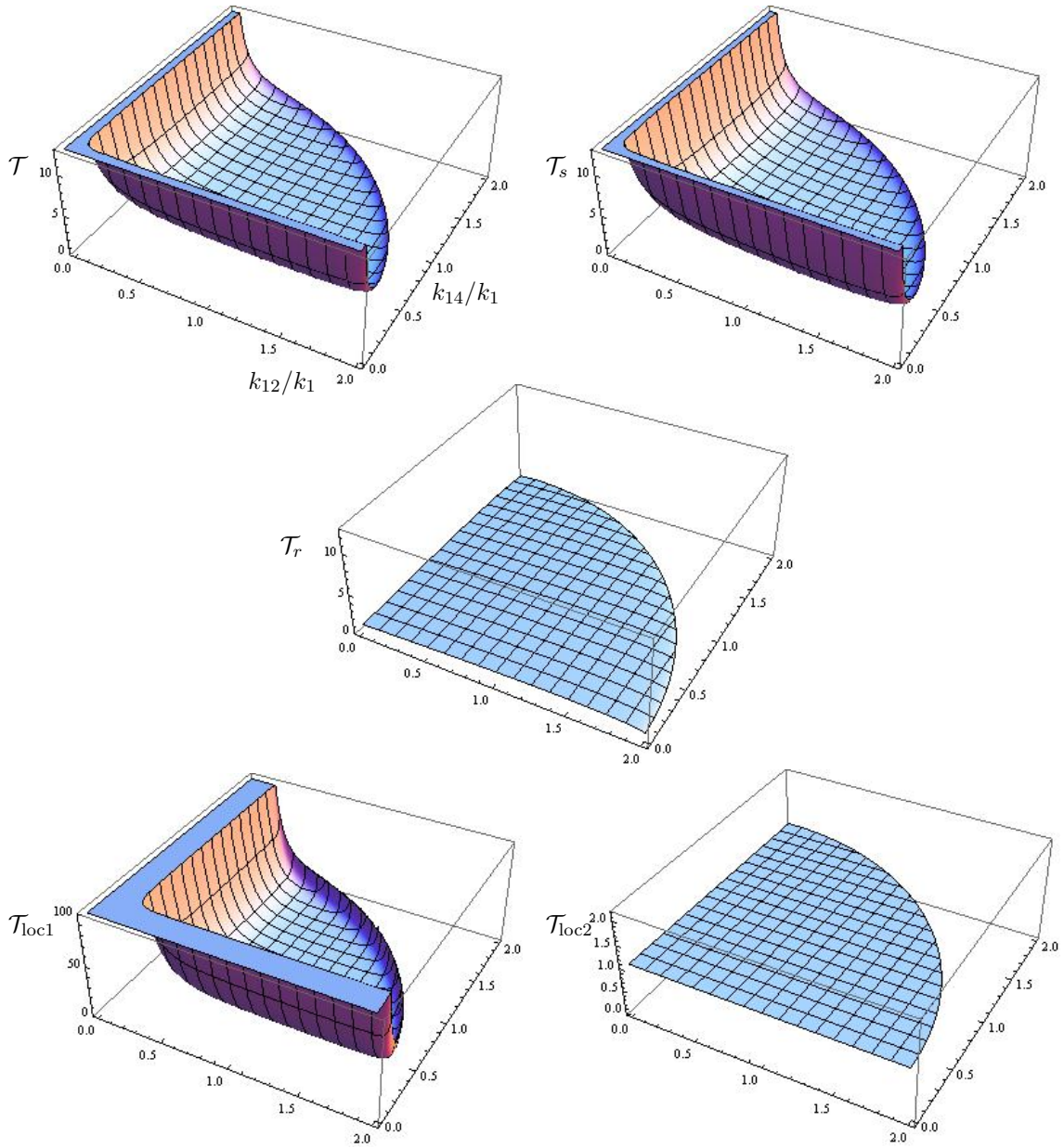


Рис. 2: Полный триспектр \mathcal{T} (верхний левый график), его сингулярная часть \mathcal{T}_s (верхний правый график), его регулярная часть \mathcal{T}_r (центральный график), триспектр локального вида $\mathcal{T}_{\text{loc1}}$ (нижний левый график) и другой триспектр локального вида $\mathcal{T}_{\text{loc2}}$ (нижний правый график) в *равностороннем пределе*. Определения даны в параграфе 2.5.5. Напомним, что вертикальные масштабы совпадают между собой только на нижних двух графиках.

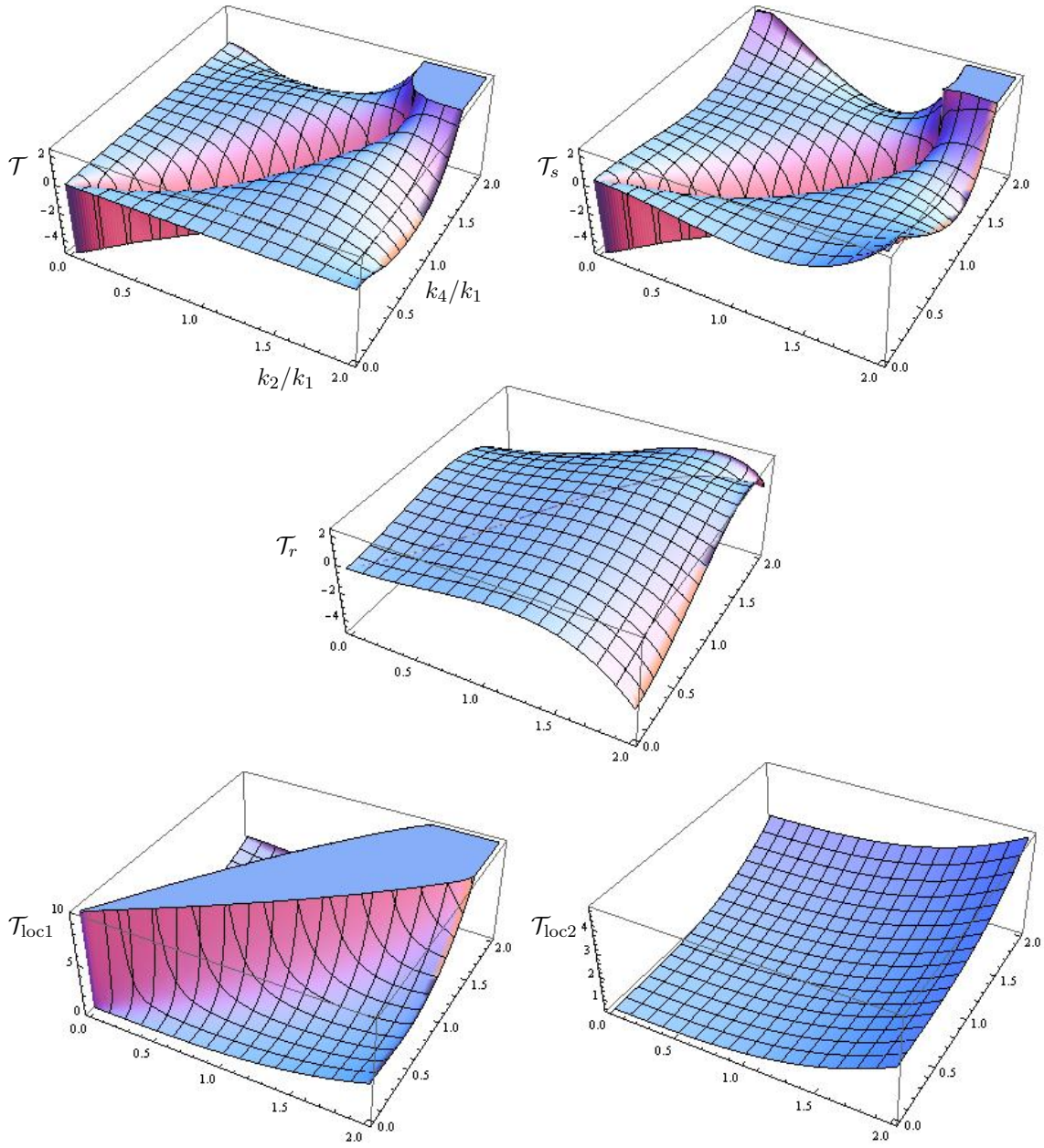


Рис. 3: Те же графики, что и на рис. 2, но в *специальном планарном пределе*.

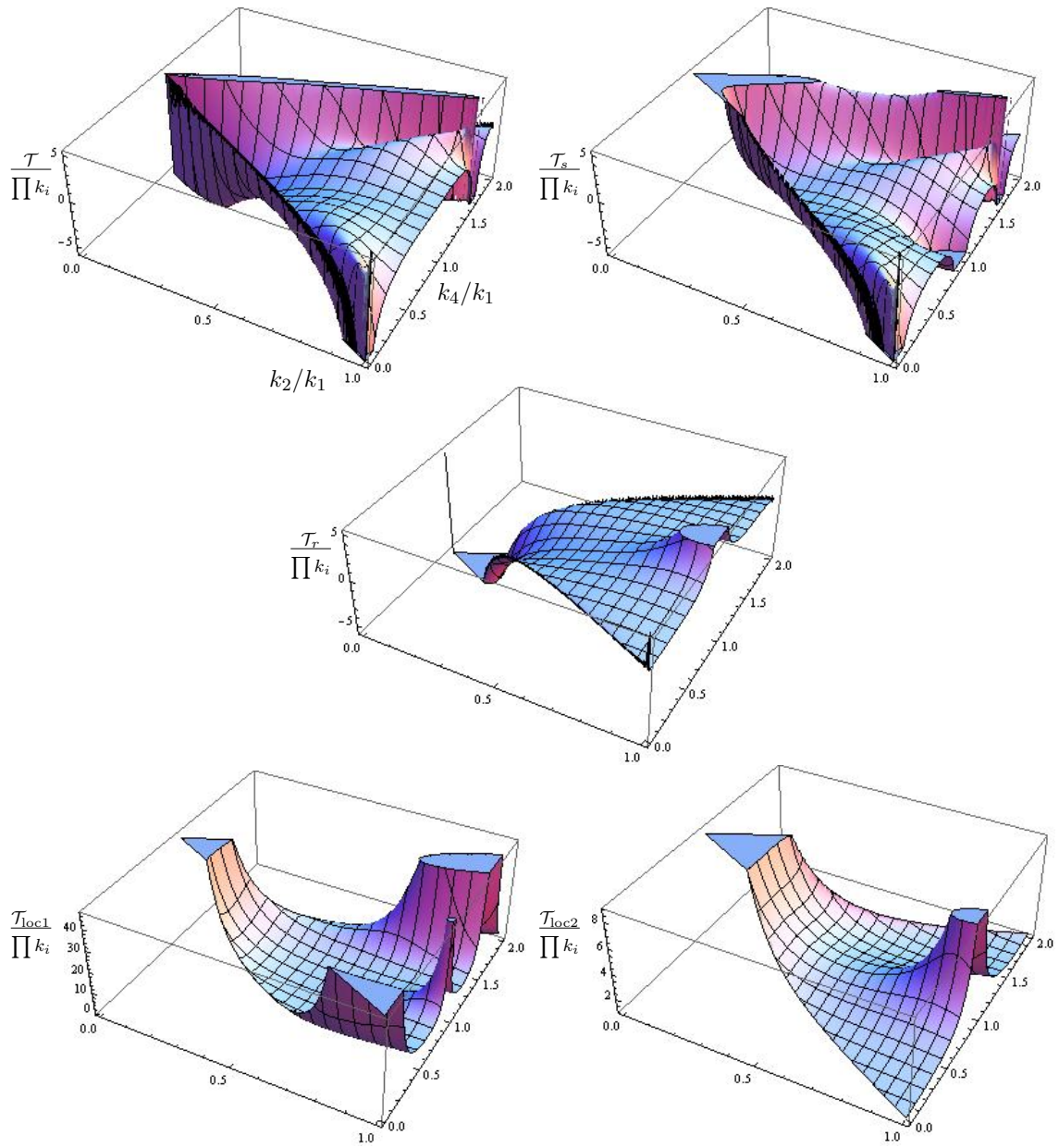


Рис. 4: *Дважды сжатый предел*. Показаны комбинации $\mathcal{T}/(\prod_{i=1}^4 k_i)$ для тех же триспектров, что и на рис. 2.

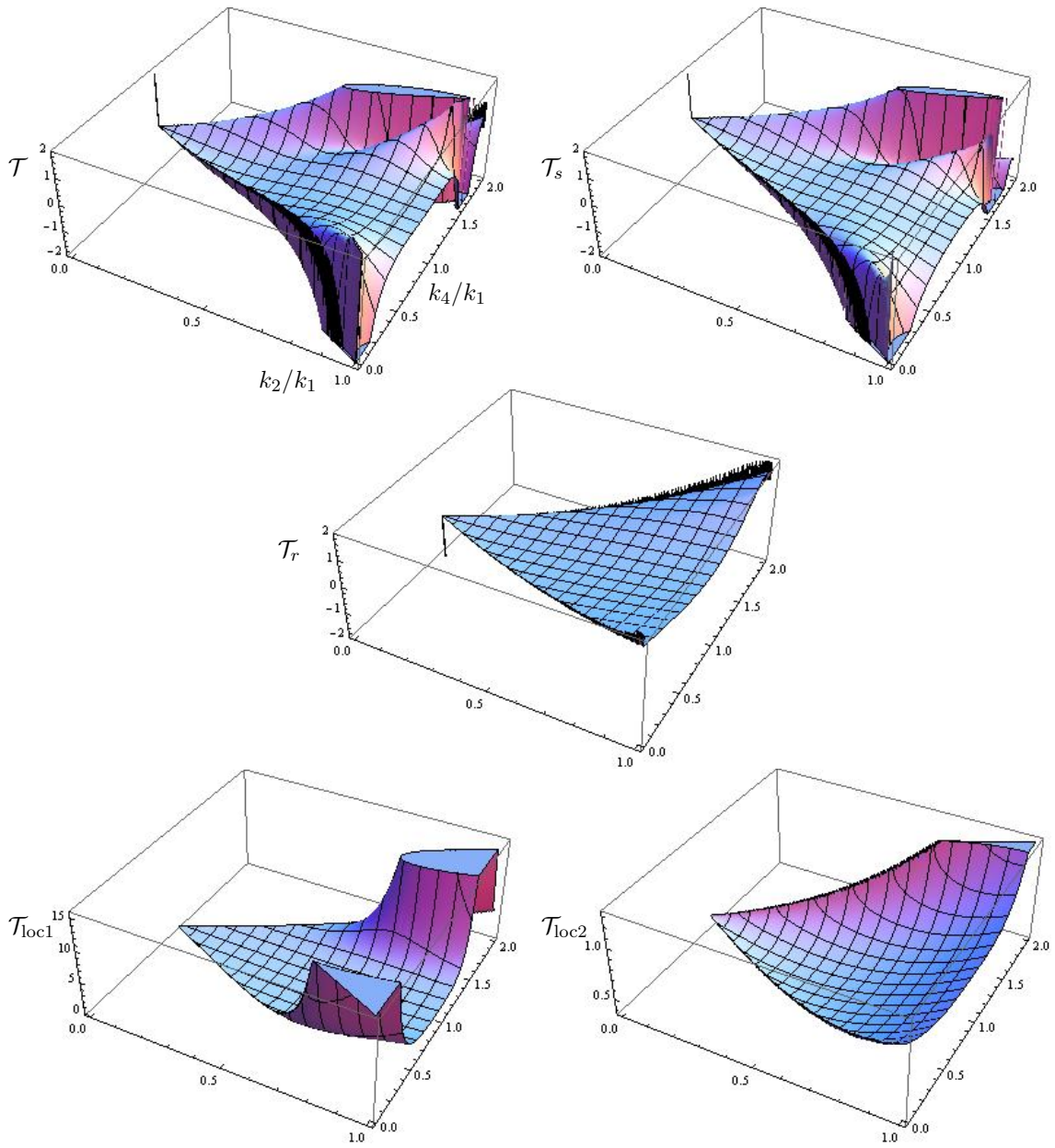


Рис. 5: Дважды сжатый предел. То же, что и на рис. 4, но для самих триспектров \mathcal{T} .

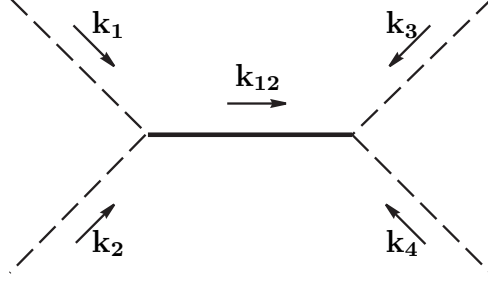


Рис. 6: s -канальный вклад в триспектр. Пунктирная и сплошная линии отвечают двухточечным функциям полей θ и $\delta\rho$, соответственно.

В этих терминах выражения (72) и (73) переписываются:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= [K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2 - K_2(K_1^2 - k_{12}^2)\xi^2] \cos(K_1\xi) \\ &+ K_1(K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2)\xi \sin(K_1\xi) , \\ \tilde{Q} &= [K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2 - K_2(K_1^2 - k_{12}^2)\xi^2] \sin(K_1\xi) \\ &- K_1(K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2)\xi \cos(K_1\xi) .\end{aligned}$$

Члены (67) дают следующий вклад в четырехточечную функцию:

$$G_{4\ T\bar{T}} = \frac{h^2}{4} \frac{\pi}{32} \left[\mathcal{U}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) + 2 \text{ permutations} \right] ,$$

$$\prod_{i=1}^4 k_i^3$$

где, в очевидных обозначениях,

$$\mathcal{U}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) = \frac{32}{\pi} \int_0^\infty d\xi U(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}; \xi)$$

и

$$\begin{aligned}U(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}; \xi) &= \int_0^\xi \frac{d\chi}{\sqrt{\xi\chi}} \left(J_{5/2}(k_{12}\xi) Y_{5/2}(k_{12}\chi) - Y_{5/2}(k_{12}\xi) J_{5/2}(k_{12}\chi) \right) \\ &\times \left(\tilde{Q}_{k_1, k_2, k_{12}}(\xi) \tilde{R}_{k_3, k_4, k_{12}}(\chi) + \tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi) \tilde{R}_{k_1, k_2, k_{12}}(\chi) \right) .\end{aligned}$$

Прямое вычисление последнего интеграла дает

$$U = U_0 + U_I ,$$

где

$$U_0 = \frac{\tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi)}{2\pi k_{12}^5 \xi^3} (2k_{12}^3 \xi \cos(K_1 \xi) (2K_2 k_{12}^2 \xi^2 - 3(K_1^2 - 4K_2 + k_{12}^2)) - 2K_1 k_{12} \sin(K_1 \xi) (2k_{12}^4 \xi^2 + 3k_{12}^2 + 36K_2 - 9K_1^2)) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}, \quad (95)$$

$$U_I = \frac{\tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi) X_{K_1, K_2}}{2\pi k_{12}^5 \xi^3} \left([(k_{12}^2 \xi^2 - 3) \sin(k_{12} \xi) + 3k_{12} \xi \cos(k_{12} \xi)] \times [\text{Ci}((K_1 - k_{12})\xi) + \text{Ci}((K_1 + k_{12})\xi)] + [(k_{12}^2 \xi^2 - 3) \cos(k_{12} \xi) - 3k_{12} \xi \sin(k_{12} \xi)] \times [\text{Si}((K_1 - k_{12})\xi) - \text{Si}((K_1 + k_{12})\xi)] \right) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\} .$$

Отметим, что U_0 содержит только тригонометрические функции и степени ξ . Таким образом, интегрирование U_0 по ξ громоздкое, но простое⁸. С другой стороны, U_I включает интегральный косинус и синус (Ci и Si), так что его интегрирование нетривиально. Последнее интегрирование мы проводим, используя интегральное представление функций Si и Ci и изменяя порядок интегрирова-

⁸В точке $\xi \rightarrow 0$ исходный интеграл сходится. Тем не менее, некоторые отдельные члены могут давать расходимости (например, U_0 содержит $\cos(K_1 \xi)/\xi$). Чтобы регуляризовать эти расходимости, мы интегрируем по ξ от $\alpha > 0$ и берем предел $\alpha \rightarrow 0$ в конце вычисления.

