

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ворончихин Илья Вячеславович

**Рождение медиаторов темной материи  
в экспериментах с фиксированной мишенью**

Специальность 1.3.3. — Теоретическая физика

*Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:  
кандидат физ.-мат. наук,  
Кирпичников Д. В.

Москва — 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
<b>Глава 1. Темная материя</b> .....	<b>13</b>
1.1 Экспериментальные свидетельства .....	13
1.1.1 Ротационные кривые .....	13
1.1.2 Крупномасштабная структура Вселенной .....	14
1.1.3 Гравитационное линзирование .....	16
1.1.4 Космическое микроволновое излучение .....	19
1.2 Современное космологическое представление .....	21
1.2.1 Уравнение Фридмана.....	21
1.2.2 Термодинамические параметры и эффективные степени свободы .....	23
1.2.3 Термальная история темной материи .....	28
1.3 Модели медиаторов темной материи.....	35
1.3.1 Скалярный медиатор.....	36
1.3.2 Тензорный медиатор.....	37
<b>Глава 2. Рождение медиатора темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью</b> .....	<b>44</b>
2.1 Сечение рождения медиатора на ядре.....	44
2.1.1 Излучение медиатора в методе Вайцзеккера-Вильямса .....	45
2.1.2 Форм-фактор .....	50
2.1.3 Интегрирование по углу двойного дифференциального сечения Вайцзеккера-Вильямса .....	57
2.2 Сечение аннигиляции через медиатор .....	58
2.2.1 Аннигиляция в темную материю через медиатор.....	60
2.2.2 Аннигиляция в лептон-антилептонную пару через медиатор.	62
<b>Глава 3. Ограничения на параметры темной материи из экспериментов с фиксированной мишенью</b> .....	<b>64</b>
3.1 Лептонные эксперименты по поиску темной материи .....	64
3.1.1 Коллайдерные эксперименты.....	64
3.1.2 Эксперименты с фиксированной мишенью .....	65
3.2 Сечение излучения темной материи .....	70
3.2.1 Дифференциальное сечение медиаторов на ядре .....	70

3.2.2	Полное сечение рождения медиаторов на ядре.....	74
3.3	Реликтовая плотность темной материи.....	76
3.3.1	Скалярный медиатор.....	76
3.4	Ограничения на константу взаимодействия.....	78
3.4.1	Ограничения для скалярного медиатора.....	81
3.4.2	Ограничения для тензорного медиатора.....	83
<b>Заключение</b> .....		<b>86</b>
<b>Приложение А. Выражения для сечений и матричных</b>		
	<b>элементов</b> .....	<b>89</b>
A.1	Матричные элементы и сечения.....	89
A.1.1	Система единиц измерения .....	89
A.1.2	Матричные элементы.....	89
A.1.3	Сечения рождения медиатора на ядре .....	91
A.1.4	Сечения аннигиляции через медиатор .....	91
A.1.5	Интегралы в методе Вайцзеккера-Вильямса .....	93
<b>Список литературы</b> .....		<b>96</b>

## Введение

### Степень разработанности темы исследования

Наиболее успешной моделью для описания природы частиц является Стандартная модель [1], которая позволяет структурировать взаимодействия и фундаментальные частицы [2]. Однако, Стандартная модель не полностью объясняет все явления, в частности, ускоренное расширение и массовый состав Вселенной [3; 4]. Первые идеи о необходимости введения дополнительной невидимой компоненты материи во Вселенной возникли в 1930-х годах [5], далее эти идеи окончательно стали частью фундаментальной физики в 1970-х [6]. Кроме того, изучение гравитационного линзирования позволило обнаружить дополнительные эффекты, в частности, то что частицы темной материи достаточно слабо взаимодействуют друг с другом при столкновении двух скоплений [7; 8]. Также, крупномасштабная структура Вселенной [9; 10] и фоновое реликтовое излучение [11; 12] мотивируют разработку моделей новой физики и позволяют получить дополнительные ограничения на параметры моделей темной материи.

На текущий момент стандартным способом описания эволюции Вселенной является модель  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) [13], где рассматривается холодная темная материя, постулируется космологический принцип о однородности и изотропности Вселенной на больших масштабах [14], а ее ускоренное расширение описывается космологической постоянной [15]. Также стоит отметить, что модель  $\Lambda$ CDM может быть дополнена теорией инфляции [16–18], т. е. экспоненциальным расширением Вселенной [19; 20], это позволяет воспроизвести ее крупномасштабную структуру.

Предположение, что темная материя достигает теплового равновесия с частицами видимого сектора в ранней Вселенной, позволяет определить характерную область в пространстве параметров темной материи. Действительно, в этом случае можно построить соответствующие кривые реликтовой плотности темной материи, которые отражают зависимость константы взаимодействия медиатора с частицами стандартной модели от массы медиатора при наблюдаемой в настоящий момент плотности темной материи во Вселенной. В частности, WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) с характерными массами вы-

ше  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ достаточно сильно ограничены из данных экспериментов по прямому обнаружению [21–23], что мотивирует исследования в области легкой термальной темной материи, однако, теоретические расчеты ее реликтовой плотности противоречат наблюдениям [24; 25]. Избыточной реликтовой плотности в сценариях с легкими WIMP можно избежать путем введения нового порталного взаимодействия, где через медиатор темной материи может происходить взаимодействие видимого и темного секторов. В частности, в качестве медиаторов темной материи используются новые гипотетические массивные частицы такие как: скаляр [26; 27], вектор [28; 29], псевдоскаляр [30; 31] тензорный медиатор [32; 33] и фермион [34; 35]. Кроме того, также рассматриваются модели миллизаряженной [36; 37] и дипольной [38; 39] связи, где в качестве медиатора может выступать фотон Стандартной Модели. Также стоит подчеркнуть, что отсутствие подавления по скорости в полном сечении  $s$ -волновой аннигиляции легкой темной материи через медиатор приводит к значительным ограничениям из космического микроволнового излучения [4; 12].

Другой способ возникновения наблюдаемой плотности темной материи возможен через сценарии с FIMP (Feebly Interacting Massive Particle), где их начальное количество в ранней Вселенной пренебрежимо мало [40]. В этом случае плотность частиц темной материи медленно увеличивается за счет достаточно слабых взаимодействий медиаторов с термальной компонентой частиц Стандартной модели [41]. Отметим, что можно также предположить существование моделей со сверхтяжелой темной материей, массы которой на несколько порядков меньше планковской массы. Однако, согласно наблюдаемой плотности темной материи, данный тип частиц не может иметь термальный контакт с видимой материей в ранней Вселенной [42]. Кроме того, из-за большого времени жизни таких частиц, обнаружение данного типа темной материи в прямых экспериментах достаточно осложнено [43; 44]. Также следует отметить, что распады таких частицы могут объяснить наблюдаемый поток частиц из космоса со сверхвысокими энергиями [44].

Поиск медиаторов в области масс легкой темной материи в характерном интервале  $\mathcal{O}(1)$  МэВ до  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ хорошо мотивирован для экспериментов с фиксированной мишенью из-за комбинирования преимуществ высоких интенсивностей и достаточно большой энергии налетающего на мишень пучка

заряженных лептонов ( $l = e, \mu$ ) [45]. Отметим, что для описания рождения медиатора темной материи при торможении высокоэнергетического лептона в поле тяжелого покоящегося ядра удобно использовать приближение Вайцзеккера-Вильямса [46–49]. Приближение Вайцзеккера-Вильямса с точностью на уровне  $\lesssim \mathcal{O}(1)\%$  относительно прямых расчетов на древесном уровне, позволяет описать рождение медиатора на ядре в экспериментах с фиксированной мишенью [50; 51]. Электромагнитное взаимодействие налетающих частиц с адронами можно описать с помощью параметризации вершины через форм-факторы ядер [52].

В общем случае, сечение рождения медиатора при рассеянии заряженного лептона на ядре складывается из упругой и неупругой компоненты сечения [47; 48; 50]. Неупругий вклад пропорционален заряду ядра  $Z$  и подавляется относительно упругого вклада в  $Z$  раз, т.е. для тяжелых ядер мишени с  $Z \propto \mathcal{O}(100)$  неупругим вкладом можно пренебречь [51]. В данном исследовании будет использовано приближение Вайцзеккера-Вильямса для вычисления тормозного сигнала рождения медиаторов,  $l + N \rightarrow l + N + \text{MED}(\rightarrow \text{DM} + \text{DM})$  как в существующих (NA64e и NA64 $\mu$ ), так и в планируемых экспериментах с фиксированной мишенью (LDMX и M<sup>3</sup>).

Следует также отметить, что при падении высокоэнергетического электрона на мишень, существует дополнительный канал аннигиляции вторичных позитронов электромагнитного ливня на атомных электронах в темную материю,  $e^+e^- \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM} + \text{DM}$  [53; 54].

Отсутствие сигнала рождения темной материи как в тормозном, так и в аннигиляционном канале, позволяет получить ограничения на параметры модели темной материи с медиаторами в существующих экспериментах, либо оценить чувствительность к ее поиску в планируемых установках с фиксированной мишенью.

## Актуальность исследования

При исследовании динамики астрофизических объектов возникли противоречия между наблюдениями и теоретическими предсказаниями их поведения в гравитационно-обусловленных явлениях. Это расхождение привело к необхо-

димости разработки сценариев новой физики за рамками Стандартной модели. Разрешение полученного несоответствия возможно с помощью введения скрытой доминирующей материальной компоненты Вселенной – темной материи, идея которой в текущий момент является превалирующей над другими подходами, в частности, модификации ньютоновской теории гравитации. Однако, поиски частиц темного сектора усложняет то, что темная материя явно проявляет себя только через гравитационные явления на астрофизических масштабах и, следовательно, для ее описания необходимо построение новых сценариев в смежных областях, таких как физика элементарных частиц и космология. В частности, такое положение приводит к тому, что астрофизические свидетельства темной материи дают оценку ее плотности во Вселенной из ее влияния на видимую материю. Однако, данные наблюдения не фиксируют природу частиц темной материи. Кроме того, достаточно сильные ограничения для слабодействующих массивных частиц в прямых экспериментах в области масс  $\gtrsim \mathcal{O}(1)$  ГэВ приводит к необходимости рассмотрения легкой термальной темной материи и ее медиаторов для масс  $\lesssim \mathcal{O}(1)$  ГэВ. Для исследования пространства параметров таких моделей наиболее чувствительными могут являться эксперименты с фиксированной мишенью. Получение ограничений на свойства легкой термальной темной материи в контексте текущих и планируемых экспериментов с фиксированной мишенью является значимым и актуальным направлением фундаментальной физики, а именно Стандартной модели фундаментальных взаимодействий элементарных частиц и ее расширений, обусловленные проблемой темной материи. Объектом исследования является пространство параметров темной материи, а предметом исследования рождение медиаторов темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью.

## **Цели и задачи работы.**

Получить ограничения на пространство параметров моделей темной материи на основе отсутствия сигнальных событий рождения медиаторов темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью. Данная цель разбивается на следующие задачи.

1. Получить ограничения на константу взаимодействия лептона и тензорного медиатора при торможении заряженного лептона в поле тяжелых ядер фиксированной мишени в случае различных моделей форм-факторов [55].
2. Найти ограничения на константу взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов с электроном при аннигиляции вторичных позитронов в мишени для электронного и позитронного первичных пучков для различных типов темной материи [56].
3. Рассчитать кривые реликтовой плотности для дираковской, майорановской, скалярной и векторной термальной темной материи в случае скалярного медиатора, взаимодействующего преимущественно с электроном [57].

## Методика исследования

При выполнении диссертационной работы использовались методы современной теоретической физики, в частности, квантовой теории и космологии для получения сечений соответствующих процессов и для расчета кривых реликтовой плотности темной материи. В данной работе используются общепринятая гипотеза о существовании легкой термальной темной материи и медиаторов различного спина, которые связывают ее с видимым сектором Стандартной Модели. На основе предположения об отсутствии сигнальных событий наблюдения темной материи в текущих и планируемых экспериментах с фиксированной мишенью, получены ограничения на пространство параметров темной материи и оценена перспектива таких экспериментов обнаружить темную материю. Результаты, представленные в работе, получены путем численных вычислений и аналитических расчетов сечений с использованием программы Wolfram Mathematica и ее пакета FeynCalc, соответственно.

## Положения, выносимые на защиту

1. Оценена чувствительность планируемых и текущих экспериментов с фиксированной мишенью в пространстве параметров массы тензорного медиатора темной материи и его константы взаимодействия с лепто-



ном на основе отсутствия сигнала рождения темной материи при торможении высокоэнергетического заряженного лептона в поле тяжелого ядра на установках соответствующего типа. А именно, эксперимент NA64e при статистике в  $5 \times 10^{12}$  электронов, накопленных на мишени, позволит исключить дираковскую темную материю для масс медиатора  $m_G \lesssim 3 \times 10^{-1}$  ГэВ. В свою очередь, эксперимент LDMX позволит исключить дираковскую темную материю в интервале масс медиатора  $m_G \lesssim 6 \times 10^{-1}$  ГэВ при накоплении статистики в  $10^{15}$  электронов, накопленных на мишени.

2. Показано незначительное влияние моделей параметризации упругих атомных форм-факторов при расчете сечения рождения медиатора на ядре в приближении Вайцзеккера-Вильямса. В частности, показано, что для существующих экспериментов NA64e и NA64 $\mu$  относительная разница в сечениях для рассматриваемых моделей упругих атомных форм-факторов не превышает значения в  $\lesssim 5\%$ .
3. Для экспериментов NA64e и LDMX получены чувствительности в пространстве параметров скалярного и тензорного медиаторов на основе процессов резонансной аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени для различных типов легкой темной материи. Соответствующее резонансное усиление чувствительности для NA64e и LDMX происходит в диапазоне масс  $0.23 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{МЭД}} \lesssim 0.32 \text{ ГэВ}$  и  $0.11 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{МЭД}} \lesssim 0.13 \text{ ГэВ}$ , соответственно.
4. Получены характерные кривые реликтовой плотности темной материи для скалярного медиатора и различных типов легкой термальной темной материи. Показано, что эксперимент NA64e для текущей статистики в  $9.37 \times 10^{11}$  электронов, накопленных на мишени, позволяет исключить дираковскую и векторную легкую темную материю.

## Научная новизна работы

Научная новизна работы заключается в оценке текущих ограничений для скалярного и тензорного медиаторов на основе отсутствия сигнала в экспериментах с фиксированной мишенью, в частности.

1. Впервые получены ограничения на константу взаимодействия тензорного медиатора и заряженного лептона в экспериментах NA64e, NA64 $\mu$ , LDMX и M<sup>3</sup>, исходя из отсутствия сигналов рождения медиатора при рассеянии лептонов на ядрах мишени.
2. Впервые получены ограничения на константу взаимодействия электрона и тензорного медиатора в экспериментах NA64e и LDMX для процесса аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени в случае дираковской и скалярной темной материи.
3. Впервые показано, что различные модели параметризации упругих атомных форм-факторов незначительно влияют на сечение рождения медиатора темной материи на ядре, посчитанное в приближении Вайцзеккера-Вильямса. Как следствие, данные параметризации незначительно влияют на ограничения в пространстве параметров массы медиатора и его константы связи частицами стандартной модели.
4. Впервые получены кривые реликтовой плотности в случае скалярного медиатора для дираковской, скалярной и векторной термальной темной материи.
5. Впервые рассчитаны ограничения на константу взаимодействия скалярного медиатора и электрона из экспериментов NA64e, LDMX на основе отсутствия сигнала рождения такого медиатора при рассеянии заряженного лептона на ядрах мишени.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Полученные результаты имеют важное теоретическое значение для изучения Стандартной модели фундаментальных взаимодействий элементарных частиц и ее расширений, обусловленных проблемой темной материи. Действительно, на текущий момент темная материя является превалирующей теорией для понимания эволюции Вселенной и объяснения ряда существенных противоречий между наблюдениями и предсказаниями. Получение ограничений на пространство параметров темной материи позволяет приблизиться к пониманию ее природы, путем постепенного исключения кандидатов на роль скрытой материи. В частности, полученные оценки ограничений могут быть использова-

ны в текущих и планируемых экспериментах с фиксированной мишенью, что позволяет покрыть значительное пространство параметров легкой термальной темной материи.

## Основные публикации по теме диссертации

1. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing hidden spin-2 mediator of dark matter with NA64e, LDMX, NA64 $\mu$ , and M3 // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 11. — С. 115041. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.115041. — arXiv: 2210.00751 [hep-ph].
2. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Resonant probing spin-0 and spin-2 dark matter mediators with fixed target experiments // Phys. Rev. D. — 2023. — Т. 107, № 11. — С. 115034. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.115034. — arXiv: 2304.14052 [hep-ph].
3. Probing hidden sectors with a muon beam: Implication of spin-0 dark matter mediators for the muon (g-2) anomaly and the validity of the Weiszäcker-Williams approach / H. Sieber [и др.] // Phys. Rev. D. — 2023. — Т. 108, № 5. — С. 056018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.056018. — arXiv: 2305.09015 [hep-ph].
4. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing scalar, Dirac, Majorana, and vector dark matter through a spin-0 electron-specific mediator at electron fixed-target experiments // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 109, № 7. — С. 075012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.075012. — arXiv: 2312.15697 [hep-ph].

**Степень достоверности.** Основные статьи по теме диссертации были опубликованы в признанных международных изданиях, пройдя процедуру рецензирования. Достоверность результатов диссертационного исследования обуславливается использованием в нем апробированных в научной практике методов теоретической физики, а также их сравнением с уже известными результатами.

**Апробация работы.** Результаты работы были представлены на:

1. XXI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», ТПУ, 24.04.24, г. Томск с темой "Излучение тензорного медиатора темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью".
2. Научных семинарах 08.05.24 в Томском Политехническом Университете и 27.05.24 в Институте Ядерных Исследований РАН с темой диссертационного исследования.
3. Международном совещании от 13.12.22 коллаборации NA64 по теме "Probing spin-2 DM mediator with NA64e via resonant production  $e^+e^- \rightarrow G \rightarrow \chi\chi$ ".

**Личный вклад автора.** Постановка задач и методов реализации осуществлялась автором диссертации совместно с научным руководителем. Все расчеты в диссертационном исследовании выполнены непосредственно соискателем.

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 117 страниц с 10 рисунками и 0 таблицами. Список литературы содержит 202 наименования.

## Глава 1

# Темная материя

Начиная с 1930-х для описания поведения ряда астрофизических наблюдений была необходима идея о существовании дополнительной скрытой материи. Кроме того, предположение о взаимодействии темной материи с частицам Стандартной модели в ранней Вселенной приводит к тому, что ее пространство параметров лежит в области чувствительности текущих и планируемых экспериментов. Далее, для исключения моделей темной материи можно использовать комбинацию отсутствия сигнала в экспериментах и реликтовых кривых темной материи. Однако, достаточно сильные ограничения в пространстве параметров тяжелой темной материи приводит к необходимости рассмотрения легкой темной материи и дополнительного порталного взаимодействия.

### 1.1 Экспериментальные свидетельства

Все экспериментальные свидетельства существования темной материи основаны на астрофизических гравитационных эффектах, которые невозможно объяснить используя только видимую материю. В данном разделе описаны основные экспериментальные наблюдения, на основе которых вводится понятие темной материи.

#### 1.1.1 Ротационные кривые

При изучении красного смещения в 1931 году Эдвином Хабблом и Милтоном Хьюмасоном был замечен большой разброс скоростей видимых объектов в астрофизических скоплениях [58]. Однако, анализ астрофизических объектов в то время осложняется тем, что неизлучающие объекты не поддавались наблюдению за исключением их гравитационного влияния на другие объекты в скоплениях. Развивая проблему разброса скоростей, в 1933 году Фриц Цвикки на основе анализа скопления Кома показал большое расхождение между массами видимых астрофизических объектов и оценкой их массы на основе измеренной скорости, рассматривая галактики как стабильную и изолированную систему. Полученные результаты приводили к выводу, что для разрешения рас-

хождения с рассчитанной массовой плотностью и удержания видимой массы в астрофизических скоплениях необходимо предположить существование огромного количества невидимой или скрытой материи, которая была названа темной материей [5; 59]. Действительно, предполагая сферически симметричное распределение  $N$  астрофизических объектов с одинаковой массой  $m$ , теорема о вириале для потенциальной энергии, которая задана как  $n$ -степень от расстояния, и оценка массы скопления  $M = Nm$  принимают вид, соответственно [5]:

$$2 \langle T \rangle = n \langle U \rangle, \quad M \sim (1/G) \langle v^2 \rangle / \langle 1/r \rangle,$$

где  $\langle 1/r \rangle$  - средний обратный радиус,  $\langle v^2 \rangle$  - среднее квадрата скорости и  $G$  - гравитационная постоянная. Однако, результаты этой работы не были общепризнанными в научной среде тех лет и многими оспаривались [60].

В 1980 году Кент Форд и Вера Рубин опубликовали полученные зависимости скорости вращения звезд от расстояния до соответствующего центра галактики на основе свойств 21 спиральной галактики с широкими диапазонами массы и светимости. В частности, полученные экспериментальные наблюдения привели к выводу, что для поддержания высоких скоростей объектов с удалением от центра галактики необходимо соответствующее увеличение массы галактики с удалением от ее центра [6]. Однако, поведение ротационных кривых противоречит ньютоновской механике, согласно которой скорость объектов в галактике  $v$  зависит от радиуса  $r$  до центра галактики с массой  $M$  следующим образом  $v = \sqrt{GM/r}$  т.е. должна убывать с увеличением радиуса. Из вида ротационных кривых на графике 1.1 следует, что начиная с некоторого расстояния объектов галактики от ее центра скорость можно считать постоянной, что влечет зависимость массы галактики от расстояния до ее центра как  $M(r) \sim r$ .

### 1.1.2 Крупномасштабная структура Вселенной

Выводы на основе анализа ротационных кривых приводят к идее существования массивного гало, которое представляет собой распределение темной материи в аккреционный диск. Действительно, распределение плотности всей материи в спиральной галактике может быть представлено как сумма состоящего из видимой материи тонкого диска и сферически симметричного гало

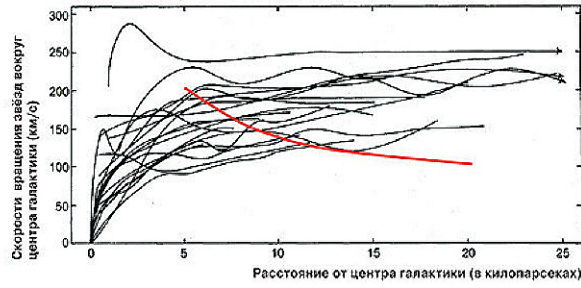


Рисунок 1.1 — Распределение скоростей объектов в галактиках в зависимости от расстояния до ее центра [6]. Красной линией показано теоретически предсказанное поведение скоростей в галактиках согласно ньютоновской механике без учета темной материи. Черными линиям соответствуют экспериментально полученные ротационные кривые.

темной материи [61]. Кроме того, сферическая симметрия распределения темной материи относительно гравитационного центра является следствием отсутствия диссипативных сил [7; 8; 62]. Масса гало для Млечного пути может быть оценена как:

$$M_{\text{halo}}(r) = 4\pi \int_0^{R_{\text{halo}}} \rho_{\text{DM}}(r)r^2 dr, \quad \rho_{\text{NFW}}(r) = \rho_0 \frac{r_s}{r} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^{-2},$$

где  $\rho_{\text{NFW}}(r)$  - распределение темной материи в модели Наварро-Френка-Уайта [63],  $r_s = 20$  кпк  $\approx 6.2 \times 10^{21}$  см - скалярный радиус,  $\rho_0$  - нормализованная плотность.

Неравномерность в распределении объектов во Вселенной была замечена еще в 1932 году [64], хотя на достаточно больших масштабах вселенная выглядела однородной. При дальнейшем изучении было получено, что Вселенная имеет кластерную структуру с большими пустотами и для формирования и удержания массы в ее скоплениях необходима темная материя [8], которая занимает около 85% от всей плотности материи во Вселенной. Также стоит упомянуть, что добавление гало темной материи к видимой материи при численном моделировании позволяет объяснить стабильность некоторых галактик [65; 66]. Для проверки предположений о структуре Вселенной используют численное моделирование, где используется неоднородность в ранней Вселенной для воссоздания крупномасштабной структуры. Можно предположить, что темная ма-

терия является горячей, однако на примере нейтрино с массами несколько эВ, моделирование не совпадает с наблюдаемой крупномасштабной структурой [9]. Однако, использование холодной темной материи при моделировании дает результат, который аналогичен с наблюдаемым распределением видимой материи во Вселенной [10; 67].

### 1.1.3 Гравитационное линзирование

Темная материя проявляет себя только косвенно через гравитационное воздействие на видимые астрофизические объекты. Однако, отклонение фотонов от прямолинейного распространения в искривлённом гравитационном пространстве позволяет анализировать распределение всей материи во Вселенной. В частности, при достаточной массе скопления астрофизических объектов может происходить эффект гравитационного линзирования, который по проявлению схож с оптическим эффектом. Также стоит упомянуть, что гравитационная линза является нечувствительной к природе частиц темной материи и, в отличие от оптической линзы, не имеет фокусной точки, но при этом у нее есть фокальная линия. Впервые гравитационное линзирование наблюдали в 1919 году во время солнечного затмения в скоплении Гиады, которое стало первым экспериментальным подтверждением общей теории относительности [68; 69].

Дальнейшим развитием экспериментальных свидетельств темной материи стала идея Фрица Цвикки, что гравитационное линзирование может возникать не только на солнце, но и на любом астрофизическом скоплении с необходимой массой [59]. Однако, в тот момент, когда была выдвинута эта идея, технических возможностей для наблюдения этого эффекта было недостаточно. В настоящий момент, гравитационное линзирование является наиболее универсальным методом для анализа распределения массы во Вселенной [70], что позволяет построить соответствующую карту распределения массы во Вселенной и получить ее крупномасштабную структуру.

Сильное гравитационное линзирование представляет собой случай, когда массы астрофизического скопления достаточно для создания нескольких изображений одного и того же источника позади скопления с точки зрения наблюдателя. В момент, когда источник находится прямо позади массивного скопления



относительно наблюдателя, возникает эффект колец Эйнштейна, который характеризуется углом Эйнштейна  $\theta_E$  в радианах следующим образом [71]:

$$\theta_E = \sqrt{2r_S D_{LS}} / \sqrt{D_S D_L} \sim \sqrt{M}, \quad D = x/\theta, \quad r_S = 2GM/c^2,$$

где  $x$  - физический диаметр объекта,  $\theta = 2 \arctan(x/(2D)) \sim x/D$  - угловой диаметр объекта,  $D_S$ ,  $D_L$  - расстояние по угловому диаметру для до источника и линзы соответственно,  $D_{LS}$  - расстояние по угловому диаметру между линзой и источником,  $r_S$  - радиус Шварцшильда [72],  $M$  - масса скопления, которое создает эффект сильного гравитационного линзирования. Из выражения для угла Эйнштейна видно, что эффект сильного гравитационного линзирования позволят измерять массу массивных скоплений. Первая сильная гравитационная линза была обнаружена в 1979 году с помощью радиотелескопа, где два квазара были на малом угловом расстоянии друг от друга с одинаковым красным смещением и спектром поглощения [73]. Улучшение технического оснащения в космических и наземных телескопах для астрофизических наблюдений позволило обнаружить эффект гравитационного линзирования для множества скоплений и определить их массу.

Далее, слабое гравитационное линзирование представляет собой эффект действия массивного скопления на расстоянии, при котором фотоны все еще отклоняются, но для проявления сильного линзирования недостаточно массы скопления. Большинство объектов во вселенной не подвергаются сильному гравитационному линзированию, вдали от ядра или скопления галактик свет очень слабо отклоняется от прямолинейного распространения. Однако, при слабом линзировании возникает сдвиг, который меняет наблюдаемую форму астрофизических объектов. Хотя эффект искажения для индивидуальных астрофизических объектов может быть незаметен, для обнаружения слабого линзирования можно использовать анализ большого количества объектов, находящихся рядом [74; 75]. Практически, слабое линзирование проявляет себя как некоторое выделенное направление вытянутости наблюдаемой формы астрофизических объектов, где двухмерность наблюдаемой картины дополняют расстоянием на основе измерения красного смещения от видимых объектов.

Также существует эффект гравитационного микролинзирования, при котором излучающие объекты становятся ярче в результате движения гравитационной линзы перед источником. Действительно, данный эффект дает важное следствие, что максимальная масса локальных сгустков темной материи не превышает массы нескольких порядков массы Луны [76]. В частности, данный эффект дает ограничения на использование первичных черных дыр как кандидатов на роль темной материи [77–79]. Однако, этот эффект осложняется непостоянством светимости некоторых типов звезд.