ния, то есть мы сначала интегрируем по ξ , а потом по χ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_I &= \frac{32}{\pi} \int_0^\infty d\xi U_I(\xi) \\
&= \frac{32}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\cos(K_1\chi) d\chi}{\chi} \int_0^\chi d\xi \frac{\tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi) X_{K_1, K_2}}{k_{12}^5 \xi^3} \\
&\quad \times \left([(3 - k_{12}^2 \xi^2) \sin(k_{12}\xi) - 3k_{12}\xi \cos(k_{12}\xi)] \cos(k_{12}\chi) \right. \\
&\quad \left. - [(3 - k_{12}^2 \xi^2) \cos(k_{12}\xi) + 3k_{12}\xi \sin(k_{12}\xi)] \sin(k_{12}\chi) \right) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\} \\
&= \mathcal{U}_{I0} + \mathcal{U}_{II}.
\end{aligned}$$

Внутреннее интегрирование по ξ трудоемкое, но снова простое. Оно дает два вида вкладов: первый не содержит интегральных синусов и косинусов,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{I0} &= \frac{16X_{K_1, K_2}}{\pi^2 k_{12}^4} \int_0^\infty \frac{\cos(K_1\chi) d\chi}{\chi^2} (2P_1(k_{12}^2 - 3P_2)\chi \cos(P_1\chi) + \\
&\quad + P_1(k_{12}^2 + 12P_2 - 3P_1^2)\chi \cos(k_{12}\chi) \\
&\quad + [3P_1^2 - 6P_2 - k_{12}^2(3 - 2P_2\chi^2)] \sin(P_1\chi) \Big) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}, \quad (96)
\end{aligned}$$

а второй содержит Si и Ci в подинтегральном выражении,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{II} &= \frac{8X_{K_1, K_2} X_{P_1, P_2}}{\pi^2 k_{12}^5} \int_0^\infty \frac{\cos(K_1\chi) d\chi}{\chi} \left(\cos(k_{12}\chi) \left[\text{Ci}((P_1 + k_{12})\chi) - \text{Ci}((P_1 - k_{12})\chi) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \log\left(\frac{P_1 + k_{12}}{P_1 - k_{12}}\right) \right] + \sin(k_{12}\chi) [\text{Si}((P_1 + k_{12})\chi) + \text{Si}((P_1 - k_{12})\chi)] \right) + \\
&\quad + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}. \quad (97)
\end{aligned}$$

Тем не менее, оба эти интеграла могут быть вычислены аналитически, соответ-

ствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} S_i(a, b, c) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} dx e^{-\epsilon x} \frac{\sin(ax) \text{Si}(bx)}{x} + \{b \rightarrow c\} \\ &= \frac{1}{4} [\Theta(b-a) L_2^*(b/a) + \Theta(a-b) L_2(b/a) - 2L_2(-b/a) + L_2(b/a)] + \{b \rightarrow c\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i(a, b, c) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} dx e^{-\epsilon x} \frac{\cos(ax) [\text{Ci}(bx) - \text{Ci}(cx) - \log(b/c)]}{x} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \log\left(\frac{b^2}{c^2}\right) \log\left(\frac{(ia)^2}{bc}\right) + L_2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - L_2\left(\frac{a^2}{b^2}\right) - L_2\left(\frac{c^2}{a^2}\right) + L_2\left(\frac{a^2}{c^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

где L_2 – функция дилогарифм. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{8\pi k_{12}^4} \left(Z_{k_1, k_2} X_{k_3, k_4} \log \left[\frac{(P_1^2 - k_{12}^2)^2}{(K_1 + P_1)^4} \right] + Z_{k_3, k_4} X_{k_1, k_2} \log \left[\frac{(K_1^2 - k_{12}^2)^2}{(K_1 + P_1)^4} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_{12}^2}{(K_1 + P_1)^3} [\mathcal{G}_2 + k_{12}^2 \mathcal{G}_4 + k_{12}^4 \mathcal{G}_6] \right) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi k_{12}^5} X_{k_1, k_2} X_{k_3, k_4} \left[C_i(K_1 + k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) + C_i(K_1 - k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) \right. \\ &\quad \left. + S_i(K_1 + k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) - S_i(K_1 - k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\} \right]. \end{aligned}$$

Первые две строчки возникают из интегрирования U_0 , формулы (95), и из (96), а остальное – из (97). Используются следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -12(K_1 + P_1)^4 (K_1^2 - 4K_2)(P_1^2 - 4P_2), \\ \mathcal{G}_4(k_1, k_2, k_3, k_4) &= 32K_2 P_2 (K_1^2 + K_1 P_1 + P_1^2) \\ &\quad - 16P_2 (K_1 + P_1) (K_1^3 + 2K_1^2 P_1 - 3K_1 P_1^2 - 3P_1^3) \\ &\quad - 16K_2 (K_1 + P_1) (P_1^3 + 2P_1^2 K_1 - 3P_1 K_1^2 - 3K_1^3) \\ &\quad - 4(K_1 + P_1)^2 (3K_1^4 - 2K_1^2 P_1^2 + 3P_1^4), \\ \mathcal{G}_6(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -32K_2 P_2 - 16(K_1 + P_1) [K_2(K_1 + 2P_1) + P_2(P_1 + 2K_1)] \\ &\quad + 4(K_1 + P_1)^2 (3K_1^2 + 2K_1 P_1 + 3P_1^2). \end{aligned}$$

Мы добавляем часть из (64), которая отвечает s -канальной диаграмме на рис. 6 и дается выражением (77), и получаем полный вклад s -канальной диаграммы:

$$S(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) = \frac{h^2}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} \frac{\pi}{32} \left[\mathcal{Y}(k_1, k_2, k_{12}) \mathcal{Y}(k_3, k_4, k_{12}) + \mathcal{J}(k_1, k_2, k_{12}) \mathcal{J}(k_3, k_4, k_{12}) + \mathcal{U}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) \right]. \quad (98)$$

Вместе с перекрестными членами это дает окончательный результат

$$G_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{h^2}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} \mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14}) = S(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) + S(k_1, k_3, k_2, k_4, k_{13}) + S(k_1, k_4, k_3, k_2, k_{14}). \quad (99)$$

Исследование этой формулы приведено в разделе 2.5.5.

3 Псевдоконформная модель

3.1 Классическое решение

Теперь перейдем к рассмотрению псевдоконформной модели. Напомним, мы рассматриваем следующее действие для скалярного поля:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \right], \quad (100)$$

Начнем с решений классических уравнений поля. Эволюция однородной Вселенной описывается уравнением для поля ϕ

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \lambda\phi^3 \quad (101)$$

и уравнением Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left(\frac{1}{2} |\dot{\phi}|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \right). \quad (102)$$

На ранних временах мы пренебрегаем хаббловским трением в первом уравнении и пишем

$$\ddot{\phi} = \lambda\phi^3 . \quad (103)$$

В этом случае плотность энергии во Вселенной пренебрежимо мала, $E = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4} = 0$, а однородное решение выглядит следующим образом

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}(t_{**} - t)} . \quad (104)$$

Поскольку при подстановке ϕ во второе уравнение мы получаем нуль (H^2 пропорционален плотности энергии во Вселенной), мы используем другое уравнение для нахождения H . Параметр Хаббла и масштабный фактор мы находим из уравнения

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx 2\dot{H} = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \left(\frac{|\dot{\phi}|^2}{2} + \frac{\lambda|\phi|^4}{4}\right) . \quad (105)$$

На самом деле можно было использовать стандартное уравнение Фридмана, но рассмотреть следующий порядок по M_{pl}^{-2} . Технически удобнее использовать уравнение с давлением. Итак, мы находим параметр Хаббла:

$$H = -\frac{8\pi}{3\lambda M_{pl}^2} \frac{1}{(t_{**} - t)^3} . \quad (106)$$

Это поведение отвечает уравнению состояния

$$\frac{p}{\rho} \rightarrow \infty . \quad (107)$$

Из уравнения (106) мы находим масштабный фактор

$$a = a_{**} \left(1 - \frac{4\pi}{3\lambda M_{pl}^2} \frac{1}{(t_{**} - t)^2}\right) . \quad (108)$$

Таким образом, на ранних временах мы получили экпиротический режим медленного сжатия. Наше приближение работает до тех пор, пока второй член много меньше первого, т.е. $(t_{**} - t)^2 \gg \frac{4\pi}{3\lambda M_{pl}^2}$.

Теперь рассмотрим решение на поздних временах. Мы решим уравнение движения и уравнение Фридмана, пренебрегая потенциалом, но оставляя хаббловское трение:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0, \quad (109)$$

$$H = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}M_{pl}}\dot{\phi}. \quad (110)$$

Подставляя H в первое уравнение, получаем:

$$\ddot{\phi} = \frac{\sqrt{12\pi}}{M_{pl}}\dot{\phi}^2. \quad (111)$$

Его решением будет

$$\phi = -\frac{M_{pl}}{\sqrt{12\pi}} \ln(\mu(t_* - t)). \quad (112)$$

Мы, действительно, видим, что потенциал удовлетворяет условиям малости $\lambda\phi^4 \ll \dot{\phi}^2$ и $\lambda\phi^3 \ll \ddot{\phi}$, поскольку ϕ – логарифмическая функция, а $\dot{\phi}$ и $\ddot{\phi}$ – степенные. Здесь μ – независимый параметр, который не может быть определен из системы (109), (110). Зная поведение ϕ , мы находим следующее решение для H :

$$H = -\frac{1}{3(t_* - t)}. \quad (113)$$

Это поведение отвечает уравнению состояния

$$p = \rho. \quad (114)$$

Из (113) мы определяем масштабный фактор:

$$a = a'_*(t_* - t)^{\frac{1}{3}} = a_*(\eta_* - \eta)^{\frac{1}{2}}. \quad (115)$$

Теперь мы должны сшить два режима, чтобы определить коэффициенты. Предполагается, что первый (108) и второй (115) режимы сшиваются в точке, где потенциал того же порядка, что и хаббловское трение (это время мы обозначим как t_L):

$$\lambda\phi^3 = 3H\dot{\phi}. \quad (116)$$

В это уравнение мы подставляем решение для ϕ . При этом мы можем использовать любое из решений (ϕ на ранних временах, или на поздних), поскольку и поле ϕ , и его производная $\dot{\phi}$ сами должны быть сшиты в этой точке. Условия сшивки выглядят следующим образом:

$$\phi : \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}(t_{**} - t_L)} = -\frac{M_{pl}}{\sqrt{12\pi}} \ln(\mu(t_* - t_L)) , \quad (117)$$

$$\dot{\phi} : \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}(t_{**} - t_L)^2} = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{M_{pl}}{t_* - t_L} . \quad (118)$$

Кроме того, мы, разумеется, будем требовать сшивки решений для H и a :

$$H : \quad \frac{1}{3(t_* - t_L)} = \frac{8\pi}{3\lambda M_{pl}^2(t_{**} - t_L)^3} , \quad (119)$$

$$a : \quad a_{**} = a'_*(t_* - t_L)^{\frac{1}{3}} . \quad (120)$$

Эти уравнения позволяют выразить все параметры через один, например через a_* .

$$a_{**} = \left(\frac{a_*^2}{M_{pl}\sqrt{\lambda}} \right)^{\frac{1}{3}} , \quad (121)$$

$$\eta_* = \left(\frac{a_{**}}{a_*} \right)^2 , \quad (122)$$

$$t_{**} - t_L = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{\lambda}M_{pl}} . \quad (123)$$

Теперь перейдем к численному решению уравнений: решим систему (101), (102) и изучим ее асимптотики. Это является необходимой проверкой, поскольку мы, на самом деле, не знаем, связаны ли два найденных решения между собой. Действительно, система (101), (102) нелинейна, а значит, может иметь несколько решений. Могло бы случиться, что найденное решение первого режима на поздних временах переходит в неизвестное другое решение.

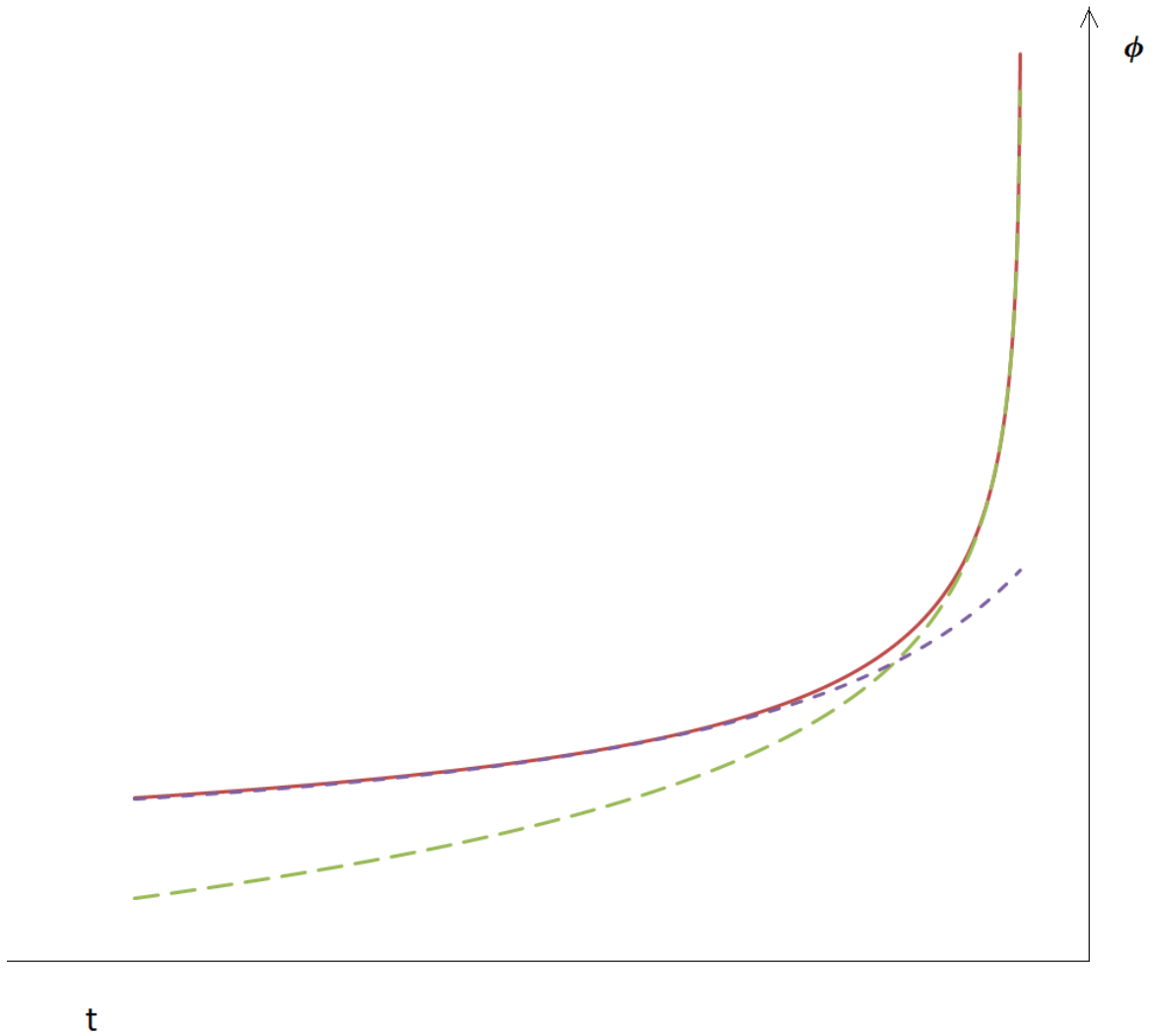


Рис. 7: **Численное решение.** Пунктир – это $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(t_{**}-t)}}$. Длинный пунктир – это $-\frac{M_{pl}}{\sqrt{12\pi}} \ln(\mu(t_* - t))$. Сплошная линия – численный результат.

Численное решение системы (101), (102) приведено на рис. 7. Изучая две его асимптотики, мы приходим к выводу, что были правы: первое найденное решение $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(t_{**}-t)}}$ переходит во второе $-\frac{M_{pl}}{\sqrt{12}\pi} \ln(\mu(t_* - t))$.

Теперь нам надо выразить a_* через физические величины. Как уже упоминалось, мы будем работать в приближении мгновенного разогрева. Используя уравнение Фридмана для горячей (радиационно-доминированной) стадии, во время разогрева получим

$$|H_c| = \frac{T_{reh}^2}{M_{pl}^*}. \quad (124)$$

Запишем еще закон сохранения энтропии в сопутствующем объеме

$$\frac{a_c}{a_0} = \frac{T_0}{T_{reh}} \left(\frac{g_{*0}}{g_{*reh}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (125)$$

Индекс 0 здесь отвечает произвольному моменту на горячей стадии (радиационно-доминированной), а индекс c – моменту отскока. g_* – количество эффективных степеней свободы в соответствующий момент времени. Перед отскоком параметр Хаббла равен

$$H_c = -\frac{1}{2a_*(\eta_* - \eta_c)^{\frac{3}{2}}}. \quad (126)$$

Мы считаем, что $|H_c|$ одинаков до и после отскока, и сразу после отскока реализуется горячая стадия. Сравнивая формулы (124) и (126), получаем (a_c мы берем из уравнения (115))

$$\frac{T_{reh}^2}{M_{pl}^*} = \frac{1}{2a_*(\eta_* - \eta_c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a_c(\eta_* - \eta_c)} \quad (127)$$

и выражаем конформное время

$$\eta_* - \eta_c = \frac{1}{2a_c} \frac{M_{pl}^*}{T_{reh}^2} = \frac{M_{pl}^* g_{*reh}^{\frac{1}{3}}}{2a_0 T_0 T_{reh} g_{*0}^{\frac{1}{3}}}. \quad (128)$$

После подстановки a_c в (125) получаем следующее выражение:

$$\frac{a_*(\eta_* - \eta_c)^{\frac{1}{2}}}{a_0} = \frac{T_0 g_{*0}^{\frac{1}{3}}}{T_{reh} g_{*reh}^{\frac{1}{3}}}, \quad (129)$$

и, подставляя конформное время, получаем

$$a_* = a_0 \frac{T_0}{T_{reh}} \left(\frac{2a_0 T_0 T_{reh}}{M_{pl}} \frac{1.66 g_{*0}}{\sqrt{g_{*reh}}} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (130)$$

Коэффициент a_{**} , после выражения через физические величины, выглядит следующим образом:

$$a_{**} = \left(\frac{2a_0^3 T_0^3}{T_{reh} M_{pl}^2 \sqrt{\lambda}} \left(\frac{1.66 g_{*0}}{\sqrt{g_{*reh}}} \right) \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (131)$$

Теперь перейдем к обсуждению гравитационных возмущений.

3.2 Гравитационные возмущения

Тензорные моды, к изучению которых мы сейчас приступим, удовлетворяют стандартному уравнению, такому же, как и свободное скалярное поле. Это уравнение имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{k^2}{a^2}\varphi = 0 , \quad (132)$$

или, после перехода к конформному времени:

$$\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\varphi' + k^2\varphi = 0 . \quad (133)$$

Упростим это уравнение, сделав замену $\varphi = \frac{\chi}{a}$:

$$\chi'' - \frac{a''}{a}\chi + \frac{k^2}{a^2}\chi = 0 , \quad (134)$$

где $\varphi = \sqrt{\frac{M_{pl}^2}{32\pi}}h$, учитывая различие в нормировке между канонически нормированным скалярным полем и амплитудой тензорных возмущений.

Мы снова рассматриваем два режима: ранние времена, на которых масштабный фактор a практически постоянный; и поздние времена, на которых он меняется как $a \propto (t_* - t)^{\frac{1}{3}}$. Как мы знаем, характер эволюции любой моды зависит от момента времени, когда она выходит за горизонт, а значит, от импульса моды.

Рассмотрим вначале возмущение с малым импульсом, которое пересекает горизонт на ранних временах. Напомним, что масштабный фактор в это время эволюционирует следующим образом:

$$a \approx a_{**} \left(1 - \frac{c}{(\eta_{**} - \eta)^2} \right) \quad c = \frac{4\pi}{3\lambda M_{pl}^2 a_{**}^2}. \quad (135)$$

Малость импульса означает, что во время всей эволюции под горизонтом и во время выхода за горизонт реализуется именно такое поведение масштабного фактора. Используя условие пересечения горизонта $\frac{k}{a} \sim H$ и условие применимости приближения, мы получаем следующее ограничение на импульсы:

$$k \ll \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda} M_{pl} a_{**} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} M_{pl}^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}} a_{**}^{\frac{2}{3}}. \quad (136)$$

Для таких импульсов уравнение имеет вид

$$\chi'' + \frac{6c}{(\eta_{**} - \eta)^4} \chi + k^2 \chi = 0. \quad (137)$$

Это уравнение не решается в явном виде. Поэтому нам придется использовать теорию возмущений. Асимптотикой при больших $-\eta$ должна быть обычная волна $\chi^{(\pm)} = e^{\pm ik\eta}$. На поздних временах, после выхода за горизонт, но до включения второго режима, асимптотика решения будет следующей:

$$\varphi = C_1 + C_2 \int_{t_X}^t \frac{dt}{a^3} = C_1 + \frac{C_2}{a_{**}^2} \left(\eta - \frac{2c}{\eta} \right), \quad \chi = \varphi \cdot a = C_1 a_{**} \left(1 - \frac{c}{\eta^2} \right) + \frac{C_2}{a_{**}} \left(\eta - \frac{3c}{\eta} \right), \quad (138)$$

где t_X – время пересечения горизонта. Задача теперь состоит в том, чтобы сшить эти две асимптотики, чтобы найти $\chi^{(+)}$ и $\chi^{(-)}$ после пересечения горизонта.