Эффект гравитационного линзирования проявляется для объектов с массой видимой материи, которой недостаточно для проявления этого эффекта, что указывает на присутствие темной материи. В частности, очень важным аргументом существования темной материи является скопление Пуля ( $1E0657-56$ ), которое состоит из двух групп галактик после их столкновения. Видимую материю в скоплении наблюдали с помощью рентгеновского излучения [7], а распределение массы всей материи получили на основе карты слабого гравитационного линзирования [8]. На фигуре 1.2 представлено составное изображение на основе измерений рентгеновского излучения и масс, откуда видно, что наибольшая плотность массы сосредоточена в областях, где нет видимой материи. Еще

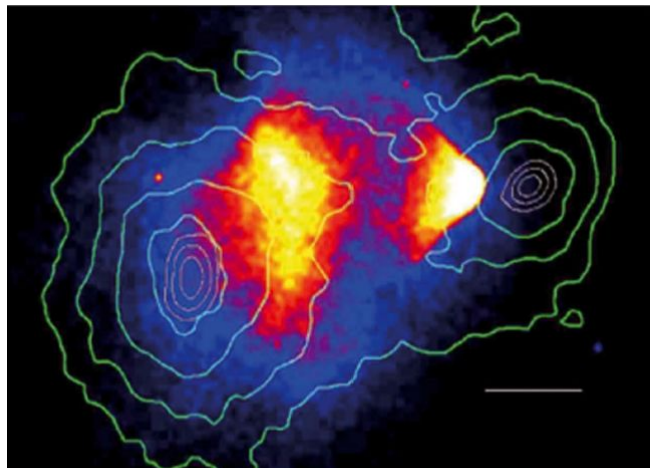


Рисунок 1.2 — Составное изображение скопления Пуля ( $1E0657-56$ ). Цветовой схемой обозначена карта рентгеновского излучения от скопления [7]. Изолиниями обозначено распределение масс в скоплении, которое получено на основе слабого линзирования [8]

одним важным следствием анализа скопления Пуля является ограничение на столкновение темной материи самой с собой, поскольку массовые центры столк-

нувшихся галактик не сильно деформированы. В частности, соответствующие ограничения на самовзаимодействие темной материи на основе анализа формы кластера Пули принимают вид [62]:

$$\sigma_{\text{self}}/m_{\text{DM}} < 10^{-24} \text{см}^2 \text{ГэВ}^{-1}.$$

Стоит упомянуть, что модифицированная теория гравитации может объяснить некоторые свидетельства темной материи [80; 81]. Однако, поведение темной материи кластера Пуля, в котором эффект слабого линзирования явно оказывается не привязан к видимой материи, сильно затрудняет подход модификации теории гравитации [8; 81].

### 1.1.4 Космическое микроволновое излучение

Предсказание о космическом микроволновом излучении было сделано в рамках изучения нуклеосинтеза в ранней Вселенной [82–84], обнаружение которого стало важным подтверждением следствия теории Большого взрыва [85]. При значении красного смещения  $z = 1090$  наступает эпоха рекомбинации, в которой происходит связывание электронов и протонов из первичной плазмы и, следовательно, космическая среда становится прозрачной для фотонов [86]. В обсерватории COBE (COsmic Background Explorer) было показано, что для космического фонового излучения анизотропия составляет  $\delta T/T \approx 10^{-5}$  из-за неравномерного распределения вещества в эпоху рекомбинации [87]. Также, полученная анизотропия была подтверждена в эксперимента WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [88]. Действительно, флуктуации в барионной первичной плазме приводят к неравномерной плотности вещества, которая усиливается гравитационным притяжением и ослабляется радиационным давлением, что приводит к барионным акустическим колебаниям в первичной плазме [89; 90]. Далее, анализируя двухточечную корреляционную функцию, для реликтового фонового излучения можно показать чувствительность поляризационного спектра для излучения к плотностям различных компонент Вселенной [11; 91].

Наблюдаемая анизотропия космического микроволнового излучения является чувствительной к инъекции дополнительной энергии в первичную плазму

ранней Вселенной. В частности, аннигиляция в видимый сектор темной материи в момент эпохи рекомбинации приводит к дополнительным ионизации и нагреву первичной плазмы [92]. Таким образом, наблюдаемая анизотропия фонового микроволнового излучения ограничивает термально усредненное сечение из влияния темной материи, сечение которой не подавлено по скорости, на первичную плазму как [4; 12; 93]:

$$\langle\sigma v\rangle_{\text{СМВ}} \lesssim \frac{3.6 \times 10^{-27} \text{см}^3 \text{с}^{-1}}{f(z, m_{\text{DM}})} \left( \frac{m_{\text{DM}}}{1 \text{ ГэВ}} \right),$$

где  $f(z, m_{\text{DM}})$  - эффективная доля энергии, которая инжектируется при аннигиляции темной материи и поглощается первичной плазмой;  $z$  - красное смещение и подразумевает отсутствие подавления сечения  $\sigma$  по скорости частиц темной материи. Однако, для оценки ограничений можно пренебречь зависимостью  $f(z, m_{\text{DM}})$  от красного смещения  $z$ , что подразумевает поглощение всей инжектированной энергии галактической средой с заданной эффективностью  $f(z) \simeq f_{\text{eff}}(m_{\text{DM}})$  [4; 92; 94]. Кроме того, в случае рассмотрения масс легкой темной материи и электронспецифического медиатора можно положить  $f_{\text{eff}}(m_{\text{DM}}) \simeq 1$  [95].

В случае легкой термальной темной материи отсутствие подавления по скорости для механизма истощения через медиатор может привести к противоречию с наблюдаемым спектром космического фонового излучения [4]. Для того чтобы избежать инжектированная дополнительной энергии в эпоху рекомбинации, можно рассмотреть асимметрию для масс частиц и античастиц темной материи. В этом случае частицы неэластичной темной материи переходят до эпохи рекомбинации в состояние с наименьшей массой, которое и формирует наблюдаемую реликтовую плотность темной материи. Действительно, достаточно большие значения для расщепления масс подавляют основной канал истощения и позволяют избежать ограничений из спектра космического излучения на темную материю, аннигилирующую в s-волну [96]. Кроме того, процессы коаннигиляции с частицами видимой материи переводят термально усредненное сечение рассеяния в эффективное, в котором учитываются возникающие дополнительные каналы и расщепление масс [97].

## 1.2 Современное космологическое представление

Для описания поведения материи в общей теории относительности используется действие Эйнштейна-Гильберта с дополнительными слагаемыми  $\mathcal{L}_M$ , которое описывает материю, и космологической постоянной  $\Lambda$  [15] в следующей форме:

$$S \supset \int dx^4 \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right), \quad (1.1)$$

где  $g^{\mu\nu}$  - метрика,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ;  $G$  - гравитационная постоянная; тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda;$$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  - скаляр Риччи;  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  - аффинная связность и  $\kappa = 8\pi G$ . Варьируя по метрике действие выше и полагая  $\delta S = 0$ , получим уравнение Эйнштейна и симметризованный тензор энергии-импульса (ТЭИ) в виде, соответственно:

$$R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M.$$

Приведенное выше уравнение Эйнштейна связывает геометрию пространства с материальным содержимым в ней. Далее, положив линейную зависимость плотности лагранжиана для материи от плотности энергии как  $\mathcal{L}_M = -\varepsilon$ , получим ТЭИ для идеальной жидкости [98; 99]:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

где  $u_\mu$  - 4-скорость;  $\varepsilon$  и  $P$  - суммы всех вкладов в плотности энергии и в давления Вселенной.

### 1.2.1 Уравнение Фридмана

Предположение об однородности и изотропности Вселенной, которые подтверждаются малой анизотропией космического фонового излучения [4], и расширения Вселенной по закону Хаббла [3] формируют космологический принцип [14]. Данным условиям в общем виде удовлетворяет метрика Фридмана,

которая выражается следующим образом [100]:

$$g_{\mu\nu} = (1, -a^2(t)\gamma_{ij}), \quad g^{\mu\nu} = (1, -1/a^2(t)\gamma^{ij}), \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$

где  $\gamma^{ij}$  - однородная и изотропная метрика;  $a(t)$  - масштабный фактор, характеризующий расширение Вселенной. Однородную и изотропную метрику можно записать в следующей форме [101–104]:

$$\gamma_{ij} = \left( \frac{R^2}{1 - kr^2}, R^2 r^2, R^2 r^2 \sin^2(\theta) \right),$$

где  $k = 0, 1, -1$  - плоскость, 3-сфера (закрытая) и 3-гиперболоид (открытая), соответственно и использованы координаты  $(\chi, \theta, \phi)$  с  $r = \sin(\chi)$  для 3-сферы заданного радиуса  $R$ ,  $r = \sinh(\chi)$  для 3-гиперболоида с заданными полуосями  $R$  и  $r = \chi$  для метрики Минковского в сферических координатах. Для введенной метрики символы Кристоффеля примут вид:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\sigma}}{2}(\partial_{\alpha}g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}g_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}), \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = -H(t)g_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = H(t)\delta_j^i, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

где  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  - параметр Хаббла [3; 4], который характеризует скорость расширения Вселенной.

Далее, используя метрику Фридмана, получим выражение для ненулевых компонент тензора Риччи и скаляра Риччи, соответственно:

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -\left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right) g^{ij}, \quad R = -6\left( \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right).$$

С учетом выражений  $T_0^0 = \varepsilon$  и  $T_i^i = -P\delta_j^i$ , уравнения Фридмана принимаю вид:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3},$$

которое позволяет описать эволюцию масштабного фактора во времени.

Используя параметр плотности  $\Omega_i = \varepsilon_i/\varepsilon_{cr}$ , получим первое уравнение Фридмана в виде:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda, \quad (1.4)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{(H_0 a_0)^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \varepsilon_{cr} = \frac{3H_0^2}{(8\pi G)},$$

где  $\varepsilon_{cr}$  - критическая плотность энергии, т.е. плотность в случае плоской Вселенной;  $H_0$ ,  $a_0$  - значения параметра Хаббла и масштабного фактора на текущий момент времени;  $\Omega_r$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_k$ ,  $\Omega_\Lambda$  - параметры плотности излучения, материи, кривизны и темной энергии, соответственно. Согласно современным наблюдениям [4]:

$$|\Omega_k| < 0.01, \quad \Omega_r = 9.4 \times 10^{-5}, \quad \Omega_b = 0.05, \quad \Omega_c = 0.27, \quad \Omega_\Lambda = 0.68, \quad (1.5)$$

где  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$ ;  $\Omega_b$ ,  $\Omega_c$  - плотности всей, видимой и холодной темной материи, соответственно, и использовано  $\varepsilon \sim a^{-3}$  в случае материи (нерелятивистский случай),  $\varepsilon \sim a^{-4}$  в случае излучения (релятивистский случай), справедливость которых можно увидеть в разделе 1.2.2. Из уравнения (1.4) видно, что на первых этапах доминировало излучение, далее материя, а на текущем этапе начинает доминировать темная энергия. Кроме того, принимая во внимание малое значение  $\Omega_k$ , можно считать, что Вселенная является плоской.

## 1.2.2 Термодинамические параметры и эффективные степени свободы

Из-за большого числа степеней свободы системы возникают статистические закономерности, которые позволяют описать систему независимо от поведения отдельных частиц. В частности, для описания используется функция распределения, которая для  $i$ -ого типа частиц с импульсом  $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$  в термодинамическом равновесии при температуре  $T_i$  принимает следующий вид [105]:

$$f_i(T_i, E_i) = g_i \left( e^{(E_i - \mu_i)/T_i} + \eta_i \right)^{-1} \approx g_i \left( e^{E_i/T_i} + \eta_i \right)^{-1},$$

где  $g_i$  - внутренние степени свободы;  $\eta_i = 1, -1, 0$  - статистика Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и Максвелла-Больцмана, соответственно, и  $\mu_i$  - химический потенциал. Далее, макроскопические параметры для  $i$ -ого типа частиц принимают соответствующее выражения [106]:

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_i(T_i, E) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 I(x_i, \eta_i), & P_i &= \int \frac{p^2}{3E} f_i(T_i, E) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \\ \varepsilon_i &= \int E f_i(T_i, E) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^4 J(x_i, \eta_i), & s_i &= \frac{\varepsilon_i + P_i}{T_i}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\xi = p_i/T_i$ ;  $x_i = m_i/T_i$ ;  $n_i$  - плотность частиц;  $\varepsilon_i$  - плотности энергии;  $P_i$  - давление;  $s_i$  - плотность энтропии и использованы обозначения:

$$I(x_i, \eta_i) = \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\exp(\sqrt{\xi^2 + x_i^2}) + \eta_i}, \quad J(x_i, \eta_i) = \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x_i^2} d\xi}{\exp(\sqrt{\xi^2 + x_i^2}) + \eta_i}.$$

Для дальнейших вычислений макроскопических параметров в различных приближениях будут полезны интегральные представления дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  и гамма-функции Эйлера  $\Gamma(n)$  [107]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x + 1}, \quad \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx.$$

### Термодинамические параметры темной материи

Далее, используя статистику Ферми-Дирака в случае горячей темной материи, для которой справедливо  $E \approx p$  и  $m_j \ll T_j$ , термодинамические параметры выражаются образом:

$$\begin{aligned} n_i &\approx \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 I(0, \eta_i) = (3/4)\zeta(3) \frac{g_i}{\pi^2} T_i^3, & \varepsilon_i &\approx \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 J(0, \eta_i) = (7/8)g_i \frac{\pi^2}{30} T_i^4, \\ P_i &\approx \frac{1}{3}\varepsilon_i, & s_i &\approx \frac{4\varepsilon_i}{3T_i} = (7/8)g_i \frac{2\pi^2}{45} T_i^3, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $T_j$  - температура отщепления  $j$ -ого типа частиц ( $T_j < T_i$ );  $\zeta(3)$  - постоянная Апери;  $\zeta(4) = \pi^4/90$ . Для статистики Бозе-Эйнштейна необходимо заменить



фермионные префакторы  $(3/4) \rightarrow 1$  для плотности частиц и  $(7/8) \rightarrow 1$  для плотности энергии.

Аналогично, для холодной темной материи выполняется соотношение  $m_j \gg T_j$ , тогда макроскопические параметры можно записать в следующем виде:

$$n_i \approx g_i \left( \frac{m_i T_i}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_i/T_i}, \quad \varepsilon_i \approx m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T_i \approx m_i n_i, \quad P_i \approx n_i T_i, \quad (1.8)$$

где справедливо  $\exp(E_i/T_i) \gg \eta_i$  т.е. использована статистика Максвелла-Больцмана и учтены выражения:

$$I(x, \eta_i) \approx \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\exp(x + \xi^2/(2x))} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2x)^{3/2} e^{-x},$$

$$J(x, \eta_i) \approx \int_0^\infty \frac{\xi^2 (x + \xi^2/(2x)) d\xi}{\exp(x + \xi^2/(2x))} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2x)^{3/2} \left( x + \frac{3}{2} \right) e^{-x},$$

Откуда видно, что связь давления, плотности частиц и температуры представляет собой классическое уравнение Менделеева-Клапейрона для идеального газа, а для давления и плотности энергии справедливо  $P_i/\varepsilon_i \ll 1$ .