Для этого уравнение (137) мы будем решать по теории возмущений, разлагая вокруг точки пересечения горизонта. В первом режиме, а мы именно его сейчас рассматриваем, имеется условие: $\frac{c}{\eta^2} \ll 1$, причем момент пересечения горизонта соответствует равенству двух членов в (137): $k^2 = \frac{6c}{\eta^4}$. Получаем, что вблизи

этой точки должно выполняться условие $k^2\eta^2 \sim \frac{c}{\eta^2} \ll 1$. Мы находим решение в виде ряда по двум малым параметрам: $\frac{c}{\eta^2} \ll 1$ и $k^2\eta^2 \ll 1$. Общее решение имеет вид $\chi = C_1\chi_{(1)} + C_2\chi_{(2)}$, где

$$\begin{aligned}\chi_{(1)} &= 1 - \frac{c}{\eta^2} - \alpha_1 k^2 \eta^2 + \tilde{\alpha}_1 \frac{c^2}{\eta^4} + \beta_1 k^2 \eta^2 \frac{c}{\eta^2} \ln(\eta) + \gamma_1 k^4 \eta^4 + \dots, \\ \chi_{(2)} &= \eta - \frac{\alpha_2 c}{\eta} - \beta_2 k^2 \eta^3 + \tilde{\alpha}_2 \frac{c^2}{\eta^3} + \tilde{\beta}_2 k^2 c \eta \ln(\eta) + \gamma_2 k^4 \eta^5.\end{aligned}\quad (139)$$

Теперь мы подставляем это разложение в (137) и получаем в первом порядке, что $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$. Теперь в пределе $\frac{c}{\eta^2} \ll k^2\eta^2 \ll 1$ видно, что $\chi_{(1)} \rightarrow \cos(k\eta)$, а $\chi_{(2)} \rightarrow \frac{\sin(k\eta)}{k}$. А поскольку мы знаем, что $\chi^{(+)} \sim e^{ik\eta}$, решение можно переписать через $\chi_{(1)}$ и $\chi_{(2)}$:

$$\chi^{(+)} = \chi_{(1)} + ik\chi_{(2)}. \quad (140)$$

Теперь, устремив $k^2\eta^2$ к нулю и используя $k^2\eta^2 \ll \frac{c}{\eta^2} \ll 1$, мы должны получить решение (138):

$$\chi^{(+)} = C_1 a_{**} \chi_{(1)} + \frac{C_2}{a_{**}} \chi_{(2)}. \quad (141)$$

Поэтому, $C_1 = \frac{1}{a_{**}}$, $C_2 = ika_{**}$, и общее решение (даже после смены классического режима) будет следующим:

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{a_{**}} + ika_{**} \int_{\eta x}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2(\eta)}. \quad (142)$$

Сделаем проверку: решим уравнение (137) в пределе $\frac{c}{\eta^2} \ll 1$ явно.

$$\chi = e^{ik\eta}(1 + f(\eta, k)) \quad f \ll 1. \quad (143)$$

Это выражением мы подставляем в (137):

$$f'' + 2ikf' + \frac{6c}{\eta^4}(1 + f) = 0, \quad (144)$$

причем в первом порядке пренебрегаем f :

$$u' + 2iku + \frac{6c}{\eta^4} = 0, \quad (145)$$

здесь $u = f'$. Решение этого уравнения будет следующим:

$$f = \int_{-\infty}^{\eta} e^{-2ik\eta'} \int_{-\infty}^{\eta'} -\frac{6c}{\eta'^4} e^{2ik\eta''} d\eta'' d\eta'. \quad (146)$$

Изменяя порядок интегрирования, берем интеграл явно.

$$f = \int_{-\infty}^{\eta} -\frac{6c}{\eta'^4} e^{2ik\eta''} \int_{\eta''}^{\eta} e^{-2ik\eta'} d\eta' d\eta'' = \int_{-\infty}^{\eta} \left(-\frac{6c}{\eta'^4} \right) \left(e^{-2ik(\eta-\eta')} - 1 \right) d\eta', \quad (147)$$

интегрируя три раза по частям, получаем ответ:

$$-\frac{c}{\eta^2} - \frac{2ikc}{\eta} + \int_{-\infty}^{\eta} \frac{c}{\eta'} e^{-2ik(\eta-\eta')} (2ik)^2 d\eta'. \quad (148)$$

Следовательно, в пределе $k\eta \ll 1$

$$\chi = e^{ik\eta} \left(1 - \frac{c}{\eta^2} - \frac{2ikc}{\eta} + \dots \right) = 1 - \frac{c}{\eta^2} - \frac{2ikc}{\eta} + ik\eta - ik\frac{c}{\eta} + \dots. \quad (149)$$

Мы, действительно, получили такой же ответ, как и в (139). Сшивая теперь два решения вместе

$$\chi = \varphi \cdot a = 1 - \frac{c}{\eta^2} + ik\eta - 3\frac{ikc}{\eta} = \left(C_1 + \frac{C_2}{a_{**}^2} \eta - 2\frac{C_2}{a_{**}^2} \frac{c}{\eta} \right) \left(1 - \frac{c}{\eta^2} \right) a_{**}, \quad (150)$$

мы определяем в первом порядке коэффициенты $C_1 = 1$ и $C_2 = ik$. Итак,

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{a_{**}} + ik a_{**} \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2(\eta)}, \quad \chi^{(+)} = \varphi^{(+)} \cdot a(\eta), \quad (151)$$

что подтверждает (142). В результате, с учетом нормировки, решение будет следующим:

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2k}} \left(\frac{1}{a_{**}} + ik a_{**} \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \right). \quad (152)$$

В пределе малых η (то есть уже во втором режиме) выражение для поля следующее

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2k}} \left(\frac{1}{a_{**}} + ika_{**} \left[\frac{\sqrt[4]{\frac{6c}{k^2}}}{a_{**}^2} - \frac{t_{**} - t_L}{a_{**}^3} + \frac{2c}{a_{**}(t_{**} - t_L)} - \frac{2c}{a_{**}^2\sqrt[4]{\frac{6c}{k^2}}} - \frac{1}{a_*^2} \ln\left(\frac{\eta_* - \eta}{\eta_*}\right) \right] \right).$$

Учитывая уравнения (121-123) (условия шивки) и условие малости импульса в первом режиме (136), основной вклад дает первый, константный член:

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2k}} \left(\frac{M_{pl}\sqrt{\lambda}}{a_*^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Получаем, что спектр мощности приближенно равен

$$P_\varphi(k) \approx \frac{1}{2ka_{**}^2} = \frac{1}{2k} \left(\frac{M_{pl}\sqrt{\lambda}}{a_*^2} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (153)$$

где

$$\langle \varphi(x, t)\varphi(x, t) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\varphi(k), \quad \mathcal{P}_\varphi = \frac{k^3 P_\varphi(k)}{2\pi^2}. \quad (154)$$

Теперь вспомним, что мы имеем дело с тензорными модами, и поменяем нормировку:

$$P_h = P_\varphi \frac{32\pi}{M_{pl}^2} = \frac{16\pi}{k} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{M_{pl}^2 a_*^2} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (155)$$

Выразим спектр мощности через физические величины. Для этого мы используем приближение мгновенного разогрева (130). Получим для спектра следующее выражение

$$P_h = \frac{2^{\frac{1}{3}} 8\pi T_{reh}^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}}}{M_{pl}^{\frac{2}{3}} a_0^2 T_0^2 k} \left(\frac{\sqrt{g_{*reh}}}{1.66g_{*0}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (156)$$

Заметим, что P_h не зависит от выбора момента времени t_0 , как и должно быть, поскольку величина $a_0 T_0 g_{*0}^{\frac{1}{3}}$ сохраняется.

Теперь поставим ограничения на параметры теории, исходя пока только из первого режима. Будем использовать условие из первичного нуклеосинтеза:

предполагаем, что дополнительное количество релятивистских степеней свободы – это на самом деле гравитоны. Мы используем известные ограничения на плотность энергии релятивистской материи, а также выражение для энергии через спектр мощности [131, 132]:

$$\rho_\Gamma < \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (157)$$

$$\rho_\Gamma = \int \frac{k^2}{a^2} \langle \varphi^2(k) \rangle d^3k = \int \frac{k^2}{a_0^2} P_\varphi(k) \left(\frac{a_X}{a_0} \right)^2 \left(\frac{g_{*0}}{g_{*X}} \right)^{\frac{1}{3}} d^3k. \quad (158)$$

Индекс здесь 0 отвечает моменту нуклеосинтеза, а индекс X – моменту, когда соответствующая мода входит под горизонт. Пересечение горизонта, как обычно, означает равенство $H = \frac{k}{a}$ (k – импульс моды). Выразим a_X , используя $H \sim a^{-2}$ на радиационно-доминированной стадии:

$$a_X = \frac{a_0^2 H_0}{k}. \quad (159)$$

Пределы интегрирования в 158 следующие $k_{min} = a_0 H_0$ и $k_{max} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} a_0 T_0 \cdot \left(\frac{M_{pl} \lambda}{T_{reh}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2g_{*0} 1.66}{\sqrt{g_{*reh}}} \right)^{\frac{1}{3}}$. Последнее выражение – это максимальный импульс моды на первом режиме (использована формула (130) в условии (136)). Используя выражение $H = \frac{T^2}{M_{pl}^*}$, получаем ограничение (с точностью до численного множителя порядка единицы):

$$\lambda < \frac{g_{*X}^{\frac{1}{3}}}{g_{*0}^{\frac{4}{3}}}. \quad (160)$$

Правая часть здесь мало отличается от единицы, то есть параметр λ может принимать почти произвольные значения в области $\lambda < 1$.

Другой способ ограничить параметры модели – использовать результаты прямого поиска гравитационных волн (эксперименты LIGO и VIRGO). Для этого найдем величину $\Omega_{GW,log}$, выражающую логарифмический вклад в Ω_{GW} : $\Omega_{GW} = \int \frac{dk}{k} \Omega_{GW,log}$. Так как плотность энергии падает пропорционально $\frac{1}{a^4}$, умножим выражение (157) на $\left(\frac{a_0}{a_{today}} \right)^4$ и получим следующую формулу:

$$\rho_{today} = \int \frac{dk}{k} \frac{H_0^2 k^2 T_{today}^2}{T_0^4 a_{today}^2} \left(\frac{g_{*today}}{g_{*0}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{g_{*0}}{g_{*X}} \right)^{\frac{1}{3}} M_{pl}^{\frac{4}{3}} T_{reh}^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{\sqrt{g_{*reh}}}{1.66 g_{*0}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (161)$$

После упрощений получаем:

$$\rho_{today} = \int \frac{dk}{k} k_{phys}^2 \frac{T_{today}^2 T_{reh}^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}}}{M_{pl}^{\frac{2}{3}}} \frac{g_{*today}^{\frac{2}{3}} g_{*reh}^{\frac{1}{3}}}{g_{*X}^{\frac{1}{3}}} \frac{(1.66)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}}. \quad (162)$$

С точностью до численных множителей

$$\Omega_{GW,log} = k_{phys}^2 \frac{T_{today}^2 T_{reh}^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}}}{\rho_c M_{pl}^{\frac{2}{3}}}. \quad (163)$$

И даже если мы предположим $\frac{T_{reh}}{M_{pl}} \sim 1$ и $\lambda \sim 1$, результат будет далеко за границами экспериментальных возможностей

$$\Omega_{GW,log} \approx 10^{-27}. \quad (164)$$

Теперь обратимся ко второму режиму. Уравнение для возмущений выглядит следующим образом:

$$\chi'' + \frac{1}{4(\eta_* - \eta)^2} \chi + k^2 \chi = 0. \quad (165)$$

Его решением является

$$C_1 \sqrt{\eta_* - \eta} J_0((\eta_* - \eta)k) + C_2 \sqrt{\eta_* - \eta} N_0((\eta_* - \eta)k). \quad (166)$$

Соответственно, $\chi^{(+)}$ – решение с положительно-частотной асимптотикой, будет равно $C \sqrt{\eta_* - \eta} H_0^{(1)}((\eta_* - \eta)k)$. Его асимптотика при больших $-\eta$, как обычно, должна иметь вид

$$\chi^{(+)} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2k}} e^{ik\eta}. \quad (167)$$

Это означает, что $C = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$, а решение можно записать в виде

$$\chi^{(+)} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sqrt{\eta_* - \eta} H_0^{(1)}((\eta_* - \eta)k). \quad (168)$$

После выхода за горизонт у этой моды будет два решения: постоянное и логарифмически растущее. При этом зависимость от k тоже всего лишь логарифмическая. При $\eta \rightarrow \eta_*$ мы раскладываем решение следующим образом

$$\varphi^{(+)} = \frac{\chi^{(+)}}{a} = \frac{\pi + 2i \ln\left(\frac{k(\eta_* - \eta)}{2}\right) + 2i\gamma}{4\sqrt{2} a_* \pi^2}. \quad (169)$$

Найдем теперь выражение для спектра мощности во втором режиме больших импульсов. Из уравнений (169) и (130) мы получаем:

$$P_\varphi(k) = \frac{\pi^2 + 4(\gamma + \ln(\frac{k(\eta_* - \eta_C)}{2}))^2}{4\pi a_*^2}. \quad (170)$$

Вспоминая тензорную нормировку, имеем

$$P_h = \frac{8(\pi^2 + 4(\gamma + \ln(\frac{k(\eta_* - \eta_C)}{2}))^2)}{M_{pl}^2 \pi a_*^2}. \quad (171)$$

Выразим спектр через физические величины:

$$P_h = 4(\pi^2 + 4(\gamma + \ln(\frac{k(\eta_* - \eta_C)}{2}))^2) \frac{T_{reh}}{M_{pl} a_0^3 T_0^3} \frac{\sqrt{g_{*reh}}}{1.66 g_{*0}}. \quad (172)$$

Аналогично первому режиму, поставим ограничение из первичного нуклеосинтеза. В данном случае пределы интегрирования будут $k_{min} = a_0 H_0$ и $k_{max} = \frac{T_{reh} a_0 T_0}{M_{pl}} 1.66 g_{*0}^{\frac{1}{3}} g_{*reh}^{\frac{1}{6}}$. Последнее выражение отвечает последней моде, выходящей когда-либо за горизонт (сопоставлены уравнения $\frac{k}{a_{reh}} = H_c$ и $H_c = \frac{T_{reh}^2}{M_{pl}^*}$). Используя (157) и (159), мы приходим к выражению:

$$T_{reh} < M_{pl} \frac{\overline{g_{*X}}^{\frac{1}{3}}}{g_{*0}^{\frac{4}{3}} g_{*reh}}, \quad (173)$$

таким образом, мы вновь получаем, что ограничения на параметры модели практически отсутствуют.

Итак, в модели псевдоконформного экпирозиса генерируются гравитационные волны с синим спектром мощности. При этом амплитуды этих гравитационных волн настолько малы, что их рассмотрение не приводит к сколько-нибудь серьезным ограничениям на параметры модели.

4 Массивная гравитация

4.1 Метод

4.1.1 Пропагатор $\Pi(k)$ в зависимости от параметров.

Напомним кратко стандартный подход квантовой теории поля к рассмотрению семейства физических теорий [133], и приспособим его к изучению линеаризованной гравитации, в частности Лоренц-нарушающей.

Физическое содержание теории лучше всего выражается в терминах производящей функции.

$$Z(J) = \int D\phi e^{i(S(\phi) + \int J\phi)} \quad (174)$$

В квадратичном приближении, когда

$$S(\phi) = \int d^d k \phi(-k) K(k) \phi(k) \quad (175)$$

и

$$\int d^d x J\phi = \int d^d k J(k) \phi(k), \quad (176)$$

величина $Z(J)$ является квадратичной экспонентой,

$$Z(J) = \exp\left(-\frac{i}{4} \int d^d k J(-k) K^{-1}(k) J(k)\right), \quad (177)$$

содержащей обращенную кинетическую матрицу $K(k)$, то есть пропагатор. Это конечномерная матрица в пространстве полей $\phi(x)$: если $\phi^a(x)$ несет индекс a , то $K_{ab}(k)$ имеет два индекса a, b . В случае векторных полей a будет лоренцевым индексом μ , а в случае гравитационного поля $a = (\mu\nu)$ будет парой симметричных лоренцевых индексов, поэтому в этом случае a принимает $\frac{d(d+1)}{2}$ различных значений, или $\frac{(d-1)(d+2)}{2}$ – в случае бесследового поля. Наша основная задача – исследовать величину $\Pi(k) = J(-k) K^{-1}(k) J(k)$.

Наиболее интересными для нас будут две характеристики Π .

(i) Сингулярность в $\Pi(k)$ означает наличие распространяющейся частицы, а положение сингулярности определяет ее дисперсионное соотношение $\omega = \varepsilon(|\vec{k}|)$.

(ii) Величина $V(|\vec{k}|) = \Pi(\omega = 0, \vec{k})$ определяет мгновенное взаимодействие типа Ньютона, Кулона или Юкавы.

Производящая функция Z и ее квадратичное приближение $\exp(-\frac{i}{4} \int \Pi)$ определены на пространстве параметров \mathcal{M} , и мы будем изучать сингулярности дисперсионных соотношений и потенциалов V на пространстве параметров \mathcal{M} . В рамках нашей задачи координатами на \mathcal{M} , параметризующими кинетическую матрицу $K(k)$, являются массовые члены.

4.1.2 Собственные значения и их неоднозначность.

Нахождение дисперсионных соотношений по существу является задачей о собственных значениях $K(k)$: грубо говоря, $\omega = \varepsilon(|\vec{k}|)$ – условие того, что некоторое собственное значение $\lambda(k) = 0$. Однако, это "очевидное" утверждение требует более точной формулировки. Дело в том, что K на самом деле квадратичная форма, а не оператор. Это означает, что она всегда может быть приведена к каноническому виду, где она диагональна, а на диагонали стоят только ± 1 и 0 . Таким образом интересные нам величины, типа $\lambda(k)$, пропадают. Тем не менее, это, столь же "очевидное" возражение также немного обманчиво, поскольку мы интересуемся не отдельной квадратичной формой, а целым семейством, определенным на пространстве параметров \mathcal{M} . Это означает, что набор ± 1 и 0 может меняться, когда мы движемся вдоль \mathcal{M} , более того, может меняться степень вырождения квадратичной формы $K(k)$. Конечно, степень вырождения (количество нулей на диагонали) – целое число, и оно меняется скачком, а потому это не очень удобная величина. Желание сделать ее гладкой приводит нас обратно к функциональным собственным значениям $\lambda(k)$. Однако, чтобы ввести $\lambda(k)$ нам потребуется дополнительная структура, например, метрика на пространстве полей.

Для наших нужд достаточно ввести "собственные значения" $\lambda(k)$ следующим образом: рассмотрим вместо $\Pi = J \frac{1}{K} J$ более общее выражение

$$\Pi(\lambda|k) = J \frac{1}{K - \lambda I} J \quad (178)$$

Тогда (как функция λ) оно может быть представлено через сумму по полюсам:

$$\Pi(\lambda|k) = \sum_{a,b,c} \frac{\alpha_a^{bc} J_b J_c}{\lambda_a - \lambda}. \quad (179)$$

Здесь $\lambda_a(k)$ – настоящие собственные значения, а наше исходное выражение

$$\Pi(k) = \sum_{a,b,c} \frac{\alpha_a^{bc}(k) J_b(-k) J_c(k)}{\lambda_a(k)} \quad (180)$$

Единственное, надо помнить, что это разложение зависит от дополнительной матрицы (метрики) I , выбор которой произволен и может даже зависеть от точки на \mathcal{M} . Мы будем считать, что наша метрика на пространстве полей не зависит от точки на пространстве параметров. Более того, очевидно, что физические свойства не зависят от этого выбора, а зависят только конкретные выражения для $\lambda_a(k)$. Заметим, что дисперсионные соотношения – нули $\lambda_a(k)$ – не зависят от I .

Использование I также важно с другой точки зрения. Чтобы определить производящую функцию, надо разделять запаздывающую и опережающую функции Грина, что обычно делается добавлением бесконечно малого мнимого члена к кинетической матрице K (знаменитые $i\epsilon$ в фейнмановском пропагаторе). Однако, в случае кинетической *матрицы* это не просто $i\epsilon$, а скорее $i\epsilon I_F$ с некоторой определенной матрицей I_F . Если мы отождествим нашу I с I_F , то дисперсионные соотношения будут выглядеть следующим образом

$$\lambda_a(k) = i\epsilon \quad (181)$$

что означает, что $\lambda_a(k)$ на самом деле сильно отличается от $-\lambda_a(k)$. Это тесно связано с концепцией духов.

Вероятно, наиболее естественные выборы матрицы I – это или просто единичная матрица, или "лоренцева единичная матрица" то есть с -1, отвечающими 0-компонентам. Физически обоснованный выбор – единичная (евклидова) матрица, однако технически часто удобнее работать с лоренцевой единичной матрицей, особенно, в теориях с ненарушенной лоренцевой симметрией. Поскольку в

этих двух случаях различается только духовая составляющая, обычно безопасно (и технически проще в случае Лоренц-инвариантных теорий) использовать лоренцеву матрицу.