### Степени свободы плотностей энергии и энтропии

Следующим этапом, суммируя по всем типам частиц для горячей первичной плазмы при температуре  $T$  в ранней Вселенной, получим полные плотности энергии и энтропии в виде, соответственно:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i = g_{*\varepsilon}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad s = \sum_i s_i = g_{*s}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3, \quad (1.9)$$

где число эффективных степеней свободы для плотностей энергии и энтропии принимают следующие выражения, соответственно:

$$g_{*\varepsilon}(T) = g_*^{\text{th}}(T) + g_{*\varepsilon}^{\text{dec}}(T), \quad g_{*s}(T) = g_*^{\text{th}}(T) + g_{*s}^{\text{dec}}(T), \quad (1.10)$$

степени свободы в термодинамическом равновесии для всех типов частиц:

$$g_*^{\text{th}}(T) = \sum_{\text{boson}} g_j \theta(T - T_j) + 7/8 \sum_{\text{fermion}} g_j \theta(T - T_j),$$

и после отщепления для плотностей энергии и энтропии в виде, соответственно:

$$g_{*\varepsilon}^{\text{dec}}(T) = \sum_{\text{boson}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \theta(T_j - T) + 7/8 \sum_{\text{fermion}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \theta(T_j - T),$$

$$g_{*s}^{\text{dec}}(T) = \sum_{\text{boson}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \theta(T_j - T) + 7/8 \sum_{\text{fermion}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \theta(T_j - T),$$

$T_j$  - температура отщепления  $j$ -ого типа частиц. Явный вид зависимости эффективных степеней свободы от температуры для частиц Стандартной модели может быть найден в работе [106]. Далее, кратко приведем основные этапы термальной истории Вселенной для частиц Стандартной модели. При температуре  $T$  выше  $v_{\text{EW}} \simeq 246$  ГэВ все частицы находятся в термодинамическом равновесии и  $g_{*\varepsilon}(T) = g_{*s}(T) = 106.75$ . Также стоит отметить, что при  $T \gtrsim m_e$  для степеней свободы справедливо  $g_{*\varepsilon}(T) \approx g_{*s}(T)$ . Первое падение значения числа эффективных степеней свободы возникает при уменьшении температуры  $T$  от  $m_t \simeq 173$  ГэВ до 20 ГэВ в связи с отделением бозонов слабого взаимодействия и  $t$ -кварка. Далее, происходит связывание кварков и глюонов и, следовательно, резкое падение числа эффективных степеней свободы от  $\Lambda_{\text{QCD}}$  до  $m_b = 4.7$  ГэВ, где  $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200$  МэВ - энергетическая шкала сильных взаимодействий. Действительно, на кварки и глюоны приходится наибольшее число степеней свободы. Также, небольшое падение значения числа эффективных степеней свободы происходит при температурах  $T$  ниже масс электрона и мюона, при которой соответствующие частицы отщепляются из термальной ванны. При уменьшении температуры фотонов ниже массы электрона, т.е. когда все частицы отделились,  $g_{*\varepsilon}(T)$  уменьшается до 3.36, а  $g_{*s}(T)$  до 3.94. При достижении значений температуры  $T \lesssim 1$  кэВ начинается первичный нуклеосинтез. При температуре  $T \simeq 0.4$  эВ Вселенная становится прозрачной для фотонов, что приводит к возникновению космического фонового излучения [42; 106].

## Связь полной плотности энергии и масштабного фактора

Далее, фиксируя  $\mu = 0$  в тождестве Бъянки  $\Delta_\nu T^{\mu\nu} = 0$  для тензора энергии-импульса (1.2), получим уравнение непрерывности  $\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0$ . Также, с учетом выражений излучения (1.7), материи (1.8) и  $\varepsilon = const$  для темной энергии, получим зависимость плотности энергии и давления от масштабного фактора как, соответственно:

$$\varepsilon \sim a^{-3(1+\omega)}, \quad P \sim \omega\varepsilon,$$

где  $\omega = 0$  в случае материи,  $\omega = 1/3$  для излучения,  $\omega = -1$  в случае темной энергии. Откуда видно, что темная энергия обладает отрицательным давлением.

## Связь времени и температуры

Предполагая термодинамическое равновесие в первичной плазме ранней Вселенной, из второго закона термодинамики в следующем виде:

$$d\varepsilon = Tds + (Ts - P - \varepsilon)dV/V,$$

и уравнения непрерывности получим уравнение на плотность энтропии, закон сохранения полной энтропии и связь постоянной Хаббла с температурой, соответственно:

$$\dot{s} + 3Hs = 0, \quad g_{*s}T^3 a^3 = const, \quad H(t) = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}, \quad (1.11)$$

где было предположена независимость числа эффективных степеней свободы от температуры. С учетом уравнения Фридмана (1.4), постоянная Хаббла связана с параметром  $x$  как [108]:

$$H(t) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\varepsilon} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_{*\varepsilon}}{10} \frac{T^2}{M_{Pl}}} = \frac{H(m)}{x^2}, \quad (1.12)$$

где  $x = m/T$ ,  $G$  - гравитационная постоянная,  $M_{Pl} = \sqrt{1/(8\pi G)}$  - редуцированная масса Планка и использовано обозначение:

$$H(m) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_{*\varepsilon}}{10}} \frac{m^2}{M_{Pl}} \approx 0.331 g_{*\varepsilon}^{1/2} \frac{m^2}{M_{Pl}}. \quad (1.13)$$

В результате, принимая во внимание следствие сохранения полной энтропии (1.11), получим временную зависимость:

$$-\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = T^2 \frac{H(m)}{m^2} \Rightarrow t = \frac{x^2}{2H(m)} \approx 1.51 g_{*\varepsilon}^{-1/2} \frac{M_{Pl}}{m^2} x^2, \quad t \sim T^{-2}. \quad (1.14)$$

Полученное соотношение выше позволяет далее перейти в уравнениях от временной зависимости к температурной.

### 1.2.3 Термальная история темной материи

#### Уравнение Больцмана

Уравнение Больцмана в общей теории относительности для плотности распределения  $f$  принимает вид:

$$\widehat{L}[f] = \widehat{C}[f], \quad \widehat{L}[f] = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^\mu},$$

где  $\widehat{L}[f]$  - оператор Лиувилля, характеризующий скорость изменения во времени плотности фазового пространства [105];  $\widehat{C}[f]$  - оператор столкновений, который описывает изменение числа частиц в единицу времени [109; 110];  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  - символы Кристоффеля (1.3).

#### Операторы столкновения и Лиувилля

Из космологического принципа следует независимость функции распределения от координат и направления импульса частиц, т.е.  $f(t, E)$ , тогда в метрике Фридмана оператор Лиувилля примет вид:

$$\widehat{L}[f] = E \frac{\partial f}{\partial t} - H(t) |p|^2 \frac{\partial f}{\partial E},$$

Также, интегрируя оператор Лиувилля по лоренц - инвариантному объему  $d\Pi$ , получим:

$$\int \widehat{L}[f]d\Pi = \dot{n} + 3H(t)n, \quad d\Pi = g \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E},$$

где  $n$  - плотность частиц;  $g$  - количество внутренних степеней свободы частицы и  $3H(t)n$  характеризует изменение плотности частиц в связи с расширением. Кроме того, при этом учтено, что функция распределения для  $|p| \rightarrow \infty$  равна нулю из-за отсутствия частиц с бесконечным импульсом, а при  $|p| = 0$  принимает конечное значение, и предположена равномерная сходимости интеграла от функции распределения при переносе производной по времени за знак интеграла.

Взаимодействие между тремя и более частицами маловероятно, поэтому оператор столкновений можно представить в виде [111]:

$$\widehat{C}[f] = \int \omega(f; i)(f(t, \Pi_3)f(t, \Pi_4) - f(t, \Pi_1)f(t, \Pi_2))d\Pi_1d\Pi_2d\Pi_3d\Pi_4, \quad (1.15)$$

где данное выражение написано с учетом того, что в первом порядке теории возмущений слагаемым связанным с запертом Паули и вынужденным излучением можно пренебречь и положить  $1 \pm f \approx 1$ .

Далее, для реакции  $2 \rightarrow 2$  можно написать сечение рассеяния в виде:

$$\sigma_{12 \rightarrow 34} = \frac{1}{4g_3g_4I} \int d\Pi_3d\Pi_4(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4)|\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2, \quad (1.16)$$

где интегрирование идет по конечным состояниям и  $I$  - инвариант Меллера для начальных частиц [112]:

$$I = \sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 1/2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} = E_1 E_2 \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2},$$

где  $\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = (s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)$  - треугольная функция;  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1/E_1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2/E_2$  - скорости 1 и 2 частиц, соответственно; относительная скорость начальных частиц:

$$v_{\text{rel}} = \frac{I}{(p_1, p_2)} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{s - m_1^2 - m_2^2} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}}{1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} \stackrel{\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2}{=} \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)},$$

скорость Меллера для начальных частиц:

$$v_{\text{Mol}} = \frac{I}{E_1 E_2} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2} \frac{v_1 \parallel v_2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}.$$

Из выражений выше видно, что скорость Меллера не обладает лоренцевой инвариантностью и связана с относительной скоростью как [111]:

$$v_{\text{Mol}} = v_{\text{rel}}(p_1, p_2)/(E_1 E_2) = v_{\text{rel}} [1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)].$$

Однако, поток частиц  $F = n_1 n_2 v_{\text{Mol}}$ , который появляется в выражении сечения рассеяния, представляет собой инвариант [113]. Кроме того, в нерелятивистском приближении и для коллинеарных скоростей, относительная и меллерова скорости совпадают. В частности, для системы центра масс при  $m = m_1 = m_2$  для скорости Меллера и инвариантной массы справедливо, соответственно:

$$v_{\text{Mol}} = 2\sqrt{1 - 4m^2/s}, \quad s = 4m^2/(1 - (v_{\text{Mol}})^2/4) \stackrel{\text{low vel.}}{\approx} 4m^2 + m^2(v_{\text{Mol}})^2 \quad (1.17)$$

и выполняется соотношение  $v_{\text{Mol}} = 2v^*$ , где  $v^*$  - скорость начальных частиц в системе центра масс.

Тогда, используя выражение для сечения (1.16), для термально усредненного сечения рассеяния можно записать:

$$\langle \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}} \rangle = \frac{1}{n_1 n_2} \int d\Pi_1 d\Pi_2 f(t, q, \Pi_1) f(t, q, \Pi_2) v_{\text{Mol}} \sigma_{12 \rightarrow 34}, \quad (1.18)$$

где усреднение происходит по начальным состояниям. В итоге, для оператора столкновений (1.15) в случае реакции  $2 \rightarrow 2$  справедливо:

$$\widehat{C}[f] = -c \langle \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}} \rangle (n_1 n_2 - n_1^{\text{eq}} n_2^{\text{eq}}), \quad (1.19)$$

где  $n_1, n_2$  - плотность частиц и античастиц темной материи, соответственно;  $n_{\text{eq}}$  - плотность частиц в термодинамическом равновесии;  $c = 1$  для случая идентичных частиц 1 и 2, т.е.  $n = n_1 = n_2$  и  $c = 1/2$  для случая, когда частица 1 является античастицей для частицы 2 и химическим потенциалом можно пренебречь, т.е.  $n = n_1 + n_2 \approx 2n_1$  [114]. В частности, для холодной темной материи для  $n_{\text{eq}}$  справедливо выражение (1.8).

## Термальное усреднение сечения рассеяния

Далее, явный вид для термального усреднения сечения рассеяния (1.18) принимает следующее выражение [93; 111; 115]:

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle = \frac{1}{N_{\langle \sigma v \rangle}} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \sigma(s) \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{\sqrt{s}} K_1 \left( \frac{\sqrt{s}}{T} \right) ds, \quad (1.20)$$

где  $N_{\langle \sigma v \rangle} = 8T \prod_{i=1,2} m_i^2 K_2 \left( \frac{m_i}{T} \right)$  и  $K_i(z)$  - модифицированные функции Бесселя второго рода порядка  $i$  [107]:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu-1/2} dt, \quad \text{Re}(\nu) > -1/2, \quad |\arg(z)| < \pi/2.$$

Также следует отметить, что при получении выражения выше использовались предположения о справедливости для рассматриваемых частиц распределения Максвелла-Больцмана, термального равновесия и пренебрежение химическим потенциалом [111]. В частности, формула (1.20) справедлива для параметра  $x > 1/3$ , т.е. предполагается, что темная материя не является горячей.

Кроме того, можно использовать нерелятивистское приближение для выражения термального усреднения сечения рассеяния и разложить сечение в ряд по скоростям  $v_{\text{Mol}}^k$  с коэффициентами  $a_k$ , тогда справедливо выражение [108; 116]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle &= \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} v_{\text{Mol}}^3 \sigma(v_{\text{Mol}}) e^{-xv_{\text{Mol}}^2/4} dv_{\text{Mol}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{k+1} \Gamma(k + 3/2) \frac{a_k}{k!} x^{-k} \approx a_0 + 6a_1 x^{-1} + 30a_2 x^{-2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Также стоит отметить, что  $k = 0$ ,  $k = 1$  и  $k = 2$  представляют собой аннигиляции в s-волну, p-волну и d-волну, соответственно [117]. Дополнительно, раскладывая в ряд переменные Манделъштама и матричных элемент процесса  $2 \rightarrow 2$ , можно получить явный вид коэффициентов для нерелятивистского

приближения без расчетов полного сечения [118]. Однако, использование нерелятивистского приближения для аннигиляции с узким резонансным пиком может привести к ошибкам [57; 111].

Стоит заметить, что выражения (1.20) и (1.21) для термального усреднения сечения рассеяния связаны через приближение для  $K_i(x)$  в виде [111]:

$$\frac{x}{K_2^2(x)} K_1 \left( \frac{2x}{\sqrt{1 - v_{\text{Mol}}^2/4}} \right) \simeq \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-xv_{\text{Mol}}^2/4}. \quad (1.22)$$

Кроме того, в случае наличия нескольких каналов распада темной материи через медиатор используется эффективное термально усредненное сечение рассеяния [42; 119].

### Реликтовая плотность темной материи

В итоге, приведем приближенное аналитическое выражение для параметра плотности темной материи. Согласно выражениям выше, уравнение Больцмана можно записать в общем виде для реакции  $2 \rightarrow 2$  как:

$$\dot{n} + 3H(t)n = \widehat{C}[f],$$

В частности, для полных плотностей числа частиц  $n$  и энтропии  $s$  справедливо  $n \sim s \sim 1/a^3$  при отсутствии взаимодействия, т.е. происходит их уменьшение с течением времени из-за расширения Вселенной. Подставляя оператор столкновений (1.19) в уравнение Больцмана, для полной плотности числа частиц  $n$  получим следующее выражение [117]:

$$\dot{n} + 3H(t)n = -c \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle (n^2 - n_{\text{eq}}^2),$$

где  $\sigma = \sigma_{12 \rightarrow 34}$  - сечение аннигиляции (1.16), просуммированное по конечным и усредненное по начальным состояниям; для термально усредненного сечения справедливо (1.20) и (1.21), а для  $n_{\text{eq}}$  выполняется выражение (1.8).

Для компенсации эффекта расширения Вселенной при рассмотрении эволюции числа взаимодействующих частиц введем переменную  $Y = n/s$ . В



этом случае уравнение Больцмана можно переписать в виде:

$$\dot{Y} = -sc \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle (Y^2 - Y_{\text{eq}}^2), \quad Y_{\text{eq}} = n_{\text{eq}}/s.$$

Далее, используя зависимость температуры и времени (1.14), получим уравнения Больцмана в терминах  $Y$ -переменной в виде:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{cs(m_{\text{DM}})}{x^2 H(m_{\text{DM}})} \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle (Y^2(x) - Y_{\text{eq}}^2(x)),$$

где  $m_{\text{DM}}$  - масса частиц темной материи;  $H(m_{\text{DM}})$  - параметр Хаббла (1.13) и  $s(m_{\text{DM}})$  - полная плотность энтропии (1.9). Полученное уравнение представляет собой частный случай уравнения Риккати и не имеет общего решения в аналитическом виде без каких-либо приближений.

Эволюцию отдельного типа частиц можно разделить на три стадии: тепловое равновесие, отщепление и вымерзание. При тепловом равновесии скорость взаимодействия  $\Gamma$  много больше скорости расширения, т.е.  $\Gamma \gg H$ , тогда  $na^3$  экспоненциально падает с увеличением массы. При сравнимых значениях скорости взаимодействия и скорости расширения  $\Gamma \simeq H$  частицы перестают активно взаимодействовать, и начинается отщепление этого типа частиц от термальной ванны. При скорости взаимодействия много меньше скорости расширения  $\Gamma \ll H$  частицы отделяются от термальной ванны с  $n \sim 1/a^3$  и, тем самым, создают реликтовый избыток темной материи во Вселенной [25]. В частности, в момент, когда выполняется критерий Гамова:

$$\Gamma = c n_{\text{eq}}(x_f) \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle|_{x=x_f} \simeq H(x_f), \quad (1.23)$$

происходит отщепление рассматриваемого типа частиц при критической температуре  $T_f$  и параметре  $x_f = m_{\text{DM}}/T_f$ . Также, переменная  $Y$  стремится к реликтовым значениям  $Y_\infty$ , которое можно оценить на интервале  $(x_f, \infty)$ , т.е. справедливо:

$$\frac{dY}{dx} \approx -\frac{cs(m_{\text{DM}})}{x^2 H(m_{\text{DM}})} Y^2(x) \Rightarrow Y^{-1}(\infty) = \frac{cs(m_{\text{DM}})}{H(m_{\text{DM}})} J(x_f), \quad (1.24)$$

где  $Y_f \gg Y_\infty$  - значение переменной  $Y$  в момент вымерзания, учтено соотношение  $Y(x > x_f) \gg Y_{eq}(x > x_f)$  и введено обозначение:

$$J(x_f) = \int_{x_f}^{\infty} \frac{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle}{x^2} dx. \quad (1.25)$$

В результате, используя выражения для критической плотности энергии (1.5), полной плотности энтропии (1.9), постоянной Хаббла (1.13) и оценки реликтовых значений  $Y$  переменной (1.24), получим параметр плотности холодной темной материи [120]:

$$\Omega_c = \frac{m_{\text{DM}} s_0 Y_0}{\varepsilon_{\text{cr}}} = \frac{\pi}{9} \frac{1}{c} \frac{T_0^3}{M_{\text{Pl}}^3 H_0^2} \frac{g_{*s}(T_0)}{g_{*s}(m)} \left( \frac{g_{*\varepsilon}(m_{\text{DM}})}{10} \right)^{1/2} J^{-1}(x_f) \quad (1.26)$$

где  $g_{*s}$  - эффективные степени свободы для плотности энтропии (1.10);  $T_0 = 2.35 \cdot 10^{-13}$  ГэВ - температура Вселенной на текущий момент,  $H_0 = 2.13 h \cdot 10^{-42}$  ГэВ - текущее значение постоянной Хаббла,  $M_{\text{Pl}} = 2.43 \cdot 10^{18}$  ГэВ - редуцированная масса Планка и для текущих значений положено  $Y_0 \approx Y_\infty$ . В частности, подставляя численные значения в формулу (1.26) и принимая во внимание, что  $g_{*s}(T_0) = 3.91$  и  $g_{*\varepsilon}(m) \approx g_{*s}(m)$ , получим итоговую формулу для расчета реликтовой плотности темной материи в следующем виде:

$$\Omega_c h^2 = 0.85 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{g_{*s}^{-1/2}(m_{\text{DM}})}{c} J^{-1}(x_f) \text{ ГэВ}^{-2} \quad (1.27)$$

где  $h \approx 0.67 \pm 0.01$  - безразмерная постоянная Хаббла.

Кроме того, используя разложение по скоростям (1.21) в формуле (1.25), получим систему уравнений на параметр вымерзания и константу связи холодной темной материи с видимой материей в следующей форме [111; 117; 121]:

$$x_f = \ln \left( \sigma_0 \frac{3\sqrt{5} M_{\text{Pl}}}{2\pi^{5/2}} \frac{g_i m_{\text{DM}}}{\sqrt{g_{*s}(m_{\text{DM}})}} \right), \quad (1.28)$$

$$\Omega_c h^2 = \frac{0.85 \cdot 10^{-10}}{c} \frac{(k+1) x_f^{k+1}}{g_{*s}^{1/2}(m_{\text{DM}}) \sigma_0} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (1.29)$$

где  $g_i$  - внутренние степени свободы рассматриваемого типа частиц и  $k$  - порядок первого ненулевого слагаемого  $\sigma_0$  в нерелятивистском разложении термально усредненного сечения (1.21).

Дополнительно, для повышения точности расчетов в формуле для параметра плотности темной материи (1.26) необходимо учитывать фазовый переход КХД, тогда в этом случае необходимо заменить  $g_{*s}(T)$  на эффективные степени свободы  $g_{*\text{eff}}(T)$ , которые принимают следующий вид [111; 114; 122; 123]:

$$g_{*\text{eff}}(T) = \frac{g_{*s}(T)}{\sqrt{g_{*\varepsilon}(T)}} \left( 1 + \frac{T}{3g_{*s}(T)} \frac{dg_{*s}(T)}{dT} \right). \quad (1.30)$$

Действительно, в этом случае реликтовые кривые будут иметь более выраженный скачок при температуре в диапазоне от  $10^{-1}$  ГэВ до  $2 \cdot 10^{-1}$  ГэВ, который связан с выделением дополнительного тепла [124]. Однако, для дальнейших расчетов используется приближение  $g_{*\text{eff}}(T) = g_{*s}(T)$ .

Также стоит упомянуть, что значение параметра вымерзания  $x_f$  можно оценить в случае s-волны путем исключения из формул (1.26) и (1.23) термально усредненного сечения, где  $J(x_f) = \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle / x_f$ . Действительно, в этом случае  $x_f$  принимает значения  $\mathcal{O}(10)$ , и, следовательно, характерное значение термального усреднения сечения аннигилирующего в s-волну можно записать как  $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \simeq 2.5 \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-2} \approx 3 \times 10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$  [125; 126]

### 1.3 Модели медиаторов темной материи

Наиболее популярные сценарии темной материи с характерными массами спин-1 медиаторов выше  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ достаточно сильно ограничена из данных по прямому детектированию. Это мотивирует рассмотрение частиц темного сектора в области термальной легкой темной материи меньше  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ. В частности, предметом описания данной главы будут основы моделей с медиаторами спина-0 и спина-2. Отметим, что в общем случае, рассмотрение достаточно легких медиаторов позволяет самосогласованно объяснить значения реликтовой плотности темной материи, после момента ее отщепления в ранней Вселенной.

### 1.3.1 Скалярный медиатор

Лагранжиан для низких энергий может возникать через специфический для аромата эффективный оператор размерности-5 [41; 127–130]

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} \supset \sum_{i=e,\mu,\tau} \left[ \frac{c_i}{\Lambda} \phi \bar{E}_L^i H e_R^i + \text{h. c.} \right],$$

где  $c_i$  - коэффициент Вильсона для индекса аромата  $i = (e, \mu, \tau)$ ,  $H$ ,  $E_L^i$  и  $e_R^i$  - дублет Хиггса, лептонный дублет и лептонный синглет, соответственно. Далее, можно выбрать связь медиатора  $\phi$  только с одним ароматом, чтобы избежать не сохраняющихся лептонно-флейворных токов, в частности,  $c_e \neq 0$  и  $c_\mu \equiv c_\tau \equiv 0$  [41; 127]. Диагонализируя массовые члены после нарушения электрослабой симметрии в рамках эффективной теории поля теории [93; 131; 132], можно получить связь между частицами стандартной модели и скалярным медиатором. В частности, фокусируясь на электронспецифическом скалярном медиаторе и различных типах темной материи, справедливы следующие эффективные лагранжианы взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^S \supset \frac{1}{2} c_{SS}^\phi \phi S^2 + c_{ee}^\phi \phi \bar{e} e, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^\psi \supset c_{\psi\psi}^\phi \phi \bar{\psi} \psi + c_{ee}^\phi \phi \bar{e} e, \quad (1.32)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^\chi \supset \frac{1}{2} c_{\chi\chi}^\phi \phi \bar{\chi} \chi + c_{ee}^\phi \phi \bar{e} e, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^V \supset \frac{1}{4} c_{VV}^\phi \phi V^{\mu\nu} \tilde{V}_{\mu\nu} + c_{ee}^\phi \phi \bar{e} e, \quad (1.34)$$

где  $c_{SS}^\phi$ ,  $c_{\psi\psi}^\phi$ ,  $c_{\chi\chi}^\phi$ ,  $c_{VV}^\phi$  - константы взаимодействия электронспецифического скалярного медиатора и различных типов темной материи как: вещественной скалярной  $S$  [131], дираковской  $\psi$  [93; 130], майорановской  $\chi$  [41; 131] и векторной  $V_\mu$  [30; 133–135], соответственно;  $c_{ee}^\phi$  - константа связи между скалярным медиатором и электроном [41; 127];  $V^{\mu\nu}$  - тензор напряженности поля и  $\tilde{V}_{\mu\nu} = 1/2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$  - дуальный тензор напряженности поля. Для расчета матричных элементов использовались известные правила Фейнмана. Дополнительно, для проверки в случае майорановской темной материи использовался формализм двухкомпонентных спиноров из источника [136].

### 1.3.2 Тензорный медиатор

В данном разделе рассматривается минимальное расширение Стандартной модели добавлением массивного медиатора спина 2, который описывается полем  $h_{\mu\nu}$ . Предполагается, что массивный тензорный медиатор взаимодействует со Стандартной моделью только через лептон и фотон с универсальной связью. Кроме того, взаимодействие массивного гравитона и материи рассматривается на древесном уровне.

#### Дополнительные измерения

Идея о дополнительном измерении была предложена в 20-х и 30-х годах 19 века для объединения единственных известных на тот момент электромагнитных и гравитационных сил Гуннаром Нордстрёмом в рамках ньютоновской механики [137] и Теодором Калуцей в рамках общей теории относительности [138]. Далее, Оскар Клейн [139] дал интерпретацию дополнительному измерению в рамках квантовой механики и ввел гипотезу о компактности дополнительного измерения для соответствия наблюдаемому 4-мерному пространству. В рамках оригинальной теории Калуцы-Клейна характерный масштаб дополнительного измерения был планковским и, как следствие, давал массу электрона сравнимой с этой шкалой.

Одно из дальнейших расширений идеи о скрытых дополнительных измерениях было использовано в рамках модели Рэндалл-Сандрума [140; 141] для решения проблемы иерархии в физике элементарных частиц. В рамках данного подхода материя находится на многообразии, называемом брана, вложенном в объемлющее пространство с заданной 5-мерной метрикой следующего вида:

$$ds^2 = \omega^2(z)(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (1.35)$$

где  $z \in [z_0, z_1]$  - дополнительное измерение,  $z_0, z_1$  - положения браны с частицами Стандартной модели и темной материи, соответственно. Компактность пространства приводит к появлению различных мод частиц Калуцы-Клейна, которые образуют башню Калуцы-Клейна. В текущий момент, теория Рэндалл-Сандрума может быть использована для введения взаимодей-

ствия темной материи и частиц стандартной модели [32; 33]. Далее, рассмотрим эффективное взаимодействие первой массивной моды Калуцы-Клейна с частицами Стандартной модели.

### Свободное поле

Рассмотрим поведение поля массивного гравитона  $h^{\mu\nu}$  в отсутствии других полей. Из действия Эйнштейна-Гильберта, используя малое возмущение метрики в виде  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$  и оставляя квадратичные по  $h^{\mu\nu}$  слагаемые, можно получить действие Фирца-Паули для массивного гравитона как [142]:

$$S_{\text{FP}} = -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\sigma h_{\mu\nu} \partial^\sigma h^{\mu\nu} - 2\partial_\mu h_{\nu\sigma} \partial^\nu h^{\mu\sigma} + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - \partial_\sigma h \partial^\sigma h - m_{\text{G}}^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2)], \quad (1.36)$$

где  $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$  - метрика Минковского;  $h = h_\mu{}^\mu$ ;  $\kappa = 8\pi G$  - малый параметр и  $G$  - гравитационная постоянная. Далее, варьируя действие (1.36) по полю массивного гравитона  $h^{\mu\nu}$ , уравнение Фирца-Паули принимает следующий вид:

$$\partial_\sigma \partial^\sigma h^{\mu\nu} - \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial^\sigma h + m_{\text{G}}^2 (h_{\mu\nu} - h) = 0. \quad (1.37)$$

Поддействовав на уравнения выше производной  $\partial^\mu$ , справедливо дополнительное условие  $\partial^\mu (h_{\mu\nu} - h) = 0$ , которое упрощает уравнение движения:

$$\partial_\sigma \partial^\sigma h^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + m_{\text{G}}^2 (h_{\mu\nu} - h) = 0.$$

Свернув промежуточное выражение с метрическим тензором  $\eta_{\mu\nu}$ , получим условие нулевого следа для массивного гравитона  $h = 0$ , что, в свою очередь, влечет  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$  из дополнительного условия  $\partial^\mu (h_{\mu\nu} - h) = 0$ . В итоге, уравнение движения массивного гравитона представляет собой уравнение Клейна-Гордона:

$$(\partial_\sigma \partial^\sigma + m_{\text{G}}^2) h_{\mu\nu} = 0, \quad (1.38)$$

и справедливо его классическое решение в виде плоских волн:

$$h^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_G}} \sum_{\lambda} a(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(x,p)} + a^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon^{*\mu\nu}(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(x,p)}.$$

Также стоит отметить, что уравнение Фирца-Паули (1.37) можно получить из лоренц-ковариантного параметризованного уравнения для  $h_{\mu\nu}$  не содержащего высшие производные, предполагая справедливость уравнения Клейна-Гордона (1.38) и  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$  для исключения коэффициентов.