4.1.3 Спектр и фазовая диаграмма.

Важная информация о теории содержится в ее спектре: положениях полюсов в $\Pi(\lambda|k)$ на комплексной λ -плоскости. Эти положения определяют дисперсионные соотношения $\lambda_a(\omega, \vec{k}) = 0$ между частотой ω и волновым вектором \vec{k} элементарного возбуждения (квазичастицы) и зависимость этих соотношений от точки в пространстве параметров \mathcal{M} .

Как известно, в общей Лоренц-нарушающей теории дисперсионные соотношения могут быть довольно сложными, они являются корнями полиномиального уравнения и часто не имеют никакого простого аналитического выражения. Иногда их удобнее представлять в виде графиков $\lambda_a(\omega)$ или $\lambda_a(\vec{k})$, однако, в случае многих параметров изобразить мы можем только конкретные $2d$ или $3d$ сечения, что, конечно, не дает полной визуализации.

В основном мы будем интересоваться качественными чертами спектра и их изменениями при переходе от одной части пространства параметров к другой. Соответствующее деление пространства параметров на домены с качественно различными спектрами (и другими физическими величинами, вроде структурных функций $\alpha_a^{bc}(k)$) называется фазовой диаграммой теории (или, лучше, семейства теорий).

4.1.4 Духи, тахионы, сверхсветовые частицы и DVZ скачки

Простейшим примером качественной черты спектра может служить наличие или отсутствие экзотических (с точки зрения Лоренц-инвариантной теории поля) возбуждений, вроде духов или сверхсветовых частиц.

Дух отличается от обычной частицы знаком перед ω^2 в $\lambda_a(k)$. Например,

для скалярной частицы,

$$\left. \frac{\partial \lambda_a(k)}{\partial \omega^2} \right|_{\lambda_a(k)=0} \begin{array}{l} < 0 & \text{обычная частица} \\ > 0 & \text{дух} \end{array} \quad (182)$$

Чтобы определить этот знак, мы должны сравнить его со знаком перед $i\epsilon$ в (181). Проблемы, на самом деле, ожидаются, когда присутствуют возбуждения с обратными знаками, когда существуют и духи, и нормальные частицы, и они взаимодействуют между собой. Условие

$$\left. \frac{\partial \lambda_a(k)}{\partial \omega^2} \right|_{\lambda_a(k)=0} = 0 \quad (183)$$

определяет границы, на которых может меняться духовая составляющая теории.

Похожее условие

$$\left. \frac{\partial \lambda_a(\omega = 0, \vec{k})}{\partial \vec{k}^2} \right|_{\lambda_a(k)=0} = 0 \quad (184)$$

определяет места DVZ скачков, о которых пойдет речь ниже. В Лоренц-инвариантной теории, где λ_a зависит от $k^2 = -\omega^2 + \vec{k}^2$, два условия (182) и (184) очевидно связаны. Поэтому при попытке избежать духов можно легко получить DVZ скачок – это как раз и происходит в модели Паули-Фирца – простейшей версии линеаризованной массивной гравитации. После нарушения Лоренц-симметрии связь между (182) и (184) пропадает.

Следующая патология, которую мы будем обсуждать – это тахион. Отличие между нормальными частицами и тахионами в следующем

$$\begin{array}{l} \text{если } \lambda_a(\omega, \vec{k} = 0) = 0 \text{ имеет действительные решения для частоты } \omega, \\ \quad \text{тогда это обычная частица,} \\ \text{если } \lambda_a(\omega = 0, \vec{k}) = 0 \text{ имеет действительные решения для волнового вектора } \vec{k}, \\ \quad \text{тогда это тахион.} \end{array} \quad (185)$$

Теперь обратимся к изучению сверхсветовых частиц. Распространение быстрее скорости света [134, 135, 136, 137, 138] определяется групповой скоростью

$$\vec{v}_a = \left. \frac{\partial \lambda_a(k)/\partial \vec{k}}{\partial \lambda_a(k)/\partial \omega} \right|_{\lambda_a(k)=0} \quad (186)$$

как обычно:

$$\begin{aligned} < 1 & \quad \text{обычная частица} \\ \vec{v}_a^2 & = 1 \quad \text{светоподобная частица} \\ > 1 & \quad \text{сверхсветовая частица} \end{aligned} \quad (187)$$

На самом деле, имеет смысл различать между собой разные сверхсветовые частицы. Для этого мы будем использовать следующую величину

$$V_a^2 = \left. \frac{\partial \lambda_a(k)/\partial \vec{k}^2}{\partial \lambda_a(k)/\partial \omega^2} \right|_{\lambda_a(k)=0} \quad (188)$$

Для обычной релятивистской частицы с $\lambda = -\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2$, эта величина $V^2 = 1$ не зависит от значения (и даже знака) квадрата массы m^2 . Поэтому обычные тахионы с отрицательным m^2 и $\vec{v}^2 > 1$, в этом смысле являются "мягкими" сверхсветовыми частицами. Однако, в Лоренц-нарушающих теориях могут появляться гораздо более неприятные, "жесткие" тахионы, у которых $V^2 > 1$.

Что касается DVZ скачков, то они могут появляться в том случае, если один из скаляров становится бесконечно массивным. Тогда безмассовый предел становится неопределенным: этот скаляр может оставаться бесконечно массивным, приобретать конечную массу или становиться безмассовым, в зависимости от конкретного способа взятия предела. Вклад такого скаляра в потенциал мгновенного взаимодействия тоже неоднозначный и зависит от направления, по которому мы стремимся к безмассовому пределу. Мы интересуемся физически осмысленными величинами, поэтому эта сингулярная точка в \mathcal{M} должна быть выколота и регуляризована. Для дисперсионного соотношения общего вида роль массы в этом рассуждении играет корень \vec{k}_0^2 уравнения $\lambda_a(\omega = 0, \vec{k}_0^2) = 0$

(когда корень отрицательный $\vec{k}_0^2 < 0$ появляется массовая щель). DVZ скачок появляется, когда $\vec{k}_0^2 \rightarrow -\infty$, а это есть требование того, что $\lambda_a(\omega = 0, \vec{k}^2)$ имеет асимптоту, удовлетворяющую (184). Поэтому (184) – необходимое условие существования DVZ скачка. Отметим, однако, что выражение (184) более жесткое, чем (182), поскольку наложено дополнительное условие $\omega = 0$: получается, что оно определяет подпространство ко-размерности один в пространстве параметров \mathcal{M} , в то время как (182) может удовлетворяться для определенных ω и \vec{k} в доменах ко-размерности ноль в пространстве \mathcal{M} . DVZ расходимость – это, фактически, некоммутативность пределов, то есть различие между двумя наивными определениями статического потенциала (мгновенного взаимодействия типа Кулона или Юкавы) в заданной точке M_0 на пространстве параметров. Такое различие может появляться, если количество степеней свободы меняется в этой точке M_0 , то есть, когда две ветви дисперсионных соотношений сливаются или пересекаются. Это происходит, если два корня $\lambda_a(\omega = 0, \vec{k})$ совпадают, то есть, когда имеет место (184).

Мы будем использовать тот факт, что собственные значения $\lambda_a(k)$ являются корнями характеристического полинома

$$C_I(\lambda) = \text{discriminant}_\phi(S(\phi) - \lambda(\phi I \phi)) = \det(K - I\lambda) = \prod_a^{\text{deg } C} (\lambda - \lambda_a), \quad (189)$$

поскольку дискриминант квадратичной формы является детерминантом соответствующей матрицы. Условия массовой поверхности $\lambda_a(k) = 0$ являются нулями самого $\text{discriminant}_\phi(S(\phi)) = \det K$ и, как мы говорили, не зависят от выбора I .

4.2 Пример: Лоренц-нарушающая массивная гравитация

4.2.1 Общая структура, примеры

Рассмотрим структуру собственных значений в Лоренц-нарушающей массивной гравитации (9).

Собственные вектора кинетической матрицы естественно разделяются на три группы: бесследовые тензоры, векторы и скаляры. А именно, $\frac{d(d+1)}{2}$ компонент симметричного тензора $h_{\mu\nu}$ группируются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d(d+1)}{2} &= \underbrace{\frac{(d-2)(d+1)}{2}}_{\text{massive spin 2}} + \underbrace{\underbrace{(d-1)}_{\text{space-time transverse}} + \underbrace{1}_{\text{secondary}}}_{\text{Stueckelberg vector}} + \underbrace{1}_{\text{space-time trace}} = \\
&= \left\{ \underbrace{\frac{d(d-3)}{2}}_{\text{spatial-transverse tensor}} + \underbrace{(d-2)}_{\substack{\text{longitudinal tensor} \\ = \text{transverse vector}}} + \underbrace{1}_{\text{spatial trace}} \right\} + \\
&+ \left\{ \underbrace{d-2}_{\substack{\text{spatial-transverse} \\ \text{Stueckelberg vector}}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{longitudinal} \\ \text{Stueckelberg scalar}}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{secondary} \\ \text{Stueckelberg scalar}}} \right\} + 1
\end{aligned} \tag{190}$$

где первая строчка – $SO(d-1)$ классификация в системе покоя (где $\vec{k} = 0$), а вторая и третья – классификация в произвольной системе отсчета ($SO(d-2)$ в плоскости перпендикулярной \vec{k}). Соответственно характеристический полином $C(\lambda)$ в произвольной системе разлагается следующим образом

$$C(\lambda) = (\lambda - \lambda_{gr})^{\frac{d(d-3)}{2}} P_2(\lambda)^{d-2} Q_4(\lambda) = (\lambda - \lambda_{gr})^{\frac{d(d-3)}{2}} (\lambda - \lambda_{vec}^+)^{d-2} (\lambda - \lambda_{vec}^-)^{d-2} \prod_{a=1}^4 (\lambda - \lambda_{sc}^a) \tag{191}$$

где P_2 и Q_4 – полиномы второй и четвертой степеней соответственно. При этом все их коэффициенты, а также λ_{gr} , являются квадратичными функциями ω и \vec{k} . То, что коэффициенты полинома C являются квадратичными функциями ω и \vec{k} , означает, что

$$\begin{aligned}
&\lambda_{gr} - \text{билинейная комбинация } \omega \text{ и } \vec{k}, \\
&\lambda_{vec}^{\pm} = p_2 \pm \sqrt{p_4}, \text{ где } p_2 \text{ и } p_4 - \text{полиномы второй и четвертой степени по } \omega \text{ и } \vec{k} \text{ соответственно,} \\
&\lambda_{sc}^{1,2,3,4} - \text{корни полинома четвертой степени.}
\end{aligned}$$

Наиболее интересным будет скалярный сектор, в котором будут наблюдаться сложные переплетения четырех собственных значений. Структура собственных значений проще всего выглядит при $m_4 = 0$ и $\vec{k} = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda_{sT} &= -\omega^2 + m_2^2, \\ \lambda_S &= m_1^2, \\ \lambda_{sS} &= -m_0^2, \\ \lambda_{stT} &= (d-2)\omega^2 + m_2^2 - (d-1)m_3^2\end{aligned}$$

(показано на рисунке 8а.)

Включение m_4 и \vec{k} ведет к бифуркации: график 8а превращается в 8b. Важно, что горизонтальные асимптоты при этом остаются на своих местах: при $\lambda = -m_0^2$ и $\lambda = m_1^2$.

Бифуркация проявляется в физическом спектре, если одна из этих асимптот совпадает с осью абсцисс, где $\lambda = 0$. Это, очевидно, происходит при $m_0 = 0$ или $m_1 = 0$. Подробнее мы это обсудим в приложении.

Обсудим также другой тип графиков, которые мы будем использовать в дальнейшем. С целью исследования DVZ скачков в потенциале мгновенного взаимодействия посмотрим на рисунок 9, где четыре скалярных собственных значения λ представлены как функции \vec{k}^2 при нулевой ω^2 . Любое пересечение оси абсцисс на этом графике отвечает наличию тахиона в спектре. DVZ скачок появляется, если какая-либо асимптотика собственных значений совпадает с осью абсцисс.

В подобных задачах геометрические рисунки являются визуальным удобным инструментом исследования теории. Ниже мы приведем графики для различных случаев и параметров, пока перейдем к явным алгебраическим результатам.

4.2.2 Явные формулы

Итак, мы будем анализировать теорию, используя собственные значения. Мы будем использовать евклидовы нормальные моды и евклидовы собственные

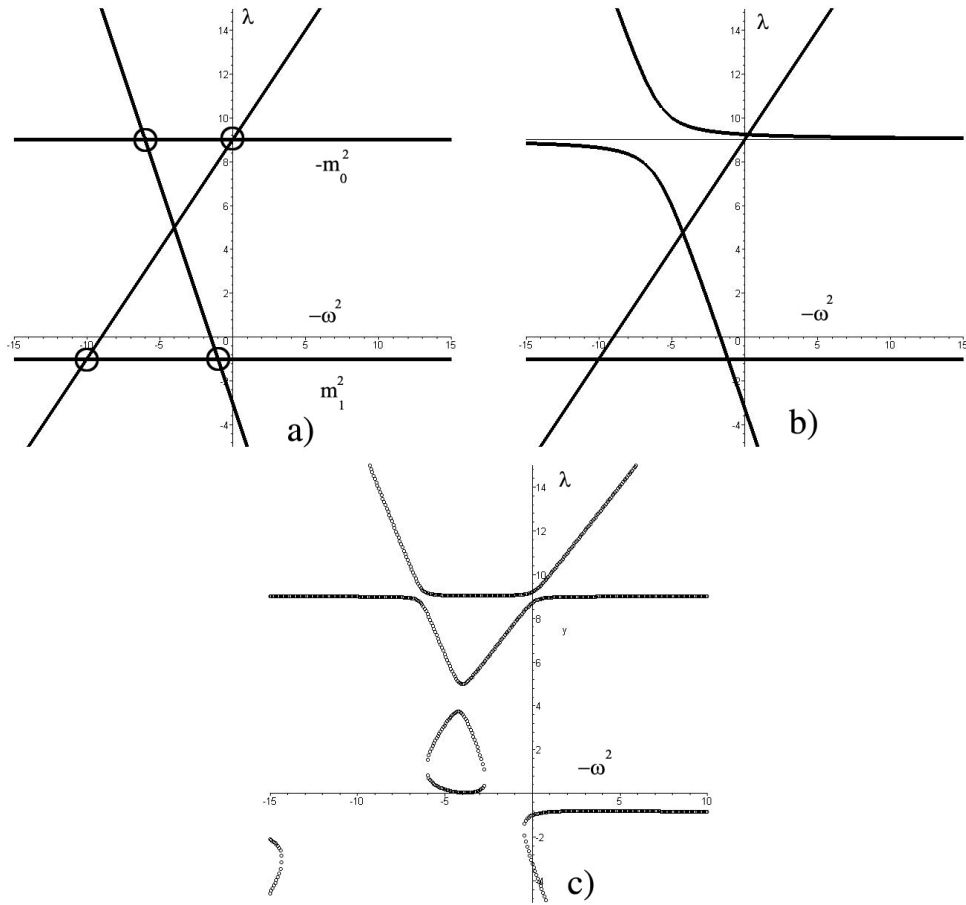


Рис. 8: Левый график представляет собственные значения как функции $-\omega^2$ в системе покоя с $m_4 = 0$. В этом случае система кривых максимально вырождена, а все собственные значения являются прямыми линиями. Положения двух горизонтальных линий определяются значениями m_0^2 и m_1^2 , а положения четырех пересечений зависят также от m_2^2 и m_3^2 . На правом графике вырождение частично снято выбором ненулевого m_4 (все еще в системе покоя). На нижнем графике показано типичное возмущение предыдущих графиков, когда и m_4^2 , и импульс ненулевые, и на всех пересечениях снимается вырождение. Значения параметров: $m_0^2 = -9$, $m_1^2 = -1$, $m_2^2 = 9$, $m_3^2 = 4$.

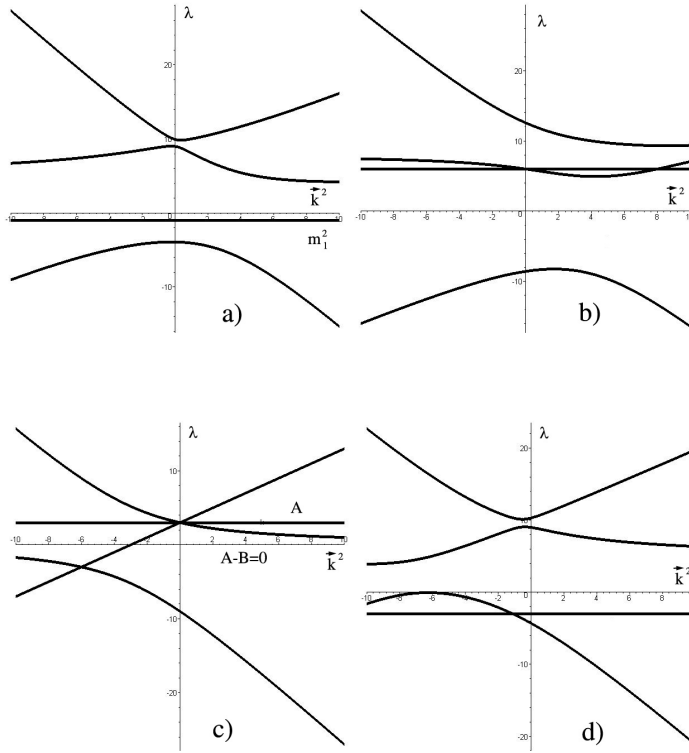


Рис. 9: Кривые собственных значений при $\omega^2 = 0$ (что соответствует мгновенному потенциалу). Первые два графика (a и b) отвечают общему случаю Лоренц-нарушения (значения параметров: $m_0^2 = -9$, $m_1^2 = -1$, $m_2^2 = 9$, $m_3^2 = 4$, $m_4^2 = -2$; и $m_0^2 = 8$, $m_1^2 = m_2^2 = 6$, $m_3^2 = m_4^2 = -2$). Третий график (c) представляет Лоренц-инвариантный случай, когда асимптотика собственного значения совпадает с осью абсцисс. Это отвечает DVZ скачку, а также теории Паули-Фирца ($A = B = 3$). График d ($m_0^2 = -9$, $m_1^2 = -3$, $m_2^2 = 9$, $m_3^2 = 4$, $m_4^2 = 2.4$) показывает, что условие (184) может быть реализовано другим путем: кривая собственного значения может касаться оси абсцисс.

значения, поскольку из-за нарушенной Лоренц-инвариантности лоренцевы нормальные моды не упрощают анализ.

Одно из собственных значений отвечает пропагатору гравитона:

$$D_{gr} = -\lambda_{gr} = -\omega^2 + \vec{k}^2 + m_2^2 = k^2 + m_2^2, \quad (192)$$

Ему отвечает $\frac{d(d-3)}{2}$ тензорных мод.

Штукельберговский и поперечный вектора имеют $2 \times (d - 2)$ собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_{vec}^\pm &= p_2 \pm \sqrt{p_4} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\omega^2 + \vec{k}^2 + m_1^2 - m_2^2 \pm \sqrt{(\omega^2 + \vec{k}^2)^2 + 2(-\omega^2 + \vec{k}^2)(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 + m_2^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (193)$$

они собираются в полином

$$D_{vec} = -\lambda_{vec}^+ \lambda_{vec}^- = p_4 - p_2^2 = -m_1^2 \omega^2 + m_2^2 \vec{k}^2 + m_1^2 m_2^2 \quad (194)$$

и описываются характеристическим полиномом

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2p_2\lambda - D_{vec} \quad (195)$$

Оставшиеся четыре скаляра собираются в сложный характеристический поли-

ном четвертой степени:

$$\begin{aligned}
Q_4(\lambda) = & \lambda^4 + \lambda^3 \left((d-3)(\omega^2 - \vec{k}^2 - m_3^2) - m_0^2 - m_1^2 + 2m_2^2 - 2m_3^2 \right) + \\
& + \lambda^2 \left\{ - (d-2)(\omega^2 + \vec{k}^2)^2 + \omega^2 \left(2m_3^2 + (d-3)(-m_0^2 - m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \vec{k}^2 \left(-2m_4^2 + (d-3)(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - 2m_4^2) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left((m_0^2 m_1^2 + m_2^4 - 2m_0^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2) + (d-1)(-m_4^4 - m_2^2 m_3^2 + m_1^2 m_3^2 + m_3^2 m_0^2) \right) \right\} \\
& + \lambda \left\{ (d-2) \left(\omega^4 (m_0^2 + m_1^2) + 2\omega^2 \vec{k}^2 (m_0^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) + \vec{k}^4 (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \omega^2 \left((d-1)(m_4^4 - (m_0^2 + m_1^2)m_3^2) + (d-3)(-m_1^2 m_2^2 + m_0^2 m_1^2 - m_0^2 m_2^2) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \vec{k}^2 \left(2(d-2)(m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_4^2) + (d-3)(m_0^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2 - m_0^2 m_1^2 - m_1^2 m_3^2 - m_3^2 m_0^2 + m_4^4) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(2m_0^2 m_1^2 m_2^2 - m_0^2 m_4^2 - m_1^2 m_4^2 + (d-1)(m_0^2 m_2^2 m_3^2 + m_4^4 m_1^2 - m_2^2 m_4^4 - m_0^2 m_1^2 m_3^2 + m_1^2 m_2^2 m_3^2) \right) \right\} + \\
& + \left\{ (d-2) \left(-\omega^4 m_0^2 m_1^2 + 2\omega^2 \vec{k}^2 (m_4^4 - m_3^2 m_0^2 + m_0^2 m_2^2 - m_1^2 m_4^2) + \vec{k}^4 (m_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_3^2) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \omega^2 \left((d-1)(m_0^2 m_1^2 m_3^2 - m_4^4 m_1^2) + (d-3)m_0^2 m_1^2 m_2^2 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \vec{k}^2 \left(2(d-2)m_1^2 m_2^2 m_4^2 + (d-3)(-m_0^2 m_1^2 m_2^2 + m_0^2 m_1^2 m_3^2 - m_4^4 m_1^2) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(m_2^4 m_0^2 m_1^2 + (d-1)(m_2^2 m_4^4 m_1^2 - m_2^2 m_3^2 m_0^2 m_1^2) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{196}$$

причем $Q_4(0) = -D$. Эта величина одинаковая и для лоренцевых, и для евклидовых собственных значений, поскольку приходит из детерминанта кинетического оператора в скалярном секторе (аналогично будут инвариантны D_{gr} и D_{vec}).