Дополнительно, можно найти число степеней свободы для поля  $h_{\mu\nu}$  из уравнения Фирца-Паули. Действительно, из-за симметричности поля  $h_{\mu\nu}$  число степеней свободы равно 10, а с учетом условий  $\partial^\mu (h_{\mu\nu} - h) = 0$  и  $h = 0$ , число степеней свободы уменьшается до 5. Далее, найдем сумму по поляризациям:

$$P^{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_{\lambda} \varepsilon^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \lambda), \quad (1.39)$$

которая может состоять только из комбинации метрического тензора  $\eta_{\mu\nu}$  и момента импульса  $p_\mu$ , исходя из общих кинематических требований [143]. Для  $P^{\mu\nu\alpha\beta}$  выполняются следующие симметрии:  $(\mu \leftrightarrow \nu)$ ,  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  и  $(\mu \leftrightarrow \alpha, \nu \leftrightarrow \beta)$ , которые параметризуют сумму по поляризациям в следующем виде:

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu\alpha\beta} = & A P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta} + B (P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta} P^{\nu\alpha}) + C (P^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta + P^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu) \\ & + D (P^{\mu\alpha} p^\nu p^\beta + P^{\mu\beta} p^\nu p^\alpha + P^{\nu\alpha} p^\mu p^\beta + P^{\nu\beta} p^\mu p^\alpha) + E p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta. \end{aligned}$$

где  $P^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + (1 - \xi)p^\mu p^\nu / m_p^2$ ;  $\xi = 0$  - фейнмановская калибровка и  $\xi = 1$  - лоренцевская калибровка. Также стоит отметить, что в дальнейшем используется калибровка Лоренца, т.к. рассматриваются частицы с ненулевой массой. С учетом приведенных выше для  $h_{\mu\nu}$  и общих для  $P^{\mu\nu}$  свойств, условия на коэффициенты  $P^{\mu\nu\alpha\beta}$  в общей параметризации можно выписать как:

$$p_\mu P^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad p_\mu p_\beta g_{\nu\alpha} P^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad p_\mu p_\nu g_{\alpha\beta} P^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad g_{\mu\nu} P^{\mu\nu\alpha\beta} = 0,$$

которые для массивной частицы со спином 2 дают итоговое выражение для суммы по поляризациям в виде [32; 144]:

$$P^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta} P^{\nu\alpha} - \frac{2}{3} P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta} \right). \quad (1.40)$$

В результате, пропатор массивного гравитона в импульсном представлении принимает следующий вид [32; 144]:

$$\mathcal{D}_G^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{i P^{\mu\nu\alpha\beta}}{p^2 - m_G^2}. \quad (1.41)$$

Также стоит отметить, что в случае массивного гравитона нарушается калибровочная инвариантность. Однако, использование штюкельберговских полей позволяет восстановить калибровочную инвариантность, при этом не меняя уравнений движения.

## Взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие массивного гравитона и материи на древесном уровне. Аналогично прошлому разделу, рассматривая малое возмущение метрики в действии (1.1) для материи, получим эффективный лагранжиан взаимодействия массивного медиатора спина 2 и материи Стандартной модели и темного сектора как [32; 33]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^G \supset - \sum_i \frac{c_i^G}{\Lambda} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^i, \quad (1.42)$$

где  $c_i^G = (c_{\text{SM}}^G, c_{\text{DM}}^G)$  - константы взаимодействия для тензорного медиатора и частиц стандартной модели и темной материи;  $\Lambda$  - размерный параметр спин-2 взаимодействия, который связан с масштабом новой физики и симметризованный ТЭИ:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(-g\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.43)$$

Следует отметить, что в случае спинорных полей необходимо использовать тетрадный формализм при получении симметризованного ТЭИ [72; 145]. Однако, используя канонический ТЭИ  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  и тензор спина  $S_{\mu,\alpha\beta}$  для заданных полей  $\psi_i$



в виде [145]:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \nabla^\mu \psi_i} \nabla^\nu \psi_i - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_M, \quad S_{\mu,\alpha\beta} = -i \sum_{l,j} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \nabla^\mu \psi_j} \left( \tilde{T}_{\alpha\beta} \right)_j^l \psi_l, \quad (1.44)$$

можно получить симметризованный ТЭИ как [145]:

$$T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + (1/2) \nabla^\alpha (S_{\alpha,\mu\nu} - S_{\mu,\alpha\nu} + S_{\nu,\mu\alpha}). \quad (1.45)$$

В случае массивных скалярного  $S$ , векторного  $V$  и диракового фермионного  $\psi$  полей, симметризованный ТЭИ темного сектора принимает вид, соответственно [33; 146]:

$$T_{\mu\nu}^S = \partial_\mu S \partial_\nu S - (1/2) \eta_{\mu\nu} (\partial_\rho S)^2 + (1/2) \eta_{\mu\nu} m_S^2 S^2, \quad (1.46)$$

$$T_{\mu\nu}^V = \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} V_{\lambda\rho} V^{\lambda\rho} - V_{\mu\lambda} V^\lambda{}_\nu + m_V^2 V_\mu V_\nu - (1/2) m_V^2 \eta_{\mu\nu} V_\alpha V^\alpha, \quad (1.47)$$

$$T_{\mu\nu}^\psi = (i/4) [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi - (\partial_\mu (\bar{\psi}) \gamma_\nu + \partial_\nu (\bar{\psi}) \gamma_\mu) \psi] + \\ + \eta_{\mu\nu} m_\psi \bar{\psi} \psi - (i/2) \eta_{\mu\nu} [\bar{\psi} \gamma^\rho \partial_\rho (\psi) - \partial_\rho (\bar{\psi}) \gamma^\rho \psi], \quad (1.48)$$

где  $m_S, m_V$  и  $m_\psi$  - массы скалярного, векторного, и диракового типов темной материи, соответственно. Переходя в импульсное представление для спинорного, скалярного и векторного полей, получим, соответственно:

$$T_{\mu\nu}^{G\psi\psi} = 1/4 \left[ \gamma_\mu (p_1 + p_2)_\nu + \gamma_\nu (p_1 + p_2)_\mu - 2\eta_{\mu\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2 - 2m_\psi) \right], \quad (1.49)$$

$$T_{\mu\nu}^{GSS} = \eta_{\mu\nu} m_S^2 - q_1^\alpha q_2^\beta (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}), \quad (1.50)$$

$$T_{\mu\nu}^{GVV} = m_V^2 (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) + \\ + \left( W^{(V)}_{\mu\nu\alpha\beta\sigma\lambda} + W^{(V)}_{\nu\mu\alpha\beta\sigma\lambda} \right) k_1^\sigma k_1^\lambda, \quad (1.51)$$

где  $p_1, p_2$  - 4-импульсы влетающего и вылетающего фермионов;  $q_1, q_2$  - 4-импульсы влетающих (вылетающих) скаляров;  $k_1, k_2$  - 4-импульсы вылетающих векторных частиц  $V^\alpha(k_1)$  и  $V^\beta(k_2)$  и используется обозначение:

$$W^{(V)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\eta_{\beta\sigma} \eta_{\alpha\lambda} - \eta_{\sigma\lambda} \eta_{\alpha\beta}) + \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\lambda} + \eta_{\mu\alpha} (\eta_{\beta\nu} \eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\sigma\beta} \eta_{\lambda\nu}).$$

В случае спинорного поля были отброшены соответствующие спиноры  $\bar{u}(p_2, s_2)$  и  $u(p_1, s_1)$  и для векторного поля отброшены векторы поляризации  $\varepsilon^{*\alpha}(k_1)$  и  $\varepsilon^{*\beta}(k_2)$ . Как можно заметить, тензоры энергии-импульса в импульсном представлении остаются симметричными по индексам.

Далее, рассмотрим взаимодействие массивного гравитона в рамках квантовой электродинамики. В этом случае тензор энергии-импульса для частиц стандартной модели [146]:

$$T_{\mu\nu}^{\text{SM}} = \left[ \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} \right] \quad (1.52)$$

$$- \sum_l \frac{i}{2} \left[ \bar{l} \left( \gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) l - \eta_{\mu\nu} \bar{l} \gamma_\rho \overleftrightarrow{D}^{\rho l} \right], \quad (1.53)$$

где  $l$  - лептон стандартной модели;  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  - тензор напряженности для фотонного поля  $A_\mu$  стандартной модели;  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  - ковариантная производная для  $U(1)$  калибровочного поля. Переходя в импульсное представление, для лептонного и фотонного полей получим:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Gl}} = 1/4 \left[ \gamma_\mu (p_1 + p_2)_\nu + \gamma_\nu (p_1 + p_2)_\mu - 2\eta_{\mu\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2) \right], \quad (1.54)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{G}\gamma\gamma} = \left( W^{(V)}_{\mu\nu\alpha\beta\sigma\lambda} + W^{(V)}_{\nu\mu\alpha\beta\sigma\lambda} \right) k_1^\sigma k_1^\lambda, \quad (1.55)$$

где  $p_1, p_2$  - 4-импульсы влетающего и вылетающего лептонов, соответственно;  $k_1, k_2$  - 4-импульсы вылетающих фотонов. В случае спинорного поля были отброшены соответствующие спиноры  $\bar{u}(p_2, s_2)$  и  $u(p_1, s_1)$ . Кроме того, из ковариантной производной возникает контактная вершина, для которой взаимодействие описывается в виде:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Gl}\gamma} = e/2 \left[ \eta_{\alpha\nu} \gamma_\mu + \eta_{\mu\alpha} \gamma_\nu - 2\eta_{\mu\nu} \gamma_\alpha \right], \quad (1.56)$$

где были отброшены соответствующие спиноры  $\bar{u}(p_2, s_2)$  и  $u(p_1, s_1)$  и вектор поляризации  $\varepsilon^{*\alpha}(k_1)$ .

Для сохранения пертурбативной унитарности будем использовать универсальную константу взаимодействия гравитона со всеми частями стандартной модели [33]. Для получения правил фейнмана для соответствующей вер-

шины взаимодействия необходимо выражения для симметризованного ТЭИ в импульсном представлении домножить на  $-ic_{\text{DM}}^{\text{G}}/\Lambda$ . В частности, приведенные выше правила Фейнмана для гравитона можно найти в приложении источника [32].

## Результаты первой главы

В данном разделе рассмотрены основные экспериментальные наблюдения, которые мотивируют введение скрытой массы и дают ограничения на параметры для легкой термальной темной материи и необходимых для нее медиаторов. Приведена методика расчета реликтовой плотности для темной материи, что позволяет в комбинации с экспериментами ограничивать природу различных типов легкой темной материи и ее медиаторов. Рассмотрены эффективные лагранжианы взаимодействия для скалярного и тензорного медиаторов темной материи в случае взаимодействия с лептоном видимого сектора и различных типов темной материи.

## Глава 2

## Рождение медиатора темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью

Комбинация преимуществ высоких интенсивности и достаточно больших энергий налетающего пучка в экспериментах с фиксированной мишенью может усилить существующие ограничения в области термальной легкой темной материи. В этом случае для расчета сечения рождения медиатора темной материи на тяжелом ядре мишени,  $l^\pm + N \rightarrow l^\pm + N + \text{MED}(\rightarrow \text{DM} + \text{DM})$ , можно использовать приближение Вайцзеккера-Вильямса, которое достаточно хорошо аппроксимирует сечение, посчитанное в древесном приближении без использования упрощений интегрирования по фазовому объему вылетающих частиц.

Следует также отметить, что при падении высокоэнергетического электрона на мишень, существует дополнительный канал аннигиляции вторичных позитронов электромагнитного ливня на атомных электронах в темную материю,  $e^+e^- \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM} + \text{DM}$  [53; 54].

### 2.1 Сечение рождения медиатора на ядре

Предполагая, что ядро в начальный момент времени покоилось, тогда соответствующий процесс  $2 \rightarrow 3$  с кинематической точки зрения может быть представлен через в виде:

$$l^\pm(p) + N(P_i) \rightarrow l^\pm(p') + N(P_f) + \text{MED}(k), \quad (2.1)$$

где  $p = (E_l, \mathbf{p})$ ,  $p' = (E'_l, \mathbf{p}')$  - 4-импульсы входящего и выходящего лептона, соответственно,  $k = (E_{\text{MED}}, \mathbf{k})$  - 4-импульс медиатора темной материи,  $P_i = (M, 0)$  и  $P_f = (P_f^0, \mathbf{P}_f)$  - 4-импульсы исходного и конечного ядра, соответственно,  $P_i - P_f = q$ ,  $t \equiv -q^2$  - виртуальность и  $q = (q_0, \mathbf{q})$  - переданный ядру 4-импульс. Переменные Мандельштама для реакции  $2 \rightarrow 3$  удобно ввести в следующем согласованном с литературой виде:

$$\tilde{s} = (p' + k)^2 - m_l^2, \quad \tilde{u} = (p - k)^2 - m_l^2, \quad \tilde{t} = (p - p')^2 - m_{\text{MED}}^2, \quad (2.2)$$

для полученных переменных (2.2) выполняется  $\tilde{s} + \tilde{u} + \tilde{t} = t$ .

Двойное дифференциальное сечение для процесса (2.1) на древесном уровне принимает следующий вид [147; 148]:

$$\frac{d\sigma}{dx d\cos\theta_{\text{MED}}}\Big|_{\text{ETL}} = \frac{\epsilon_{\text{MED}}^2 \alpha^3 |\mathbf{k}| E_l}{|\mathbf{p}| |\mathbf{k} - \mathbf{p}|} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{dt}{t^2} F^2(t) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_q}{2\pi} \frac{|\mathcal{A}_{2\rightarrow 3}^{\text{MED}}|^2}{8M^2}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры;  $t_{\max}$ ,  $t_{\min}$  - максимальный и минимальный квадрат переданного ядру 4-импульса, явный вид которых может быть найден в источниках [147; 149];  $x = E_{\text{MED}}/E_l$  - доля полной энергии медиатора относительно первоначального лептона;  $|\mathcal{A}_{2\rightarrow 3}^{\text{MED}}|^2$  - усредненный квадрат матричного элемента без констант взаимодействия и вершина взаимодействия задана через форм-фактор  $F(t)$ , который обсуждается в секции 2.1.2. Кроме того, явный вид матричного элемента для скалярного медиатора приведен в секции A.1.2, а соответствующие для скалярного и тензорного медиаторов диаграммы изображены на графике 2.1.

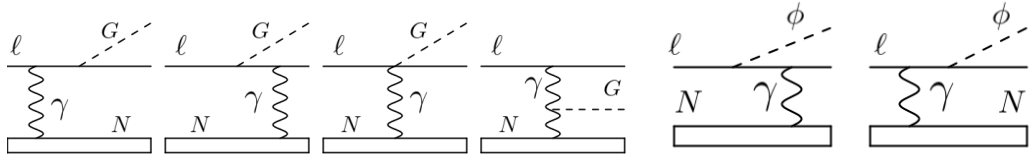


Рисунок 2.1 — Диаграммы процессов излучения скалярного  $\phi$  и тензорного  $G$  медиаторов на ядре  $N$  при падении на ядро лептона  $l$ .

### 2.1.1 Излучение медиатора в методе Вайцеккера-Вильямса

В данном разделе рассматривается излучение медиатора на ядре в приближении метода Вайцеккера-Вильямса. Кроме того, рассматриваются различные форм-факторы для параметризации взаимодействия с ядром и оценка их влияния на поток виртуальных фотонов. Также, приводятся полученные аналитически интегралы, которые позволяют проинтегрировать по углу дважды дифференциальное сечение.

Для аппроксимации расчетов процесса рождения медиатора используется приближение Вайцеккера-Вильямса [150; 151], в котором энергия налетающе-

го лептона намного выше, чем массы лептона и медиатора  $m_l$  и  $m_{\text{MED}}$ , соответственно [152]. В случае электромагнитного взаимодействия одну из частиц можно заменить на эффективный поток фотонов, такой, что фазовое пространство тормозного излучения медиатора  $2 \rightarrow 3$  сводится к комптоновскому процессу  $2 \rightarrow 2$  [153]. В данной работе используется более точный модифицированный метод Вайцзеккера-Вильямса, в котором учтена зависимость от структуры ядра через форм-факторы [47; 48].

Аналогично процессу торможения лептона в поля тяжелого ядра (2.1), для соответствующего комптоновского процесса  $l^\pm(p) + \gamma(q) \rightarrow l^\pm(p') + \text{MED}(k)$  удобно ввести переменные Мандельштама в следующем виде:

$$s_2 = (p+q)^2 = (p'+k)^2, \quad u_2 = (p-k)^2 = (p'-q)^2, \quad t_2 = (p-p')^2 = (q-k)^2, \quad (2.4)$$

где обозначения для процессов  $2 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$  согласованы.

В общем случае, приближение Вайцзеккера-Вильямса принимает вид [47; 48; 50]:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{d(pk)d(kP_i)} \right|_{\text{WW}} = \frac{\alpha\chi}{\pi(p'P_i)} \left. \frac{d\sigma(p + q \rightarrow k + p')}{d(pk)} \right|_{t=t_{\min}}, \quad (2.5)$$

где  $t_{\min}$  - минимальное значение виртуальности и поток виртуальных фотонов  $\chi$  выражается через упругий форм-фактор  $F(t)$  следующим образом:

$$\chi = Z^2 \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{t - t_{\min}}{t^2} F^2(t) dt, \quad (2.6)$$

где  $Z$  — атомный номер ядра и форм-фактор  $F(t)$  обсуждается в секции 2.1.2. Формула (2.5) получена путем представления квадрата матричного элемента в виде  $|\mathcal{M}|^2 \sim L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$  с усреднением и суммированием по возможным начальным и конечным состояниям и параметризацией структурными функциями  $W_1$ ,  $W_2$ . После использования калибровочной инвариантности  $q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0$  и некоторых математических манипуляций, сечение тормозного излучения можно представить в виде комптоновского процесса и потока фотонов [47; 48]. С другой стороны, учитывая, что направления леп-

тона и медиатора в конечном состоянии почти коллинеарны в случае высокоэнергетического первичного лептона, для интеграла по фазовому пространству справедливо [147]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_q}{2\pi} \frac{|\mathcal{M}_{2\rightarrow 3}^{\text{MED}}|^2}{8M^2} \approx \frac{t - t_{\min}}{2t_{\min}} |\mathcal{M}_{2\rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2_{t=t_{\min}}. \quad (2.7)$$

Для ультрарелятивистского падающего на мишень заряженного лептона в лабораторной системе справедливо:

$$d(kp)d(kP_i) \simeq M|\mathbf{p}||\mathbf{k}|d\cos(\theta_{\text{MED}})dE_{\text{MED}}, \quad (2.8)$$

где  $\theta_{\text{MED}}$  — угол между направлениями начального лептона и медиатора. В итоге, подставив выражение (2.8) в уравнение (2.5), формула Вайцеккера-Вильямса принимает следующее выражение для двойного дифференциального сечения:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx d\cos(\theta_{\text{MED}})} \right|_{\text{WW}} = \frac{\alpha\chi}{\pi} \frac{E_l^2 x \beta_{\text{MED}}}{1-x} \left. \frac{d\sigma(p + q \rightarrow k + p')}{d(pk)} \right|_{t=t_{\min}}, \quad (2.9)$$

где  $\alpha = e^2/(4\pi) \simeq 1/137$  - постоянная тонкой структуры и  $\beta_{\text{MED}} = \sqrt{1 - m_{\text{MED}}^2/(xE_l)^2}$  - типичная скорость медиатора темной материи. Для сечения комптон-подобного процесса  $l\gamma \rightarrow lG$  справедливо:

$$-\frac{d\sigma_{2\rightarrow 2}^{\text{MED}}}{d(p \cdot k)} = 2 \frac{d\sigma_{2\rightarrow 2}^{\text{MED}}}{du_2} = \frac{|\mathcal{M}_{2\rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2}{8\pi(s_2 - m_l^2)^2} \quad (2.10)$$

где  $|\mathcal{M}_{2\rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2$  - квадрат матричного элемента соответствующего комптоновского процесса, явный вид которого приведен в приложении для скалярного и тензорного медиаторов [A.1.2](#).

## Кинематика

В данном разделе обсуждается поведение основных кинематических величин, которые влияют на расчет сечения рождения медиатора темной материи на тяжёлом ядре в приближении Вайцеккера-Вильямса. Решая уравнение на

массовой оболочке для лептона и ядра в конечном состоянии:

$$p'^2 = (q + p - k)^2 = m_l^2, \quad P_f^2 = (P_i - q)^2 = M^2, \quad (2.11)$$

и используя вспомогательный 4-вектор  $V = p - k$ , получим следующие уравнения:

$$q_0 = -t/(2M), \quad |\mathbf{q}|^2 = t^2/(4M^2) + t, \quad t = 2M(\sqrt{M^2 + |\mathbf{q}|^2} - M), \quad (2.12)$$

$$q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + u_2 + 2q_0V_0 - 2(\mathbf{q}, \mathbf{V}) = m_l^2. \quad (2.13)$$

Принимая во внимание  $|\mathbf{q}| \lesssim \mathcal{O}(100)$  МэВ и  $M \propto \mathcal{O}(100)$  ГэВ, т.е. справедливо соотношение  $|\mathbf{q}|/M \ll 1$ , из формул (2.12) получим приближенные выражения  $t \simeq |\mathbf{q}|^2$  и  $q_0 \simeq -|\mathbf{q}|^2/(2M)$  для виртуальности фотона и энергии переданной ядру, соответственно. Откуда видно, что значение  $q_0$  мало и им можно пренебречь при дальнейших расчетах.

Далее, отбрасывая  $|\mathbf{q}|^2$  в формуле (2.13) получим следующее выражение для виртуальности:

$$t \simeq |\mathbf{q}|^2 \simeq \frac{(u_2 - m_l^2)^2}{4|\mathbf{V}|^2 \cos^2(\theta_{\mathbf{qV}})}, \quad (2.14)$$

где  $\theta_{\mathbf{qV}}$  - угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{V}$ . Также, оставляя только ведущие члены как  $m_G^2/E_k^2$ ,  $m_l^2/E_l^2$ ,  $m_l^2/E_l^2$  и  $\theta_G^2$ , получим приближенные выражения для модуля вектора  $|\mathbf{V}| \simeq E_l(1 - x)$  и введенной вспомогательной функции:

$$U \equiv m_l^2 - u_2 \simeq E_l^2 \theta_{\text{MED}}^2 x + m_{\text{MED}}^2 (1 - x)/x + m_l^2 x > 0. \quad (2.15)$$

Таким образом, используя выражения (2.14) и (2.15) можно получить приближенное выражение для минимума виртуальности  $t = t_{\text{min}}$ , из которых следует, что  $\theta_{\mathbf{qV}} \simeq \pi$  и вектор  $\mathbf{q}$  почти коллинеарен вектору  $\mathbf{k} - \mathbf{p}$ :

$$t_{\text{min}} \simeq |\mathbf{q}|^2 \simeq U^2/(4E_l^2(1 - x)^2). \quad (2.16)$$

Также, с учетом  $\theta_{\mathbf{qp}} \simeq \pi$ , пока  $\theta_{\text{MED}} \ll 1$  и  $\mathbf{q}$  коллинеарен с  $\mathbf{k} - \mathbf{p}$ , можно получить следующие выражения для переменных Мандельштама (2.4),



выраженные через переменные  $x$  и  $\theta_{\text{MED}}$ , в следующем виде:

$$u_2 = m_l^2 - U \lesssim 0, \quad (2.17)$$

$$t_2 = -2(q, k) + t + m_{\text{MED}}^2 \simeq -Ux/(1-x) + m_{\text{MED}}^2 \lesssim 0, \quad (2.18)$$

$$s_2 = 2m_l^2 + m_{\text{MED}}^2 - t - t_2 - u_2 \simeq U/(1-x) + m_l^2 \gtrsim 0. \quad (2.19)$$

Из закона сохранения энергии  $q_0 + E_l = E_l' + E_{\text{MED}}$  и из условия  $q_0/E_l \ll 1$  следует, что  $E_l \simeq E_{\text{MED}} + E_l'$ , таким образом, для доли энергии  $x = E_{\text{MED}}/E_l$  получаем соответственно ее минимальное и максимальное значения в виде  $x_{\min} \simeq m_{\text{MED}}/E_l$  и  $x_{\max} \simeq 1 - m_l/E_l$ . Так же стоит заметить, что при минимальной доле энергии  $x_{\min}$ , переменная  $t_2$  принимает выражение:

$$t_2(x = x_{\min}) = -\frac{m_{\text{MED}}^2 E_0}{E_0 - m_{\text{MED}}} (\theta_{\text{MED}}^2 - m_l^2/E_0^2), \quad (2.20)$$

откуда видно, что в общем случае при наличии t-канала в процессе рождения медиатора на ядре для корректных расчетов при  $\theta_{\text{MED}} = 0$  необходимо учитывать массу налетающей частицы, принимая во внимание  $\sin(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$  для коэффициента в сечении (2.9).

Далее, подставив явный вид  $U$  получим выражение для квадрата минимального переданного импульса:

$$t_{\min}(x, \theta_{\text{MED}}) = 1/(4E_0^2) [x(E_0^2\theta_{\text{MED}}^2 + m_l^2)/(1-x) + m_{\text{MED}}^2/x]^2,$$

откуда видно, что выражение для  $t_{\min}(x, \theta_{\text{MED}})$  представляет собой сумму двух гипербол с асимптотами в  $x = 0$  и  $x = 1$  и, следовательно, принимает максимальные значения в их близи для  $x \in (x_{\min}, x_{\max})$ . Далее, подставляя значения на границах  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  и принимая во внимание условие  $m_l, m_{\text{MED}} \ll E_0$ , получим:

$$t_{\min}(x = x_{\min}, \theta_{\text{MED}}) \approx m_{\text{MED}}^2(1 + \theta_{\text{MED}}^2)^2/4 < m_{\text{MED}}^2, \quad (2.21)$$

$$t_{\min}(x = x_{\max}, \theta_{\text{MED}}) \approx \frac{E_0^4}{4m_l^2} \left( \theta_{\text{MED}}^2 + \frac{m_l^2}{E_0^2} + \frac{m_{\text{MED}}^2 m_l}{E_0^3} \right)^2 > \frac{E_0^4}{4m_l^2} \theta_{\text{MED}}^4. \quad (2.22)$$

Из полученных выражений видно, что  $t_{\min}$  на границе  $x_{\max}$  может принимать большие нефизические значения. В частности, данные значения приводят к рез-

кому скачку дифференциального сечения по  $x$ , что влечет переоценку сечения. Действительно, в случае  $t_{\min} \gg t_{\max}$  и  $t_{\max} > t_a, t_d$  для потока фотонов с форм-фактором Тсаи-Шиффа справедливо  $\chi \sim Z^2 t_{\min}$ , что видно из формулы (2.31). Более того, при  $t_{\max} \gg t_a, t_d$  выполняется  $\chi \approx Z^2 t_{\min} / (3t_{\max}^3)$ . Однако, в виду того, что  $t_{\min}$  принимает большие значения только вблизи небольшой области  $x_{\max}$ , существенной переоценки полного сечения не происходит. Для того, чтобы избежать этого необходимо занулить поток фотонов (2.6) при  $t_{\min} > t_{\max}$ .