В системе покоя, где $\vec{k} = 0$, формулы упрощаются:

$$\lambda_{gr} = \omega^2 - m_2^2, \lambda_{vec}^+ = \omega^2 - m_2^2, \lambda_{vec}^- = m_1^2 \tag{197}$$

и

$$\begin{aligned}
Q_4(\lambda) = & (\lambda - m_1^2) \left(\lambda - (\omega^2 - m_2^2) \right) \cdot \\
\cdot \left\{ \lambda^2 - \lambda \left(m_0^2 - m_2^2 + (d-1)m_3^2 - (d-2)\omega^2 \right) - (d-2)\omega^2 m_0^2 - m_0^2 m_2^2 - (d-1)m_4^4 + (d-1)m_0^2 m_3^2 \right\}
\end{aligned} \tag{198}$$

Таким образом, в движущейся системе отсчета из $\frac{(d+1)(d-2)}{2}$ мод в системе покоя с $\lambda = \omega^2 - m_2^2$, $\frac{d(d-3)}{2}$ остаются модами гравитона, а $d-2$ моды вместе с

$d - 2$ штукельберговскими модами (у них $\lambda = m_1^2$) превращаются в D_{vec} , а одна мода с $\lambda = \omega^2 - m_2^2$, одна мода с $\lambda = m_1^2$ и два следа вместе превращаются в D (или $Q_4(\lambda)$).

Имея характеристический полином, перейдем к обсуждению патологий. Во-первых, надо заметить, что тензорный сектор полностью свободен от любых патологий. Достаточно просто увидеть сверхсветовое распространение в векторном секторе теории. Действительно, дисперсионное соотношение $D_{vec} = 0$ означает, что векторы распространяются со скоростью $\frac{m_2}{m_1}$. Эта скорость может быть как больше, так и меньше, чем скорость гравитона (которая равна 1), в зависимости от соотношения между массами. Однако, основные проблемы связаны со скалярным сектором теории.

Что касается духов в скалярном секторе, то они могут иметь бесконечную массу (тогда они исчезают из спектра линеаризованной гравитации, однако легко могут вернуться за гранью линейного приближения в виде моды Бульвара-Дезера), если $m_0^2 = 0$. В противном случае в теории может быть дух, по крайней мере при $\vec{k} = 0$ и $M^2 \geq 0$. Иными словами, будет мода, однородная в пространстве, но растущая во времени (сразу во всем пространстве). Эта мода не является распространяющимся духом, но мы можем немного сдвинуться из точки $\vec{k}^2 = 0$ с целью рассмотрения мод, распространяющихся в пространстве, и найти решения для (196) при малых \vec{k}^2 . Поскольку этот предел $\vec{k}^2 \rightarrow 0$ гладкий, мы получим дух при $\vec{k}^2 > 0$, если не положим $m_1 = 0$. На самом деле, сингулярность в последнем случае не удивительна, поскольку детерминант кинетической матрицы пропорционален m_1 при нулевых импульсах.

Изучим подробнее случай $m_1 = 0$. Дисперсионное соотношение выглядит довольно странно:

$$D \sim \omega^2 \vec{k}^2 = 0 \quad (199)$$

это отвечает распространению векторной моды с бесконечной скоростью и приводит к экзотическим возбуждениям, несущим мгновенное взаимодействие $\omega^2 = 0$. На самом деле, можно немного отойти от массовой поверхности (малые значения ω^2), чтобы изучить эти возбуждения аналитически: соответствующее соб-

ственное значение будет

$$\lambda_{instant} = \frac{2(d-2)\Delta \cdot \omega^2 \vec{k}^2}{(d-2)(m_3^2 - m_2^2)\vec{k}^4 - [(d-3)\Delta + 2(d-2)m_2^2 m_4^2] \vec{k}^2 + (d-1)m_2^2(m_0^2 m_3^2 - m_4^4) - m_0^2 m_2^4} + O(\omega^4) \quad (200)$$

где

$$\Delta \equiv m_0^2(m_3^2 - m_2^2) - m_4^4 \quad (201)$$

В то же время, это возмущение является духом: $d\lambda/d\omega^2 < 0$ на массовой поверхности, когда \vec{k}^2 лежит между нулями знаменателя в (200).

Таким образом, в случае, когда $m_1 = 0$ дух связан с возбуждениями, имеющими очень специфическое дисперсионное соотношение, и не является духом-частицей. По этой причине, видимо, он не был опознан в работе [55]. В принципе, было бы интересно лучше понимать физический смысл таких возбуждений.

Рассмотрим теперь тахионы. Мы возвращаемся к обсуждению режима, свободного от духов, при $m_0 = 0$. Для того, чтобы увидеть, есть ли на нем тахионы, надо положить $\omega = 0$ и искать действительные решения $\lambda(\vec{k}) = 0$. Заметим, что из-за нетривиального дисперсионного соотношения это не равносильно поиску моды с отрицательным квадратом массы. Действительно, масса описывает полюс по ω в пропагаторе при нулевых \vec{k} , в то время как тахион имеет отношение к зависимости от \vec{k} .

Чтобы гарантировать отсутствие тахионов в векторном и тензорном секторах, надо потребовать $m_1^2 \geq 0$ и $m_2^2 \geq 0$. После этого достаточно рассмотреть произведение четырех скалярных собственных значений, то есть D . Таким образом, тахион отсутствует, если не существует действительных решений уравнения

$$-D(\omega^2, \vec{k}^2) \Big|_{\omega=0} = \rho \vec{k}^4 + \eta \vec{k}^2 + \zeta = 0 \quad (202)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &\equiv (d-2)(m_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_3^2) \\ \eta &\equiv 2(d-2)m_1^2 m_2^2 m_4^2 + (d-3)(-m_0^2 m_1^2 m_2^2 + m_0^2 m_1^2 m_3^2 - m_4^4 m_1^2) \\ \zeta &\equiv m_2^4 m_0^2 m_1^2 + (d-1)(m_2^2 m_4^4 m_1^2 - m_2^2 m_3^2 m_0^2 m_1^2) = -(d-2)m_0^2 m_1^2 m_2^2 M^2 \end{aligned} \quad (203)$$

Тахион отсутствует и когда дискриминант (202) отрицательный,

$$\eta^2 - 4\rho\zeta < 0 \quad (204)$$

и когда оба решения $\frac{1}{2} \left(-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\rho\zeta} \right)$ квадратного уравнения отрицательны

$$\eta > 0, \quad \rho\zeta > 0 \quad (205)$$

Если ни одно из этих условий не выполнено, и в спектре будет тахион. Чтобы иметь теорию и без духов, и без тахионов, можно положить $m_0^2 = 0$ и потребовать

$$m_2^2 > m_3^2, \quad 2(d-2)m_2^2 > (d-3)m_4^2, \quad m_4^2 \geq 0 \quad (206)$$

(эти условия были получены в работе [54] при $d = 4$) или

$$[2(d-2)m_2^2 - (d-3)m_4^2]^2 < 4(d-1)(d-2)m_2^2(m_2^2 - m_3^2) \quad (207)$$

Здесь мы предполагаем, что m_1^2 , m_2^2 и m_4^2 ненулевые.

Имеет смысл рассмотреть также граничные случаи. Если одна из масс m_1^2 , m_2^2 или m_4^2 равна нулю, то $\zeta = 0$, это означает, что в спектре есть безмассовая мода. Теперь рассмотрим случаи отдельно.

Если $m_2^2 = 0$, то будет тахион, если не положить также $m_3^2 = 0$. В последнем случае скорость векторной моды становится нулевой, а дисперсионное соотношение

$$D \sim \vec{k}^4 = 0 \quad (208)$$

означает, что мода не распространяется со временем.

Есть, кроме того, возможность положить $m_4^2 = 0$, которая также ведет к нераспространяющейся моде с таким же дисперсионным соотношением (208).

Последний граничный случай реализуется, когда $\rho = 0$, то есть $m_2^2 = m_3^2$. В этом случае нет тахиона, если $\eta \geq 0$. Это означает

$$2(d-2)m_2^2 \geq (d-3)m_4^2, \quad m_4^2 \geq 0 \quad (209)$$

В частности, если в этих формулах реализуется равенство, то $\eta = 0$ и

$$2(d-2)m_2^2 = (d-3)m_4^2, \quad (210)$$

а дисперсионное соотношение принимает вид

$$2(d-2)(m_4^2 - m_1^2)\omega^2 \vec{k}^2 - (d-1)m_1^2 m_4^2 \omega^2 + (d-1)m_1^2 m_2^2 m_4^2 = 0 \quad (211)$$

4.3 Смешивание с другими полями, теория Калуцы-Клейна

Смешивание гравитации с дополнительными полями было рассмотрено уже в работе [51], однако там оно было использовано в качестве технического приема. Не так давно этот вариант модификации был заново введен в рассмотрение в работе [55]. С тех пор смешивание с другими полями привлекает все больше внимания. Идея заключается в следующем. Надо добавить в квадратичный лагранжиан члены вида

$$h^{\mu\nu} k_\mu \pi_\nu + (\dots \sim \pi^2) \quad (212)$$

или

$$h^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \pi + (\dots \sim \pi^2) \quad (213)$$

а также их Лоренц-нарушающие аналоги. Так вводится смешивание гравитации с каким-либо другим полем, обозначенным π . Эти поля можно рассматривать как сдвинутые векторы, или скалярные поля (например, голдстоуновские поля, описывающие возмущения около вакуумов, спонтанно нарушающих калибровочную и лоренцеву симметрии). Существуют убедительные аргументы в пользу того, что такое смешивание может существенно смягчить патологические свойства массивной гравитации, давая согласованные теории с массивным гравитоном и нарушением Лоренц-симметрии.

Разумеется, в этом нет ничего удивительного, поскольку такая теория без патологий хорошо известна уже десятки лет: это гравитация Калуцы-Клейна.

4.3.1 Пример калуца-клейновского гравитона, $d + 1 = 5 \longrightarrow d = 4$

Гравитация Калуцы-Клейна – общая теория относительности в пространстве большей $d + m$ размерности, компактифицированном в d измерений. С d -мерной

точки зрения теория выглядит как бесконечная башня полей разных масс, взаимодействующих друг с другом. Однако, в квадратичном приближении поля из разных секторов (с разными массами) не взаимодействуют и не смешиваются, так что можно каждый сектор рассматривать независимо. В каждом из них мы имеем массивный гравитон размерности d , сохраняющий калибровочную инвариантность (при общекоординатных преобразованиях в d измерениях), который должен быть свободен от любых патологий. Вопрос в том, как это согласуется с, казалось бы непреодолимыми, патологиями в массивной гравитации, которые мы обсуждали выше. Ответ заключается в том, что этот гравитон смешан с другими полями из этого сектора (с такими же массами). Это и есть простейший аргумент, показывающий, что смешивание с другими полями позволяет избавиться от всех патологий.

Нашей задачей будет проанализировать и понять массивную калуца-клейновскую гравитацию (один произвольный сектор). Мы ограничимся рассмотрением одного дополнительного измерения, компактифицированного на окружность радиуса R_d , и будем выражать все в единицах R_d .

Начнем с квадратичного действия для гравитации в заданном секторе. Обозначим различные компоненты $d + 1$ -мерного гравитона через $h_{\mu\nu}$, $A_\mu = h_{\mu d}$ и $\phi = h_{dd}$, где $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d - 1$. Составляющая импульса, направленная вдоль свернутой координаты, принимает дискретный набор значений. В единицах R_d это просто целое число $k_d = n$ ($k_d = \frac{n}{R_d}$). Мы рассматриваем конкретный сектор с заданным n , в квадратичном приближении он не смешан с другими секторами.

В этом приближении линеаризованное действие Гильберта-Эйнштейна да-

ет

$$\begin{aligned}
& 2(kh)_M^2 - k^2 h_{MN}^2 - 2(khk)h + k^2 h^2 \longrightarrow \\
\longrightarrow & 2(k_\mu h^{\mu\nu} + nA^\nu)^2 + 2(k_\mu A^\mu + n\phi)^2 - (k^2 + n^2)(h_{\mu\nu}^2 + 2A_\mu^2 + \phi^2) - \\
& -2(k_\mu k_\nu h^{\mu\nu} + 2nk_\mu A^\mu + n^2\phi)(h + \phi) + (k^2 + n^2)(h + \phi)^2 = \\
= & \left\{ 2(kh)_\mu^2 - k^2 h_{\mu\nu}^2 - 2(khk)h + k^2 h^2 \right\} + n^2(h^2 - h_{\mu\nu}^2) + \\
& + 2(k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu + 4n(k_\mu h^{\mu\nu} - k^\nu h) A_\nu + \\
& + 2(k^2 h - (khk)) \phi
\end{aligned} \tag{214}$$

Последняя строка описывает смешивание $h - \phi$, которое присутствует даже в безмассовом секторе при $n = 0$.

Стандартным приемом в теории Калуцы-Клейна является избавление от смешивания с помощью сдвига

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2} \phi \eta_{\mu\nu}, \tag{215}$$

что учитывается параметризацией метрики,

$$e^{-\frac{\phi}{d-1}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + e^\varphi A_\mu A_\nu & e^\varphi A_\mu \\ e^\varphi A_\nu & e^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1} \varphi \eta_{\mu\nu} & A_\mu \\ A_\nu & \frac{d-2}{d-1} \varphi \end{pmatrix}, \tag{216}$$

здесь $\phi = \frac{d-2}{d-1} \varphi$. После сдвига мы получаем квадратичное действие в виде

$$\begin{aligned}
& \left\{ 2(kh)_\mu^2 - (k^2 + n^2)h_{\mu\nu}^2 - 2(khk)h + (k^2 + n^2)h^2 \right\} + \\
& + 2(k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu + 4n(k_\mu h^{\mu\nu} - k^\nu h) A_\nu + \\
& + \frac{d-1}{d-2} \left(-k^2 \phi^2 + 2n\phi(2k_\mu A^\mu - nh) + \frac{d}{d-2} n^2 \phi^2 \right)
\end{aligned} \tag{217}$$

В безмассовом секторе ($n = 0$) мы имеем известное действие, описывающее гравитацию с дополнительным векторным полем и скаляром Бранса-Дикке. Но при $n \neq 0$ действие выглядит странно: гравитон имеет массу n , фотон безмассовый, а скаляр имеет другую массу, причем с неправильным знаком. Кроме того, в действии есть сильное смешивание между всеми тремя полями: $h_{\mu\nu}$, A_μ и ϕ . Чтобы выделить проблему, перепишем последнюю строку из (217) следующим

образом

$$\frac{d-1}{d-2} \left(- (k^2 + n^2) \phi^2 + 2n\phi(2k_\mu A^\mu - nh) \right) + 2 \left(\frac{d-1}{d-2} n\phi \right)^2 \quad (218)$$

где особенно странен последний член.

Конечно, диагонализация этого действия является простой задачей, более того, это является буквальным повторением случая безмассовой гравитации в $d+1$ измерениях. Мы получим $(d+1)(d-2)/2$ распространяющихся мод с массами n (которые образуют тензор в $(d+1)$ -мерной гравитации, компонента d пространственного импульса равна n), $d+1$ нулевых мод (отвечающих штуке-Кельберговским полям) и $d(d+1)/2$ нераспространяющихся мод (включающих калибровочный гравитон). По большому счету, этот результат можно угадать без каких-либо вычислений.

Отметим особенности гравитации Калуцы-Клейна.

- Последний член в первой строке в d -мерном действии (214) означает, что калуца-клейновский гравитон отвечает случаю Паули-Фирца $A = B$.
- Однако, калибровочная инвариантность не нарушена из-за смешивания $h - A - \phi$. Действительно, можно проверить, что (214) инвариантно относительно

$$\delta h_{\mu\nu} = k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu, \delta A_\mu = n \xi_\mu + k_\mu \zeta, \delta \phi = 2n \zeta \quad (219)$$

- Поскольку это случай ПФ – духа в спектре нет.
- Как уже отмечалось, нестабильности Вульвара-Дезера тоже не должно быть.

Обсудим, что происходит с **DVZ скачком** в этом случае. Поскольку КК гравитон отвечает случаю ПФ, нет ничего странного, что появляется DVZ скачок, когда радиус стремится к бесконечности, а мода с $n \neq 0$ становится безмассовой. Однако, когда мы рассматриваем КК случай, этот скачок имеет простое объяснение: другие поля, A_μ и ϕ , тоже вкладывают во взаимодействие тензоров энергии-импульса. Скачок в точности является вкладом этих полей.

Взаимодействие двух тензоров энергии-импульса через обмен КК гравитонами из заданного сектора n дается следующим выражением (мы получаем его из безмассового случая размерности $d + 1$):

$$\frac{1}{k^2 + n^2} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{(d+1)-2} T^2 \right), \quad (220)$$

и в безмассовом пределе $n \rightarrow 0$ (то есть при $R_d \rightarrow \infty$) получаем

$$\frac{1}{k^2} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{d-1} T^2 \right) \quad (221)$$

что отличается от результата в обычной безмассовой гравитации в d измерениях,

$$\frac{1}{k^2} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{d-2} T^2 \right) \quad (222)$$

Как мы уже говорили, это неудивительно, так как вклад дают дополнительные поля. На самом деле, этот вклад возникает из обмена полем ϕ ; если его найти явно, мы получим:

$$+ \left(\frac{1}{d-2} \right)^2 \frac{d-2}{d-1} \frac{T^2}{k^2} = \frac{1}{(d-1)(d-2)} \frac{T^2}{k^2} \quad (223)$$

Теперь сложим этот вклад с вкладом гравитона (222), $-\frac{1}{d-2} + \frac{1}{(d-1)(d-2)} = -\frac{1}{d-1}$, и получим, как и ожидалось, (221).

Иными словами, в теории Калуцы-Клейна мы видим три вклада во взаимодействие токов:

$$\text{теория КК} = \text{гравитон} + \text{дух} + \text{скалярное поле}, \quad (224)$$

в обычной безмассовой гравитации видно два вклада:

$$\text{безмассовая гравитация} = \text{гравитон} + \text{дух}, \quad (225)$$

а в случае Паули-Фирца дух убран из спектра (его масса устремлена к бесконечности), так что остается только один вклад:

$$\text{теория ПФ} = \text{гравитон}. \quad (226)$$

Понятно, что мы получили следующее явление: вклады духа и скалярного поля во взаимодействие токов в точности сократились. Таким образом, взаимодействие токов в теориях КК и ПФ идентично. Такое сокращение, однако, пропадает в случае нескольких компактифицированных измерений. В этом случае все три взаимодействия, (224), (225) и (226), различны.

5 Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты, полученные в диссертации.

- Изучены свойства скалярных космологических возмущений в модели с конформным скатыванием. В частности, исследована негауссовость на уровне четырехточечной корреляционной функции. Сделаны предсказания для формы негауссовости, которые могут представлять существенный интерес с точки зрения экспериментального обнаружения негауссовости. Выполнено сравнение полученных форм негауссовости с имеющимися в литературе локальными формами, обнаружены существенные различия. Сделан вывод о том, что исследование негауссовости в принципе позволяет отличить конформные модели от других космологических моделей, в частности, инфляционных.
- Модель с конформным скатыванием сопоставлена с моделью генезиса с галилеоном. Сделан вывод о тождественности предсказаний свойств космологических возмущений вплоть до первого нелинейного порядка. Показано, что эти предсказания основаны исключительно на свойстве конформной инвариантности и поэтому справедливы для целого класса моделей.
- Изучена модель псевдоконформной Вселенной. В ней найден новый режим классической эволюции, следующий за известным режимом экпирозиса и качественно от него отличающийся. Аналитические результаты о

поведении Вселенной в этой модели от начала до горячей стадии проверены с помощью численного моделирования.

- В модели псевдоконформной Вселенной найдены спектры тензорных возмущений, генерирующихся как в первом, так и во втором режиме. Сделан вывод о невозможности получения сильных ограничений на параметры модели на основе изучения тензорных возмущений.
- Разработан эффективный метод изучения квадратичных теорий, позволяющий сравнительно просто определять все дисперсионные соотношения и выявлять патологии. Метод алгоритмический и легко программируется.
- Изучена Лоренц-нарушающая массивная гравитация, в частности, получены зависимости дисперсионных соотношений от массовых параметров. Найдены области пространства параметров, свободные от патологий.

В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю В. А. Рубакову за внимание к работе, постоянную поддержку и критические замечания.

Автор признателен своим коллегам и соавторам М. Либанову, А. Миронову, А. Морозову, Анд. Морозову и С. Рамазанову за плодотворную совместную работу.

Автор отмечает гостеприимство Института Теоретической и Вычислительной Физики Университета Крита, где родились многие идеи, вошедшие в диссертацию. В частности, автор благодарен за поддержку и интересные дискуссии Т. Томарасу.

Отдельно хочется поблагодарить Т. Миронову за помощь с рисунками.

Автор благодарен всем сотрудникам и аспирантам Отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

6 Приложение: структура собственных значений в зависимости от параметров

6.1 Деформации четырех пересечений

Фигура из четырех пересечений, показанная на рисунке 8а, представляет зависимость четырех скалярных собственных значений от $-\omega^2$ при $m_4^2 = 0$ и $\vec{k}^2 = 0$. В этом случае две горизонтальные линии представляют собой $\lambda_{sS} = -m_0^2$ и $\lambda_S = m_1^2$, а две линии с наклонами $+1$ (обычная частица) и $-(d-2)$ (дух) даются выражениями $\lambda_{sT} = -\omega^2 + m_2^2$ и $\lambda_{stT} = (d-2)\omega^2 + m_2^2 - (d-1)m_3^2$, то есть они пересекают ось ординат в точках m_2^2 и $m_2^2 - (d-1)m_3^2$ соответственно. Таким образом, в спектре есть две распространяющиеся моды на массовой поверхности с $\lambda = 0$, одна нормальная, вторая – дух.

Когда включается $m_4^2 \neq 0$, как на рисунке 8b, разрешается одно из четырех пересечений: пересечение λ_{sS} и λ_{stT} . Пересекающиеся собственные значения расходятся, но пересечение оси абсцисс отвечает духу в обоих случаях: и при $m_0^2 > 0$, и при $m_0^2 < 0$. В зависимости от знака m_0^2 дух (на массовой поверхности) приходит из верхней или из нижней ветви. Единственное исключение – случай $m_0^2 = 0$: в этом случае мода, находящаяся на массовой поверхности, уходит на бесконечность, и дух исчезает, по крайней мере для $\vec{k}^2 = 0$.

Включение $\vec{k}^2 \neq 0$ разрешает все пересечения (даже если $m_4^2 = 0$). Это дает дополнительную свободу: таким же образом, дух может отсутствовать не только когда $m_0^2 = 0$, но и когда $m_1^2 = 0$. Однако при увеличении \vec{k}^2 и m_4^4 , фигура начинает очень сильно отличаться от четырех пересечений, как на рисунке 8а, что видно, например, на рисунках 10 и 11. Это означает, что даже если духи исчезли в окрестности фигуры 8а, они могут появиться снова при больших значениях импульса \vec{k}^2 . Случай больших m_4^4 также требует дополнительного анализа.

Из рисунков 10, 11 понятно, что избавиться от духов в модели можно только при $m_0^2 = 0$ или $m_1^2 = 0$.

6.2 Последовательный анализ бифуркаций

Анализ свойств различных возмущений можно проводить в определенном порядке, поскольку есть целая иерархия интересных свойств.

1) Первым делом можно нарисовать $\lambda(-\omega^2)$ при фиксированном \vec{k}^2 и массах или $\lambda(\vec{k}^2)$ при фиксированных ω^2 и массах. При этом интересны условия массовой поверхности $\lambda = 0$ и наклоны $-\frac{\partial\lambda}{\partial\omega^2}\Big|_{\lambda=0}$ или $\frac{\partial\lambda}{\partial\vec{k}^2}\Big|_{\lambda=0}$ в этих точках. Ниже мы будем, в основном, рассматривать первый вариант: $\lambda(-\omega^2)$.

2) Знаки производных контролируются топологией графика $\lambda(\omega^2)$, особенно точками ветвления: нулями дискриминанта $\text{discrim}(C(\lambda))$, где различные ветви сливаются или пересекаются. Эти критические точки ω_{cr}^2 сами по себе не находятся на массовой поверхности, но определяют свойства реальных возмущений, находящихся на массовой поверхности. Они зависят и от \vec{k}^2 , и от масс. Главный интерес для нас представляет их зависимость от импульса при фиксированных массах.

3) Свойства частиц на массовой поверхности качественно меняются в точках бифуркации, когда ω_{cr}^2 сливаются, исчезают или уходят на бесконечность. Это определяется нулями дискриминанта следующего уровня $\text{discrim}(\omega_{\text{cr}}^2(\vec{k}^2))$. Эти нули \vec{k}_{cr}^2 (masses) зависят только от масс и, следовательно, меняются только при перемещении по пространству параметров \mathcal{M} . В некоторых точках \mathcal{M} могут быть области импульсного пространства, где частицы, находящиеся на массовой поверхности, являются духами, и области, где они являются нормальными частицами. Могут быть точки, в которых они духи при всех значениях \vec{k} .

4) Границы между этими областями определяются дискриминантами следующих порядков $\text{discrim}(\vec{k}_{\text{cr}}^2(masses))$. Таким образом, можно проводить итеративный анализ: изменять вначале одну из масс, удобнее всего, m_4^2 , а потом остальные, на каждом шаге рассматривая дискриминанты все более высокого порядка.

6.3 Примеры

Приведем теперь примеры такого иерархического анализа.

1) Некоторые графики для функции с четырьмя ветвями $\lambda(-\omega^2)$ приведены на рисунках 10 и 11. На рисунке 10 значения масс фиксированы, а разные графики отвечают разным значениям \vec{k}^2 . На рисунке 11 мы фиксируем $\vec{k}^2 = 1$, но меняем две из пяти масс (m_0^2 и m_1^2). Меняя другую массу (m_4^2), мы получаем совершенно другую структуру (рис. 12). Нет никакой проблемы нарисовать сколько угодно таких графиков, сложность заключается в нахождении осмысленного способа организовать эти данные. Для этого и нужна иерархическая процедура, описанная выше.

2) Из рисунков 10 и 11 понятно, что вся структура хорошо контролируется положением точек ветвления (где касательная становится вертикальной). Эти точки могут быть определены чисто алгебраически: они являются нулями дискриминанта, то есть решениями уравнения

$$\text{discrim}_\lambda(C(\lambda)) = 0 \quad (227)$$

Выражение для дискриминанта в левой части слишком длинное, чтобы его приводить, однако это известный полином⁹, который может быть легко посчитан для любого конкретного набора масс. Его нули находятся численно, они показаны в центре рисунка 14 как функции \vec{k}^2 для тех же значений масс, что и на

⁹Как функция своих переменных дискриминант полинома 4 степени $C(\lambda) = \sum_{i=0}^4 C_i \lambda^i$ дается следующим выражением

$$\begin{aligned} & -4C_4C_2^3C_1^2 + 16C_4C_2^4C_0 - 128C_4^2C_0^2C_2^2 - 27C_3^4C_0^2 - 6C_4C_0C_3^2C_1^2 + \\ & + 144C_4C_0^2C_2C_3^2 + 144C_4^2C_0C_2C_1^2 + 18C_4C_3C_1^3C_2 + C_2^2C_3^2C_1^2 - \\ & - 4C_2^3C_3^2C_0 - 4C_3^3C_1^3 + 256C_4^3C_0^3 - 192C_4^2C_0^2C_3C_1 - 80C_4C_3C_1C_2^2C_0 + 18C_3^3C_1C_2C_0 - 27C_4^2C_1^4 \end{aligned}$$

Он является полиномом степени $2(4-1) = 6$ по коэффициентам и может быть получен из знаменитой формулы Сильвестра или представлен как комбинация двух простых диаграмм [139, 140, 141]. Подстановка этих коэффициентов через массы, частоту и импульс с помощью (196) делает это выражение слишком длинным.

рисунке 10. Можно сравнить рисунки 10 и 14 и убедиться, что основная информация о структуре рисунка 10, на самом деле, содержится в гораздо более простом и чисто алгебраическом графике на рисунке 14. В действительности, можно легко нарисовать нули того же дискриминанта, но как функции масс, а не \vec{k}^2 , тем самым воспроизведя основные свойства рисунка 11, а не 10.

3) Рисунок 14 сам может изменяться, если мы будем варьировать оставшиеся параметры. На этом рисунке позиции точек ветвления были отложены как функции \vec{k}^2 . Рисунок 15 показывает, что случится, если поменять один из массовых параметров на рисунке 14. Разница между этими рисунками (14 и 15) контролируема алгебраически: для этого надо посмотреть на нули дискриминанта второго порядка – точки пересечений и слияний трех ветвей на рисунке 14. Эта конструкция обсуждается ниже, она проиллюстрирована на рисунках 13-16.

4) Эту процедуру можно повторять шаг за шагом, достигая более высоких ко-размерностей в пространстве параметров \mathcal{M} . Таким путем мы получаем систематический подход к изучению бифуркаций и перегруппировок собственных значений, а значит и к построению фазовой диаграммы теории.

6.4 Структура расслоения

В этом параграфе мы приведем пример исследования структуры расслоения собственных значений над пространством параметров линеаризованной гравитации (в том числе с использованием графиков).

Для начала зафиксируем значения четырех масс: $m_0^2 = 4$, $m_1^2 = 0$, $m_2^2 = 4$, $m_3^2 = 6$, и посмотрим, что происходит, если мы меняем m_4^2 от 2.64 до 3.53. Выбор масс произвольный, помимо двух условий: m_1^2 мы берем нулевым, чтобы увидеть появление и исчезновение духа на массовой поверхности, а m_4^2 выбрано таким образом, чтобы мы могли изменять его вокруг критического значения,

$$\Delta \equiv m_0^2(m_3^2 - m_2^2) - m_4^4 = 0 \quad (228)$$

тем самым получая интересную бифуркацию. В этом частном случае критиче-

ское значение параметра m_4^2 будет равно $m_0\sqrt{m_3^2 - m_2^2} = 2\sqrt{2} = 2.828427\dots$

Мы начнем движение по линии в пространстве параметров от точки $m_4^2 = 2.64$. Первым делом, мы смотрим на двумерный график $\omega_{crit}^2(\vec{k}^2)$, на который, в зависимости от импульса \vec{k}^2 , нанесены три критические точки α, β, γ – три нуля дискриминанта $\text{discrim}(C(\lambda))$. После этого, как показано на рисунке 13, в каждой точке последнего графика (при различных \vec{k}^2) мы изучаем двумерный график $\lambda(-\omega^2)$ – график собственных значений. В этом частном случае, когда $m_4^2 = 2.64$, график дискриминантов содержит только одну действительную ветвь, и на графике собственных значений можно видеть только одну точку ветвления α . На дополнительном рисунке также представлена увеличенная окрестность α (неинтересная ветвь там не показана). Из этого рисунка понятно, что на массовой поверхности есть единственный скаляр, который расположен при $\omega^2 = 0$ и является духом, поскольку наклон в точке пересечения абсциссы отрицательный. На самом деле, это – то самое экзотическое возбуждение, которое одновременно и переносит мгновенное взаимодействие $\omega^2 = 0$, и является духом, так как $d\lambda/d\omega^2 < 0$ на массовой поверхности. Его дисперсионное соотношение мы уже обсуждали, оно имеет вид $-\omega^2\vec{k}^2 = i\epsilon$. Таким образом, наши аналитические рассуждения подтверждаются численными расчетами, графиками. На самом деле, это возмущение остается аналогичным при всех значениях m_4^2 , только коэффициенты в левой части становятся сложными функциями \vec{k}^2 и могут даже менять знак при изменении \vec{k}^2 . Физический смысл таких возбуждений пока не до конца изучен.

Теперь мы начинаем увеличивать m_4^2 . При $m_4^2 = 2.828428\dots$, а это как раз критическое значение $\Delta = 0$, появляются еще две ветви на графике дискриминантов (при меньших значениях m_4^2 они были комплексными¹⁰), после этого они достаточно быстро разделяются, мы приводим пример при $m_4^2 = 2.9$. Вид-

¹⁰Видно, что две комплексные ветви близки к тому, чтобы стать действительными, если посмотреть на график собственных значений при $m_4^2 = 2.64$ и $\vec{k}^2 = 6$. Очевидно, что что-то должно произойти – такое поведение указывает на близость нуля дискриминанта (просто он пока еще не виден в действительной плоскости).

но, что при этом значении m_4^2 одна из двух новых ветвей соединяется со старой при $\vec{k}^2 \approx 2$ – это отражается в свойствах графика собственных значений.

Когда мы увеличиваем значение m_4^2 до значения $3.53553\dots$, две другие ветви тоже соединяются. При этом соответствующие графики собственных значений выглядят довольно интересно, они показаны увеличенными на рисунке 14. Видно, что при увеличении \vec{k}^2 , скаляр на массовой поверхности при достижении значения $\vec{k}^2 = 1.623759\dots$ превращается из обычной частицы в дух, а потом обратно в обычную частицу при $\vec{k}^2 = 11.39337\dots$. Заметим, что пересечение ветвей на графике дискриминантов при $\vec{k}^2 \approx 3.85$ не вызывает принципиальных изменений на графике собственных значений, поскольку это пересечение, а не слияние ветвей.

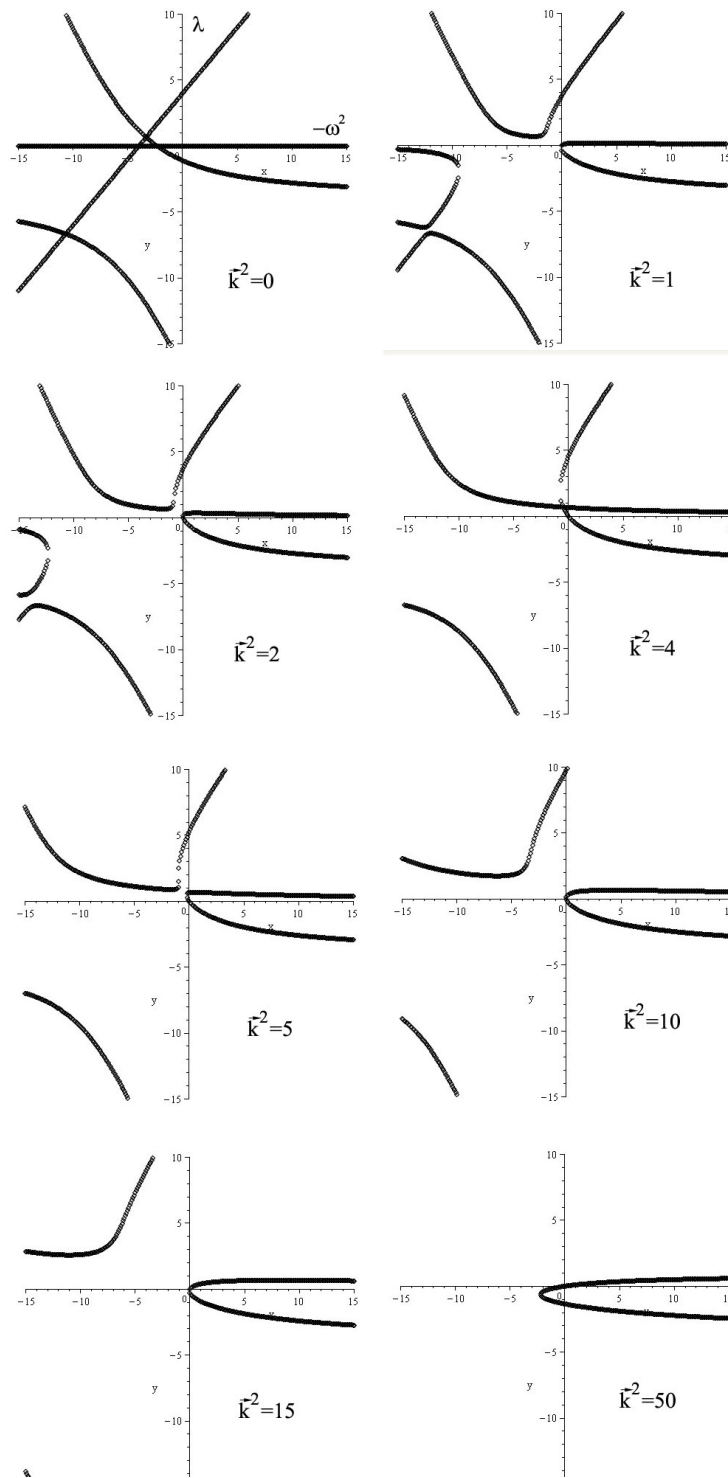


Рис. 10: Зависимости собственных значений от $-\omega^2$ для $m_0^2 = 4$, $m_1^2 = 0$, $m_2^2 = 4$, $m_3^2 = 6$, $m_4^2 = 3.53553\dots$ и различных \vec{k}^2 . Наклон кривой $\lambda(-\omega^2)$ при $\lambda = 0$ (массовая поверхность) меняется с положительного на отрицательный и обратно. Это показывает наличие области в пространстве \vec{k}^2 , в которой частица ведет себя как дух, что согласуется с рисунком 14.

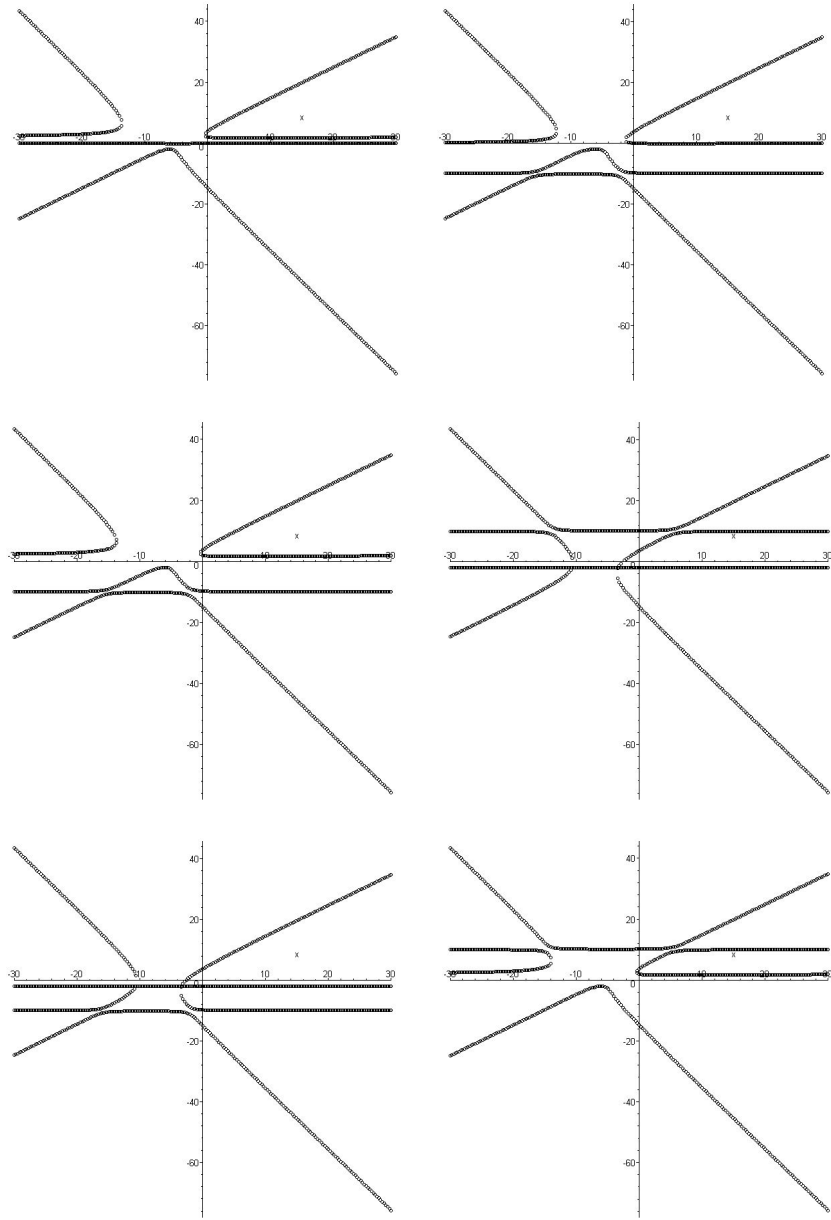


Рис. 11: Графики зависимости собственных значений от ω^2 для $k^2 = 1$ и различных значений масс m_1 и m_0 . На левых графиках (сверху вниз) массы равны: $m_0^2 = 0, m_1^2 = 2, m_2^2 = 4, m_3^2 = 6, m_4^2 = 0$; $m_0^2 = 10, m_1^2 = 2, m_2^2 = 4, m_3^2 = 6, m_4^2 = 0$; $m_0^2 = 10, m_1^2 = -2, m_2^2 = 4, m_3^2 = 6, m_4^2 = 0$. Аналогично на правых: $m_0^2 = 10, m_1^2 = 0, m_2^2 = 4, m_3^2 = 6, m_4^2 = 0$; $m_0^2 = -10, m_1^2 = -2, m_2^2 = 4, m_3^2 = 6, m_4^2 = 0$; $m_0^2 = -10, m_1^2 = 2, m_2^2 = 4, m_3^2 = 6, m_4^2 = 0$. Таким образом, два верхних графика отвечают случаю, когда одна из масс нулевая.

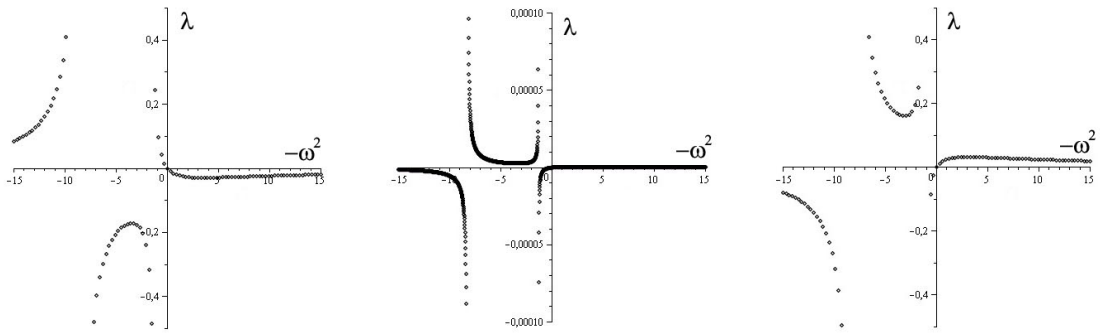


Рис. 12: изменение кривых собственных значений с рисунка 10 при изменении массы m_4 : $m_4^2 = 3$; 2.82843; 2.64575 (слева направо). Масштаб на среднем графике отличается от остальных.

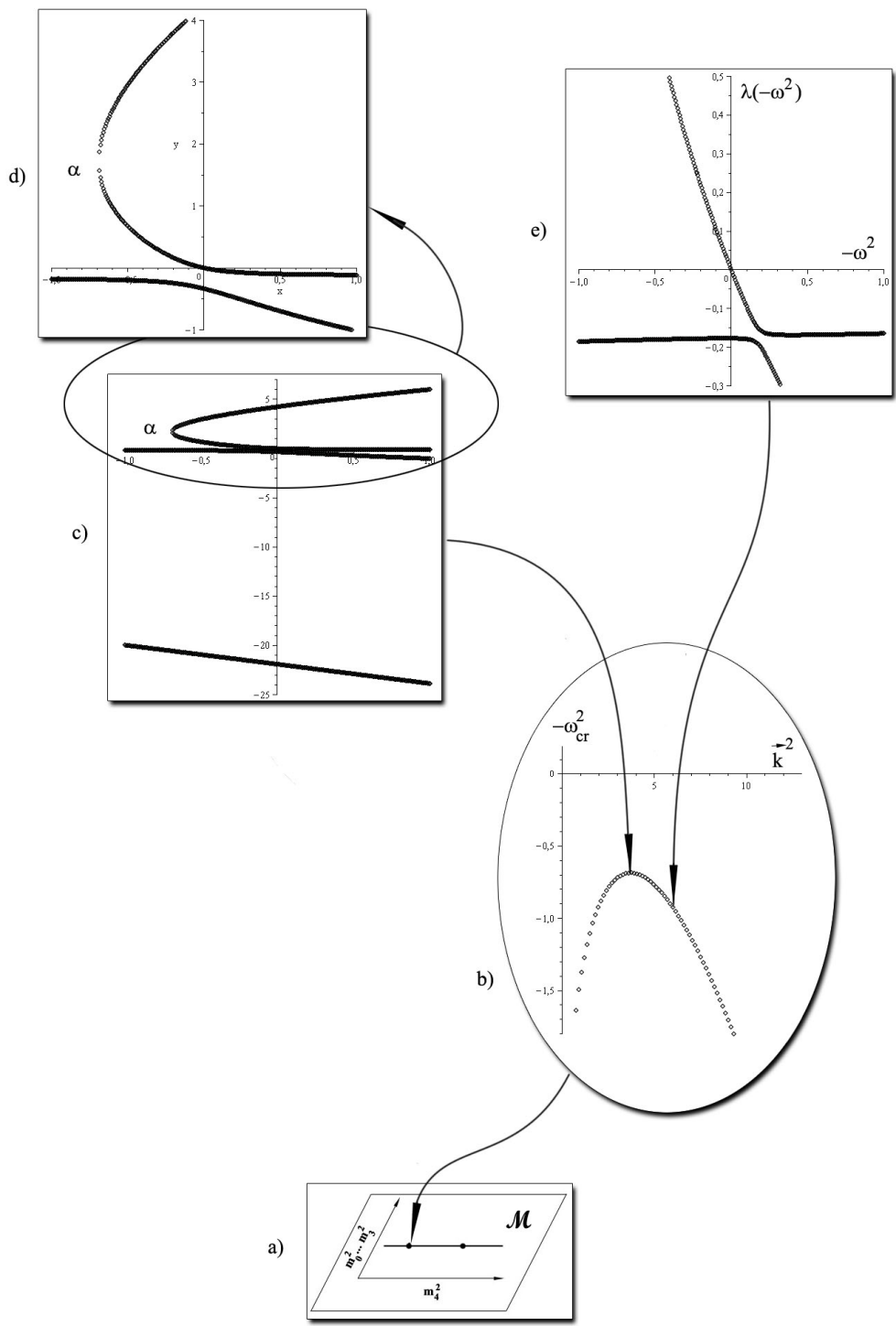


Рис. 13:

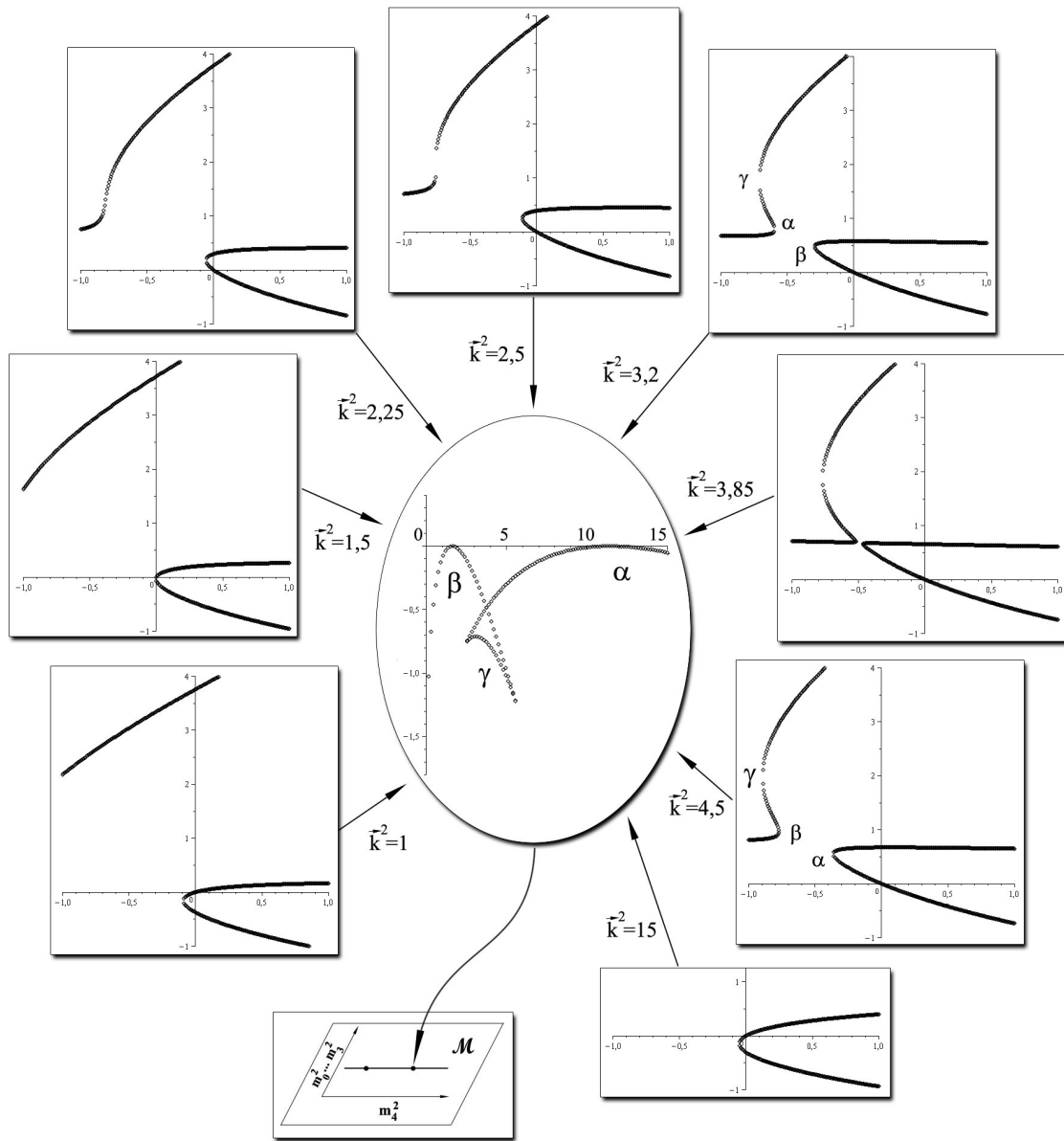


Рис. 14:

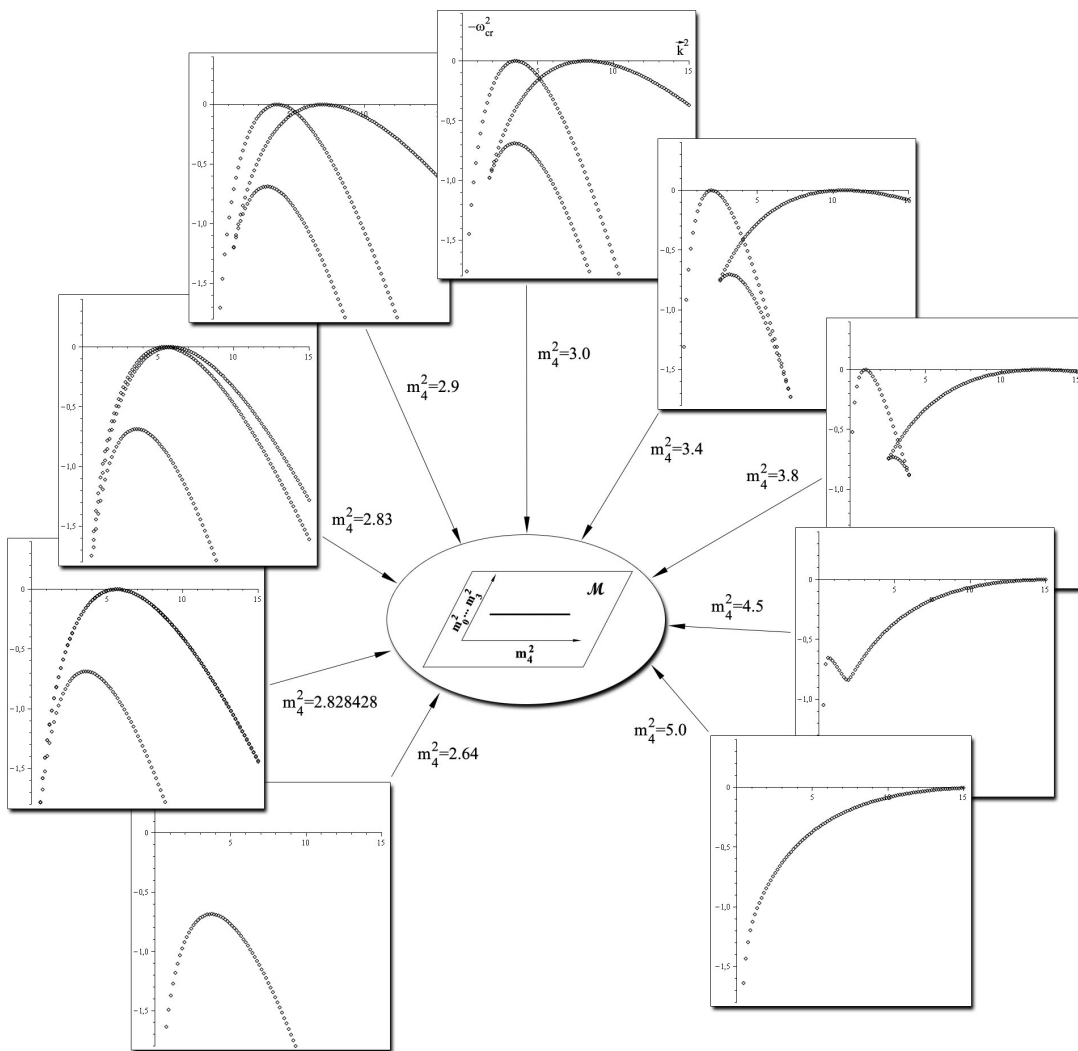


Рис. 15:

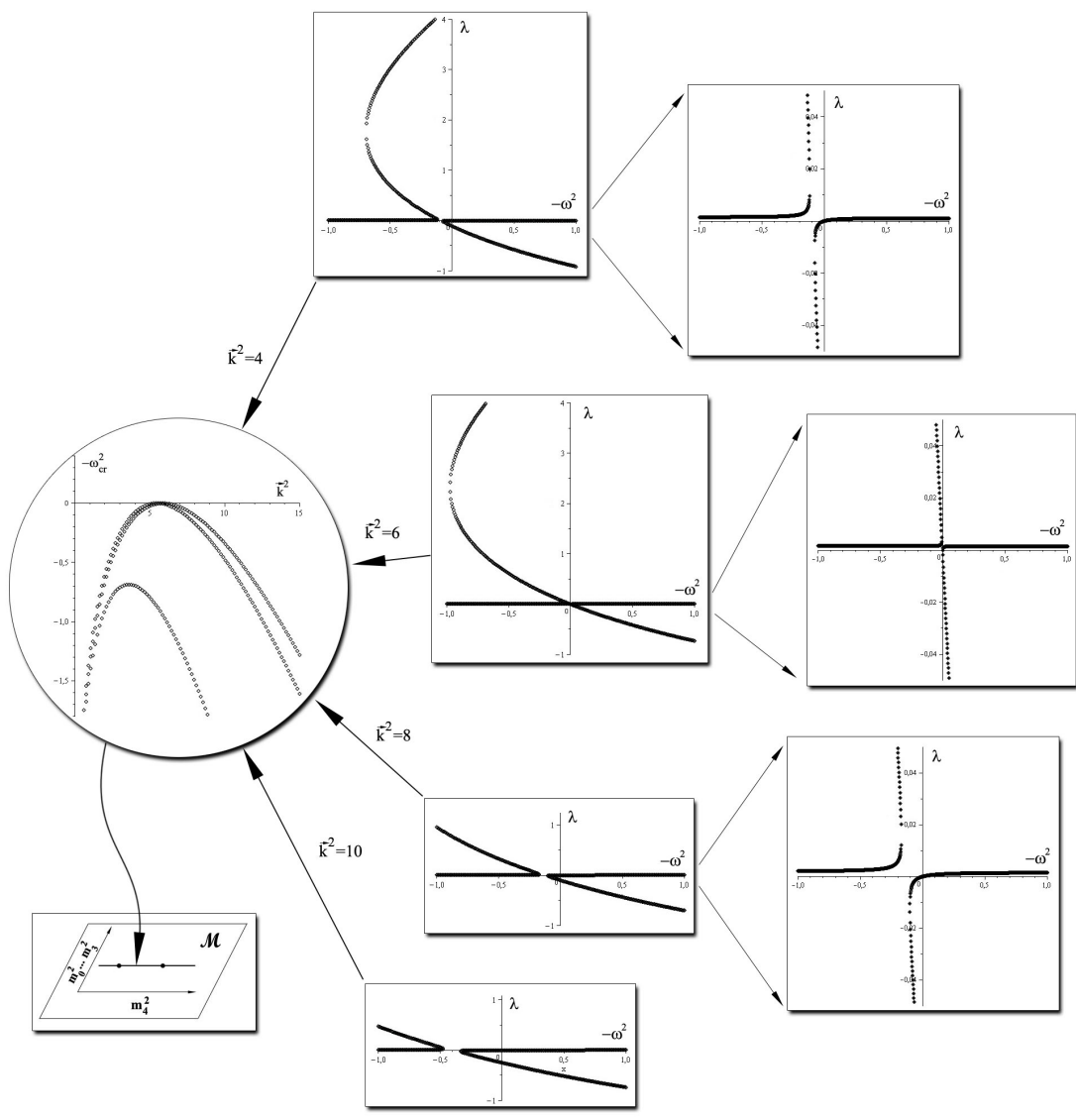


Рис. 16:

Список литературы

- [1] E. Komatsu et al., Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl.* (2011) **192**, 18, arXiv:1001.4538.
- [2] Planck Collaboration (P.A.R.Ade et al.), Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters // arXiv:1303.5076.
- [3] Planck Collaboration (P.A.R.Ade et al.), Planck 2013 Results. XXIV. Constraints on primordial non-Gaussianity // arXiv:1303.5084.
- [4] А.А.Старобинский, Спектр реликтового гравитационного излучения и начальное состояние Вселенной // Письма в ЖЭТФ (1979) **30**, 719-723 [JETP Lett. (1979) **30**, 682]
- [5] A. A. Starobinsky, A new type of isotropic cosmological models without singularity // *Phys. Lett. B* (1980) **91**, 99.
- [6] A. H. Guth, The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems // *Phys. Rev. D* (1981) **23**, 347.
- [7] A. D. Linde, A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems // *Phys. Lett. B* (1982) **108**, 389.
- [8] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Phys. Rev. Lett.* (1982) **48**, 1220.
- [9] В.Ф.Муханов и Г.В.Чибисов, Квантовые флуктуации и 'несингулярная' Вселенная // Письма в ЖЭТФ (1981) **33**, 549-553, [JETP Lett. (1981) **33**, 532].
- [10] S. W. Hawking, The Development Of Irregularities In A Single Bubble Inflationary Universe // *Phys. Lett. B* (1982) **115**, 295.

- [11] A. A. Starobinsky, Dynamics Of Phase Transition In The New Inflationary Universe Scenario And Generation Of Perturbations // Phys. Lett. B (1982) **117**, 175.
- [12] A. H. Guth and S. Y. Pi, Fluctuations In The New Inflationary Universe // Phys. Rev. Lett. (1982) **49**, 1110.
- [13] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, Spontaneous Creation Of Almost Scale - Free Density Perturbations In An Inflationary Universe // Phys. Rev. D (1983) **28**, 679.
- [14] J. L. Lehners, P. McFadden, N. Turok and P. J. Steinhardt, Generating ekpyrotic curvature perturbations before the big bang // Phys. Rev. D (2007) **76**, 103501, hep-th/0702153.
- [15] E. I. Buchbinder, J. Khoury and B. A. Ovrut, New Ekpyrotic Cosmology // Phys. Rev. D (2007) **76**, 123503, hep-th/0702154.
- [16] P. Creminelli and L. Senatore, A smooth bouncing cosmology with scale invariant spectrum // JCAP (2007) **0711**, 010, hep-th/0702165.
- [17] A. Notari and A. Riotto, Isocurvature perturbations in the ekpyrotic universe // Nucl. Phys. B (2002) **644**, 371, hep-th/0205019.
- [18] F. Di Marco, F. Finelli and R. Brandenberger, Adiabatic and Isocurvature Perturbations for Multifield Generalized Einstein Models // Phys. Rev. D (2003) **67**, 063512, astro-ph/0211276.
- [19] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, The ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang // Phys. Rev. D (2001) **64**, 123522, hep-th/0103239.
- [20] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt and N. Turok, From big crunch to big bang // Phys. Rev. D (2002) **65**, 086007; hep-th/0108187.

- [21] D. Wands, Duality invariance of cosmological perturbation spectra // Phys. Rev. D (1999) **60**, 023507, gr-qc/9809062.
- [22] F. Finelli and R. Brandenberger, On the generation of a scale-invariant spectrum of adiabatic fluctuations in cosmological models with a contracting phase // Phys. Rev. D (2002) **65**, 103522, hep-th/0112249.
- [23] L. E. Allen and D. Wands, Cosmological perturbations through a simple bounce // Phys. Rev. D (2004) **70**, 063515, astro-ph/0404441.
- [24] R. H. Brandenberger, Cosmology of the Very Early Universe // AIP Conf. Proc. (2010) 1268, 3, arXiv:1003.1745.
- [25] S. Mukohyama, Scale-invariant cosmological perturbations from Horava-Lifshitz gravity without inflation // JCAP (2009) **0906**, 001, arXiv:0904.2190.
- [26] V. A. Rubakov, Harrison–Zeldovich spectrum from conformal invariance // JCAP (2009) **0909**, 030, arXiv:0906.3693.
- [27] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini, Galilean Genesis: an alternative to inflation // JCAP (2010) **1011**, 021, arXiv:1007.0027.
- [28] M. Libanov and V. Rubakov, Cosmological density perturbations from conformal scalar field: infrared properties and statistical anisotropy // JCAP (2010) **1011**, 045, arXiv:1007.4949.
- [29] J. K. Erickson, D. H. Wesley, P. J. Steinhardt and N. Turok, Kasner and mixmaster behavior in universes with equation of state $w \geq 1$ // Phys. Rev. D (2004) **69**, 063514, hep-th/0312009.
- [30] D. Garfinkle, W. C. Lim, F. Pretorius and P. J. Steinhardt, Evolution to a smooth universe in an ekpyrotic contracting phase with $w > 1$ // Phys. Rev. D (2008) **78**, 083537, arXiv:0808.0542.

- [31] J. L. Lehners, Ekpyrotic and Cyclic Cosmology // Phys. Rept. (2008) **465**, 223, arXiv:0806.1245.
- [32] A. D. Linde and V. F. Mukhanov, Nongaussian isocurvature perturbations from inflation // Phys. Rev. D (1997) **56**, 535, astro-ph/9610219.
- [33] K. Enqvist and M. S. Sloth, Adiabatic CMB perturbations in pre big bang string cosmology // Nucl. Phys. B (2002) **626**, 395, hep-ph/0109214.
- [34] D. H. Lyth and D. Wands, Generating the curvature perturbation without an inflaton // Phys. Lett. B (2002) **524**, 5, hep-ph/0110002.
- [35] T. Moroi and T. Takahashi, Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background // Phys. Lett. B (2001) **522**, 215, hep-ph/0110096.
- [36] K. Dimopoulos, D. H. Lyth, A. Notari and A. Riotto, The curvaton as a Pseudo-Nambu-Goldstone boson // JHEP (2003) **0307**, 053, hep-ph/0304050.
- [37] G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, A new mechanism for generating density perturbations from inflation // Phys. Rev. D (2004) **69**, 023505, astro-ph/0303591.
- [38] L. Kofman, Probing string theory with modulated cosmological fluctuations // astro-ph/0303614.
- [39] G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, Cosmological perturbations from inhomogeneous reheating, freezeout, and mass domination // Phys. Rev. D (2004) **69**, 083505, astro-ph/0305548.
- [40] V. Rubakov, M. Osipov, Scalar tilt from broken conformal invariance // Письма в ЖЭТФ (2011) **93**, 56-59, [JETP Lett. (2011) **93**, 52-55], arXiv:1007.3417.
- [41] L. Ackerman, S. M. Carroll and M. B. Wise, Imprints of a Primordial Preferred Direction on the Microwave Background // Phys. Rev. D (2007) **75**, 083502, astro-ph/0701357.

- [42] A. R. Pullen and M. Kamionkowski, Cosmic Microwave Background Statistics for a Direction-Dependent Primordial Power Spectrum // Phys. Rev. D (2007) **76**, 103529, arXiv:0709.1144.
- [43] M. A. Watanabe, S. Kanno and J. Soda, Inflationary Universe with Anisotropic Hair // Phys. Rev. Lett. (2009) **102**, 191302, arXiv:0902.2833.
- [44] M. A. Watanabe, S. Kanno and J. Soda, The Nature of Primordial Fluctuations from Anisotropic Inflation // Prog. Theor. Phys. (2010) 123, 1041, arXiv:1003.0056.
- [45] T. R. Dulaney and M. I. Gresham, Primordial Power Spectra from Anisotropic Inflation // Phys. Rev. D (2010) **81**, 103532, arXiv:1001.2301.
- [46] A. E. Gumrukcuoglu, B. Himmetoglu and M. Peloso, Scalar-Scalar, Scalar-Tensor, and Tensor-Tensor Correlators from Anisotropic Inflation // Phys. Rev. D (2010) **81**, 063528, arXiv:1001.4088.
- [47] A. E. Gumrukcuoglu, C. R. Contaldi and M. Peloso, CMB Anomalies from Relic Anisotropy // astro-ph/0608405.
- [48] A. E. Gumrukcuoglu, C. R. Contaldi and M. Peloso, Inflationary perturbations in anisotropic backgrounds and their imprint on the CMB // JCAP (2007) **0711**, 005, arXiv:0707.4179.
- [49] K. Hinterbichler, J. Khoury, The pseudo-conformal Universe: scale invariance from spontaneous breaking of conformal symmetry // JCAP (2012) **1204**, 023, arXiv:1106.1428
- [50] M.Fierz, Force-free particles with any spin // Helv.Phys.Acta (1939) **12**, 3
- [51] M.Fierz and W.Pauli, On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field // Proc.Roy.Soc. (1939) **173**, 211

- [52] A.Logunov, Relativistic Theory of Gravity // Commack, USA: Nova Sci. Publ. (1998) 114 p.
- [53] G.t'Hooft, Unitarity in the Brout-Englert-Higgs Mechanism for Gravity // arXiv:0708.3184.
- [54] V.Rubakov, Lorentz-violating graviton masses: Getting around ghosts, low strong coupling scale and VDVZ discontinuity // hep-th/0407104
- [55] S.Dubovsky, Phases of massive gravity // JHEP (2004) **0410**, 076, hep-th/0409124.
- [56] S.Dubovsky, P.Tinyakov and I.Tkachev, Massive graviton as a testable cold dark matter candidate // Phys.Rev.Lett. (2005) 94, 181102, hep-th/0411158.
- [57] S.Dubovsky, P.Tinyakov and I.Tkachev, Cosmological attractors in massive gravity // Phys.Rev. D (2005) 72, 084011, hep-th/0504067.
- [58] В.А.Рубаков, П.Г.Тиняков, Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитон // УФН (2008) 178, 785-822, [Phys.Usp. (2008) **51**, 759-792], arXiv:0802.4379.
- [59] N.Arkani-Hamed, H.Georgi and M.D.Schwartz, Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space // Ann.Phys. (2003) **305**, 96, hep-th/0210184.
- [60] M.Porrati, Higgs phenomenon for 4-D gravity in anti-de Sitter space // JHEP (2002) **04**, 058, hep-th/0112166.
- [61] J.Bekenstein, Phase Coupling Gravitation: Symmetries and Gauge Fields // Phys.Lett. (1988) **B202**, 497
- [62] J.Bekenstein, Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm // Phys.Rev. (2004) **D70**, 083509, astro-ph/0403694.

- [63] J.Bekenstein, Modified gravity vs dark matter: Relativistic theory for MOND // PoS **JHW2004** (2005) 012, astro-ph/0412652.
- [64] A.Vainshtein, To the problem of nonvanishing gravitation mass // Phys.Lett. (1972) **B39**, 393.
- [65] H. van Dam and M.J.C.Veltman, Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields // Nucl.Phys. (1970) **B22**, 397.
- [66] В.И.Захаров, Линеаризованная теория гравитации и масса гравитона // Письма в ЖЭТФ (1970) том 12, вып. 9, 447-449, [JETP Lett. (1970) **12**, 312].
- [67] P.van Nieuwenhuizen, On ghost-free tensor Lagrangians and Linearized Gravitation // Nucl.Phys. (1973) **B60**, 478-492.
- [68] D.G.Boulware and S.Deser, Can gravitation have a finite range? // Phys. Rev. D (1972) **6** 3368
- [69] J.Bjorken, A Dynamical origin for the electromagnetic field // Ann.Phys. (1963) **24**, 174.
- [70] J.Bjorken, Emergent gauge bosons // hep-th/0111196.
- [71] S.Coleman, S.Glashow, High-energy tests of Lorentz invariance // Phys.Rev. (1999) **D59**, 116008, hep-ph/9812418
- [72] V.A.Kostelecky and S.Samuel, Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory // Phys.Rev. (1989) **D39**, 683.
- [73] V.A.Kostelecky and R.Potting, CPT and strings // Nucl.Phys. (1991) **B359**, 545.
- [74] D.Colladay and V.A.Kostelecky, CPT violation and the standard model // Phys.Rev. (1997) **D55**, 6760.

- [75] D.Colladay and V.A.Kostelecky, Lorentz violating extension of the standard model // Phys.Rev. (1998) **D58**, 116002.
- [76] J. W. Moffat, Spontaneous violation of Lorentz invariance and ultrahigh- energy cosmic rays // Int. J. Mod. Phys. D (2003) **12**, 1279 , hep-th/0211167.
- [77] D. Colladay, Theoretical overview of Lorentz and CPT violation // AIP Conf. Proc. (2003) **672**, 65, hep-ph/0301223.
- [78] O. Bertolami, R. Lehnert, R. Potting, A. Ribeiro, Cosmological acceleration, varying couplings, and Lorentz breaking // Phys. Rev. D (2004) **69**, 083513, astro-ph/0310344.
- [79] S. M. Carroll and E. A. Lim, Lorentz-violating vector fields slow the universe down // Phys. Rev. D (2004) **70**, 123525, hep-th/0407149.
- [80] O. Bertolami and J. Paramos, The Flight of the bumblebee: Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking // Phys. Rev. D (2005) **72**, 044001, hep-th/0504215.
- [81] R. Bluhm and V. A. Kostelecky, Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity // Phys. Rev. D (2005) **71**, 065008, hep-th/0412320.
- [82] R. Bluhm, Overview of the SME: Implications and phenomenology of Lorentz violation // Lect. Notes Phys. (2006) **702**, 191, hep-ph/0506054.
- [83] R. Bluhm, Nambu-goldstone modes in gravitational theories with spontaneous Lorentz breaking // Int. J. Mod. Phys. D (2008) **16**, 2357, hep-th/0607127.
- [84] R. Bluhm, Effects of spontaneous Lorentz violation in gravity // PoS QG-PH (2007) 009, arXiv:0801.0141.
- [85] P. G. Ferreira, B. M. Gripiaios, R. Saffari and T. G. Zlosnik, The Cosmology of a Universe with Spontaneously-Broken Lorentz Symmetry // Phys. Rev. D (2007) **75**, 044014, astro-ph/0610125.

- [86] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, Dynamical Lorentz and CPT symmetry breaking in a 4D four-fermion model // Phys. Rev. D (2008) **77**, 105002, arXiv:0709.2904.
- [87] Arianto, F. P. Zen, B. E. Gunara, Tryanta and Supard, Some Impacts of Lorentz Violation on Cosmology // JHEP (2007) **09**, 048, arXiv:0709.3688.
- [88] J. W. Moffat and V. T. Toth, Modified Gravity: Cosmology without dark matter or Einstein's cosmological constant // arXiv:0710.0364.
- [89] R. Bluhm, S. H. Fung and V. A. Kostelecky, Spontaneous Lorentz and Diffeomorphism Violation, Massive Modes, and Gravity // Phys. Rev. D (2008) **77**, 065020, arXiv:0712.4119.
- [90] V. A. Kostelecky and N. Russell, Data tables for Lorentz and CPT violation // Rev. Mod. Phys. (2011) 83, 11-31, arXiv:0801.0287.
- [91] S. M. Carroll, Aether compactification // Phys. Rev. D (2008) **78**, 044047, arXiv:0802.0521.
- [92] R. Bluhm, N. L. Gagne, R. Potting and A. Vrublevskis, Constraints and Stability in Vector Theories with Spontaneous Lorentz Violation // Phys. Rev. D (2008) **77** 125007, arXiv:0802.4071.
- [93] L. Grisa, Lorentz-violating massive gravity in curved space // JHEP (2008) **0811**, 023, arXiv:0803.1137.
- [94] R. Obousy and G. Cleaver, Radius destabilization in five dimensional orbifolds from Lorentz violating fields // Mod.Phys.Lett. A (2009) 24, 1495-1506, arXiv:0805.0019.
- [95] Z.Berezhiani and O.Kancheli, Spontaneous Breaking of Lorentz-Invariance and Gravitons as Goldstone Particles // arXiv:0808.3181

- [96] E.Kiritsis and V.Niarchos, Interacting String Multi-verses and Holographic Instabilities of Massive Gravity // Nucl.Phys. B (2009) **812**, 488-524, arXiv:0808.3410
- [97] P.Horava, Quantum Gravity at a Lifshitz Point // Phys. Rev. D (2009) **79**, 084008, arXiv:0901.3775.
- [98] P.Horava, Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point // Phys. Rev. Lett. (2009) **102**, 161301 arXiv:0902.3657
- [99] M.Libanov, S.Mironov, V.Rubakov, Properties of scalar perturbations generated by conformal scalar field // Prog. Theor. Phys. Suppl. (2011) **190**, 120-134, arXiv:1012.5737.
- [100] M.Libanov, S.Mironov, V.Rubakov, Non-Gaussianity of scalar perturbations generated by conformal mechanisms // Phys. Rev. D (2011) **84**, 083502, arXiv:1105.6230.
- [101] S.Mironov, Pseudo-conformal Universe: late-time contraction and generation of tensor modes // Phys. Rev. D (2013) **87**, 043526, arXiv:1211.0262.
- [102] A.Mironov, S.Mironov, A.Morozov and And.Morozov, Resolving Puzzles of Massive Gravity with and without violation of Lorentz symmetry // Class. Quant. Grav. (2010) **27**, 125005, arXiv:0910.5243.
- [103] A.Mironov, S.Mironov, A.Morozov and And.Morozov, Linearized Lorentz-Violating Gravity and Discriminant Locus in the Moduli Space of Mass Terms // J. Phys. (2010) A **43**, 055402, arXiv:0910.5245.
- [104] F. Vernizzi, Cosmological perturbations from varying masses and couplings // Phys. Rev. D (2004) **69**, 083526, astro-ph/0311167.
- [105] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, The Galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. D (2009) **79**, 064036, arXiv:0811.2197.

- [106] X. Chen, B. Hu, M. x. Huang, G. Shiu and Y. Wang, Large Primordial Trispectra in General Single Field Inflation // JCAP (2009) **0908**, 008, arXiv:0905.3494.
- [107] T. Okamoto and W. Hu, The angular trispectra of CMB temperature and polarization // Phys. Rev. D (2002) **66**, 063008, astro-ph/0206155.
- [108] N. Kogo and E. Komatsu, Angular trispectrum of cmb temperature anisotropy from primordial non-gaussianity with the full radiation transfer function // Phys. Rev. D (2006) **73**, 083007, astro-ph/0602099.
- [109] D. H. Lyth, C. Ungarelli and D. Wands, The Primordial density perturbation in the curvaton scenario // Phys. Rev. D (2003) **67**, 023503, astro-ph/0208055.
- [110] N. Bartolo, S. Matarrese and A. Riotto, On nonGaussianity in the curvaton scenario // Phys. Rev. D (2004) **69**, 043503, hep-ph/0309033.
- [111] D. H. Lyth and Y. Rodriguez, The Inflationary prediction for primordial non-Gaussianity // Phys. Rev. Lett. (2005) **95**, 121302, astro-ph/0504045.
- [112] M. Sasaki, J. Valiviita and D. Wands, Non-Gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model // Phys. Rev. D (2006) **74**, 103003, astro-ph/0607627.
- [113] M. Zaldarriaga, Non-Gaussianities in models with a varying inflaton decay rate // Phys. Rev. D (2004) **69**, 043508, astro-ph/0306006.
- [114] T. Suyama and M. Yamaguchi, Non-Gaussianity in the modulated reheating scenario // Phys. Rev. D (2008) **77**, 023505, arXiv:0709.2545.
- [115] K. Ichikawa, T. Suyama, T. Takahashi and M. Yamaguchi, Primordial Curvature Fluctuation and Its Non-Gaussianity in Models with Modulated Reheating // Phys. Rev. D (2008) **78**, 063545, arXiv:0807.3988.

- [116] N. Bartolo, M. Fasiello, S. Matarrese and A. Riotto, Large non-Gaussianities in the Effective Field Theory Approach to Single-Field Inflation: the Trispectrum // JCAP (2010) **1009**, 035, arXiv:1006.5411.
- [117] D. Seery, J. E. Lidsey and M. S. Sloth, The inflationary trispectrum // JCAP (2007) **0701**, 027, astro-ph/0610210.
- [118] X. Chen, M. x. Huang and G. Shiu, The Inflationary Trispectrum for Models with Large Non-Gaussianities // Phys. Rev. D (2006) **74**, 121301, hep-th/0610235.
- [119] D. Seery and J. E. Lidsey, Non-Gaussianity from the inflationary trispectrum // JCAP (2007) **0701**, 008, astro-ph/0611034.
- [120] F. Arroja and K. Koyama, Non-gaussianity from the trispectrum in general single field inflation // Phys. Rev. D (2008) **77**, 083517, arXiv:0802.1167.
- [121] C. T. Byrnes, K. Y. Choi and L. M. H. Hall, Large non-Gaussianity from two-component hybrid inflation // JCAP (2009) **0902**, 017, arXiv:0812.0807.
- [122] X. Gao, M. Li and C. Lin, Primordial Non-Gaussianities from the Trispectra in Multiple Field Inflationary Models // JCAP (2009) **0911**, 007, arXiv:0906.1345.
- [123] D. Langlois and L. Sorbo, Primordial perturbations and non-Gaussianities from modulated trapping // JCAP (2009) **0908**, 014, arXiv:0906.1813.
- [124] K. Izumi, T. Kobayashi and S. Mukohyama, Non-Gaussianity from Lifshitz Scalar // JCAP (2010) **1010**, 031, arXiv:1008.1406.
- [125] X. Gao and C. Lin, On the primordial trispectrum from exchanging scalar modes in general multiple field inflationary models // JCAP (2010) **1011**, 035, arXiv:1009.1311.
- [126] L. Senatore and M. Zaldarriaga, The Effective Field Theory of Multifield Inflation // JHEP (2012) **1204**, 024, arXiv:1009.2093.

- [127] S. Mizuno and K. Koyama, Trispectrum estimator in equilateral type non-Gaussian models // JCAP (2010) **1010**, 002, arXiv:1007.1462.
- [128] P. Creminelli, G. D'Amico, M. Musso, J. Norena and E. Trincherini, Galilean symmetry in the effective theory of inflation: new shapes of non-Gaussianity // JCAP (2011) **1102**, 006, arXiv:1011.3004.
- [129] D. Seery, M. S. Sloth and F. Vernizzi, Inflationary trispectrum from graviton exchange // JCAP (2009) **0903**, 018, arXiv:0811.3934.
- [130] F. Arroja, S. Mizuno, K. Koyama and T. Tanaka, On the full trispectrum in single field DBI-inflation // Phys. Rev. D (2009) **80**, 043527, arXiv:0905.3641.
- [131] D. Gorbunov, V. Rubakov, Introduction to the theory of the early universe: Hot big bang theory // Hackensack, USA: World Scientific (2011) 473p
- [132] D. Gorbunov, V. Rubakov, Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory // Hackensack, USA: World Scientific (2011) 489p
- [133] А.Ю.Морозов, Теория струн – что это такое? // УФН (1992) 162 (8), 83И1175, [Sov. Phys. Usp. (1992) **35** 671-714].
- [134] A.D.Dolgov and I.B.Khriplovich, Velocity of signal in attractive potential and propagation of light in gravitational field // Phys. Lett. A (1998) **243**, 117, hep-th/9708056.
- [135] S.Liberati, S.Sonego and M.Visser, Faster than c signals, special relativity, and causality // Ann. Phys. (2002) **298**, 167, gr-qc/0107091.
- [136] T.J.Hollowood and G.M.Shore, Causality and Micro-Causality in Curved Spacetime // Phys. Lett. B (2007) **655**, 67, arXiv:0707.2302.
- [137] T.J.Hollowood and G.M.Shore, The Refractive index of curved spacetime: The Fate of causality in QED // Nucl. Phys. B (2008) **795**, 138, arXiv:0707.2303.

- [138] T.J.Hollowood and G.M.Shore, The Causal Structure of QED in Curved Spacetime: Analyticity and the Refractive Index // JHEP (2008) **0812**, 091, arXiv:0806.1019.
- [139] B.L.Van der Waerden, Algebra I, II // Springer-Verlag, 1967, 1971.
- [140] S.Lang, Algebra // Springer.
- [141] V.Dolotin and A.Morozov, Introduction to Non-Linear Algebra // World Scientific, 2007, hep-th/0609022.