Далее, можно показать, что квадрат минимального переданного импульса (2.16) достигает минимума в точке:

$$x_m = \left( 1 + m_{\text{MED}}^{-1} \sqrt{m_l^2 + E_0^2 \theta_{\text{MED}}^2} \right)^{-1},$$

и принимает значение в этой точке:

$$t_{\min}(x = x_m, \theta_{\text{MED}}) = \frac{m_{\text{MED}}^2}{4E_0^2} \left( m_{\text{MED}} + 2\sqrt{m_l^2 + E_0^2 \theta_{\text{MED}}^2} \right)^2 > \frac{m_{\text{MED}}^4}{4E_0^2}. \quad (2.23)$$

Стоит отметить, что выражение для минимального значения  $t_{\min}$  позволяет оценить влияние потока фотонов на дифференциальное сечение (разд. 2.1.2). Кроме того, в выражении для квадрата минимального переданного импульса (2.16) можно пренебречь зависимостями от угла и энергии излученного медиатора, положив для  $t_{\min}$  минимальное значение  $t_{\min}^{\text{IWW}} = m_{\text{MED}}^4 / (2E_0)^2$ . В этом случае, приближение переходит в хорошо известный улучшенный метод Вайцеккера-Вильямса с потоком фотонов  $\chi^{\text{IWW}}$ , который не зависит от угла и энергии медиатора [47; 51; 147; 154]. Однако, с учетом того, что для  $t_{\min}$  берется наименьшее значение и подынтегральное выражение потока фотонов положительно, улучшенный метод Вайцеккера-Вильямса приводит к переоценке сечения.

## 2.1.2 Форм-фактор

В этом разделе рассматривается влияние на поток виртуальных фотонов (2.6) различных параметризации для атомного и ядерного форм-факторов (2.27) в приближении тяжёлого ядра для процесса рождения медиатора на

ядре (2.1). В общем случае, взаимодействие электромагнитного поля и адрона может быть эффективно представлено как [155]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu\mathcal{J}^\mu, \quad (2.24)$$

где  $\mathcal{J}^\mu$  - адронный ток. Стоит отметить, что из-за сложности устройства внутренней структуры адронов, ток  $\mathcal{J}^\mu$  описывается феноменологически. Структура адронного тока устанавливается исходя из общих кинематических соображений, что приводит к параметризации тока форм-факторами [52].

Важную роль в интерпретации форм-факторов играет система отсчета Брейта, в которой начальная и конечная энергии ядра совпадают, и, как следствие, для квадрата переданного импульса в этой системе справедливо  $t = |\mathbf{q}|^2 > 0$  [156]. Как можно заметить, выражение для  $t$  согласуется с полученным выражением (2.14) в приближении Вайцзеккера-Вильямса. В общем случае лабораторная система нетривиально связана с системой Брейта. Однако, для тяжелых ядер типичный импульс передачи равен  $|\mathbf{q}| \lesssim 100$  МэВ, а типичная масса ядра равна  $M \propto \mathcal{O}(100)$  ГэВ. Тогда, с учетом  $|\mathbf{q}| \ll M$ , изменением начального и конечного состояний ядра можно пренебречь, поэтому система Брейта в этом случае совпадает с системой покоя ядра (лабораторная система) [52]. Связь между углами в лабораторной системе  $\theta_L$  и системе Брейта  $\theta_B$  принимает вид [157]:

$$\cos^2(\theta_B/2) = \cos^2(\theta_L/2)/(1 + \tau), \quad \tau = q^2/(4M^2) \ll 1 \Rightarrow \theta_B \approx \theta_L. \quad (2.25)$$

Следовательно, в дальнейших рассуждениях используется лабораторная система и индекс для лабораторной системы и системы Брейта может быть опущен. В случае упругих взаимодействий тип адрона не меняется, и, как следствие, форм-факторы зависят только от квадрата переданного импульса т.к.  $(P, q) = 0$ .

Ток перехода при электромагнитном взаимодействии для бесспинового тяжелого ядра в общем случае [50; 51; 147; 149] и в системе Брейта [158] имеет вид:

$$\mathcal{J}^\mu = F_s(t)(P_f + P_i)^\mu, \quad \mathcal{J}^0 = F_s(t)(P_f^0 + P_i^0) \approx 2MF_s(t), \quad \mathcal{J} = 0, \quad (2.26)$$

где  $F_s(t)$  - скалярный форм-фактор, который является положительной вещественной функцией при  $t > 0$ . Из выражений (2.26) видно, что внутренняя структура бесспинового ядра при электромагнитном взаимодействии влияет только через пространственное распределение заряда.

В результате, для тяжелых ядер форм-фактор связан с плотностью заряда ядра в лабораторной системе отсчета через обратное преобразование Фурье [159]:

$$F(t) = \int \rho(r) e^{itr} d^3r = 4\pi \int \frac{r}{t} \rho(r) \sin(tr) dr, \quad (2.27)$$

где  $\rho(r)$  - соответствующая ядерная плотность и обозначение форм-фактора  $F(t)$  используется как для бесспиновых, так и для спиновых тяжелых ядер. Действительно, для тяжелых ядер вклад от магнитного форм-фактора либо отсутствует (2.26), либо им можно пренебречь. Тогда, в этом случае форм-фактор (2.27) при нулевом переданном импульсе характеризует эффективный заряд рассматриваемой системы.

Атомный форм-фактор можно представить как ядерный форм-фактор, для которого учтено экранирование ядра кулоновским полем за счет атомных электронов. Действительно, в пределе  $t \rightarrow 0$  ядерный форм-фактор стремится к  $F_{\text{nucl}}(t) \rightarrow 1$ , в отличие от атомного форм-фактора, для которого справедливо  $F_{\text{atom}}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ . Кроме того, плотность экранирующего заряда атомного форм-фактора может быть представлена как свертка плотности заряда ядра с удельной плотностью экранирования. В частности, используя свойства Фурье преобразований, для получения атомного форм-фактора следует умножить ядерный форм-фактор (2.27) на экранирующий множитель  $t/(t_a + t)$ , введенный Л. Шиффом [160], который представляет собой форм-фактор экранированного атома водорода [47].

Рассмотрим упругий форм-фактор для атома, который был использован Тсаи [48] и Шиффом [161], в следующем виде [50]:

$$F_{\text{TS}}(t) = \frac{t}{(t_a + t)} F_{\text{TSnucl}}(t), \quad F_{\text{TSnucl}}(t) = \frac{1}{(1 + t/t_d)}, \quad (2.28)$$

где  $\sqrt{t_a^{1/2}} = 1/R_a$  - типичный импульс, связанный с экранировкой ядра кулоновским полем от атомных электронов,  $R_a = 111Z^{-1/3}/m_e$  - типичная ве-

личина атомного радиуса,  $\sqrt{t_d} = 1/R_n$  - типичный импульс, связанный с размером ядра,  $R_n \simeq 1/\sqrt{d}$  и  $d = 0.164A^{-2/3}$  ГэВ<sup>2</sup>. Также стоит отметить, что ядерному форм-фактору  $F_{\text{TS}_{\text{nucl}}}(t)$  соответствует зарядовая плотность Юкавы [159]. Поведение форм-фактора определяется переменной  $t_{\text{min}}$ , для которого справедлива приближенная формула (2.16). В частности, если  $t_{\text{min}}/t_a \ll 1$ , то имеет место режим полного экранирования, что означает малый переданный ядром импульс и характерный атомный упругий форм-фактор много меньше единицы,  $F_{\text{TS}}(t) \simeq t/t_a \ll 1$ . С другой стороны, режима экранирования не возникает при  $t_{\text{min}}/t_a \gg 1$ . В этом случае упругий форм-фактор атома ведет себя как  $F_{\text{TS}}(t) \simeq 1/(1 + t/t_d)$  и преобладает вклад от учета размера ядра. Стоит отметить, что пространства параметров  $1 \text{ МэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 1 \text{ ГэВ}$  и  $10 \text{ ГэВ} \lesssim E_l \lesssim 100 \text{ ГэВ}$  как параметры экранирования, так и параметры размера ядра могут вносить вклад в поток виртуальных фотонов и, таким образом, в общий выход рождения медиатора темной материи.

Далее, перейдем к ядерному форм-фактору Хельма  $F_{\text{H}_{\text{nucl}}}(t)$ , который связан с плотностью заряда как свертка сферически однородного заряда внутри ядра и гауссовского профиля для более точного учета края ядра [162]. Тогда, ядерный форм-фактор Хелма  $F_{\text{H}_{\text{nucl}}}(t)$  и соответствующий атомный форм-фактор Хельма  $F_{\text{H}}(t)$  принимают вид [31; 163]:

$$F_{\text{H}_{\text{nucl}}}(t) = \frac{3j_1(\sqrt{t}R_{\text{H}})}{\sqrt{t}R_{\text{H}}} e^{-s_{\text{H}}^2 t/2}, \quad F_{\text{H}}(t) = t/(t_a + t) F_{\text{H}_{\text{nucl}}}(t), \quad (2.29)$$

где  $j_1(x)$  - сферическая функция Бесселя первого рода, эффективный ядерный радиус  $R_{\text{H}}$  может быть параметризован как:

$$R_{\text{H}} = \sqrt{c_{\text{H}}^2 + (7/3)\pi^2 a_{\text{H}}^2 - 5s_{\text{H}}^2},$$

где  $s_{\text{H}} = 0.9$  фм - толщина ядерной оболочки,  $a_{\text{H}} = 0.52$  фм и  $c_{\text{H}} = (1.23A^{1/3} - 0.6)$  фм. Стоит отметить, что для форм-фактора Хелма используется условие  $F_{\text{H}_{\text{nucl}}} = 0$  при  $t \gtrsim (4.49/R_{\text{H}})^2$ , т.е. значением форм-фактора на этом диапазоне квадрата переданного импульса ядру можно пренебречь [31].

Рассмотрим экспоненциальный атомный форм-фактор, для которого соответствующая плотность заряда представлена гауссовским распределением, принимающий вид [164]:

$$F_E(t) = t/(t_a + t) \exp(-tR_{\text{exp}}^2/6), \quad (2.30)$$

где средний радиус ядра определяется как  $R_{\text{exp}} = (0,91A^{1/3} + 0,3)$  фм. Как обсуждалось выше, для учета экранирования кулоновского поля ядра атомными электронами в уравнении (2.30) введен экранирующий множитель  $t/(t_a + t)$ .

Опишем поведение упругих форм-факторов  $F(t)$  в зависимости от квадрата переданного импульса  $t$ . При значениях  $t$  от  $\mathcal{O}(10^{-8})$  ГэВ<sup>2</sup> до  $\mathcal{O}(10^{-3})$  ГэВ<sup>2</sup> все виды рассматриваемых атомных и ядерных форм-факторов принимают значение  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ<sup>2</sup>, однако при значениях  $t \lesssim \mathcal{O}(10^{-8})$  ГэВ<sup>2</sup> атомные стремятся к 0, а ядерный принимает постоянное значение  $\mathcal{O}(1)$  форм-факторы. При  $t \gtrsim \mathcal{O}(10^{-3})$  ГэВ<sup>2</sup> ядерные форм-факторы совпадают с соответствующими атомными форм-факторами. Кроме того, в этой области происходит резкое падение значений форм-фактора. В частности, зарезание происходит для хельмовского форм-фактора при  $t \simeq \mathcal{O}(10^{-2})$  ГэВ<sup>2</sup>, для экспоненциального при  $t \simeq \mathcal{O}(10^{-1})$  ГэВ<sup>2</sup>, однако форм-фактор Тсаи-Шиффа падает достаточно медленно, по степенному закону.

Стоит отметить, что существуют также модели форм-фактора, учитывающие плотность заряда как сумму функций Гаусса, Фурье-Бесселя и плотности заряда Клейна-Нистранда [159; 165–168]. Кроме того, в литературе обсуждается распределение Ферми для заряда ядра [163; 167].

## Поток виртуальных фотонов

Важно отметить, что интегрирование по квадрату переданного импульса для потока виртуальных фотонов (2.6) и упругого форм-фактора Тсаи-Шиффа (2.28) можно выполнить аналитически через элементарные функции. Последнее упрощение может быть использовано как для сокращения вычислительного времени численного интегрирования, так и для аналитического интегрирования дифференциального сечения (2.9). В частности, виртуальный поток фотонов в аналитической форме для атомного форм-фактора Тсаи-Шиффа вы-

глядит следующим образом [51]:

$$\chi_{\text{TS}} = \frac{Z^2 t_d^2}{(t_a - t_d)^3} \left\{ [C_1^\chi + C_2^\chi t_{\min}] + [C_3^\chi - 2t_{\min}] \ln \left[ \frac{t_{\min} + t_d}{t_{\min} + t_a} \right] \right\}, \quad (2.31)$$

где коэффициенты  $C_1^\chi$ ,  $C_2^\chi$  и  $C_3^\chi$  определяются следующими выражениями, соответственно:

$$C_1^\chi = \left\{ \frac{t_d(t_a - t_d)}{t_d + t_{\max}} + \frac{t_a(t_a - t_d)}{t_a + t_{\max}} - 2(t_a - t_d) + (t_a + t_d) \ln \left[ \frac{(t_d + t_{\max})}{(t_a + t_{\max})} \right] \right\},$$

$$C_2^\chi = \left( \frac{t_a - t_d}{t_d + t_{\max}} + \frac{t_a - t_d}{t_a + t_{\max}} + 2 \ln \left[ \frac{t_d + t_{\max}}{t_a + t_{\max}} \right] \right), \quad C_3^\chi = -(t_a + t_d).$$

Аналогично, для экспоненциального атомного форм-фактора (2.30), поток виртуальных фотонов (2.6) выражается аналитически через специальные функции как:

$$\chi_E = Z^2 \left( \frac{t_a + t_{\min}}{t + t_a} e^{-\frac{R_{\text{exp}}^2 t}{3}} + \frac{3 + R_{\text{exp}}^2 (t_a + t_{\min})}{3} e^{\frac{R_{\text{exp}}^2 t_a}{3}} \text{Ei} \left[ -\frac{R_{\text{exp}}^2 (t + t_a)}{3} \right] \right) \Bigg|_{t_{\min}}^{t_{\max}}, \quad (2.32)$$

где  $\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^t/t dt$  — интегральная показательная функция. Однако, поток фотонов с форм-фактором Хельма не может быть проинтегрирован аналитически в элементарных функциях и для него используется численное интегрирование. Также стоит отметить, что соответствующие неэкранированные потоки фотонов могут быть получены из (2.31) и (2.32) при  $t_a = 0$ .

На рисунке 2.2 изображен поток виртуальных фотонов для различных форм-факторов как функция от квадрата минимального переданного импульса (2.16). Из приведенного графика видно, что для  $t_{\min}$  в диапазоне от  $10^{-10}$  ГэВ<sup>2</sup> до  $10^{-3}$  ГэВ<sup>2</sup> отличие во вкладах в поток фотонов для различных атомных форм-факторов на уровне 5%. Также, на этом рисунке видно, что до значения  $t_{\min} \approx 10^{-3}$  ГэВ<sup>2</sup> форм-факторы Хельма (2.29) и экспоненциальный (2.30) дают больший вклад, чем Тсаи-Шиффа (2.28). Однако, при значениях  $t_{\min} > 10^{-3}$  ГэВ<sup>2</sup> происходит почти полное зарезание потока фотонов для хельмовского и экспоненциального форм-факторов относительно форм-факто-

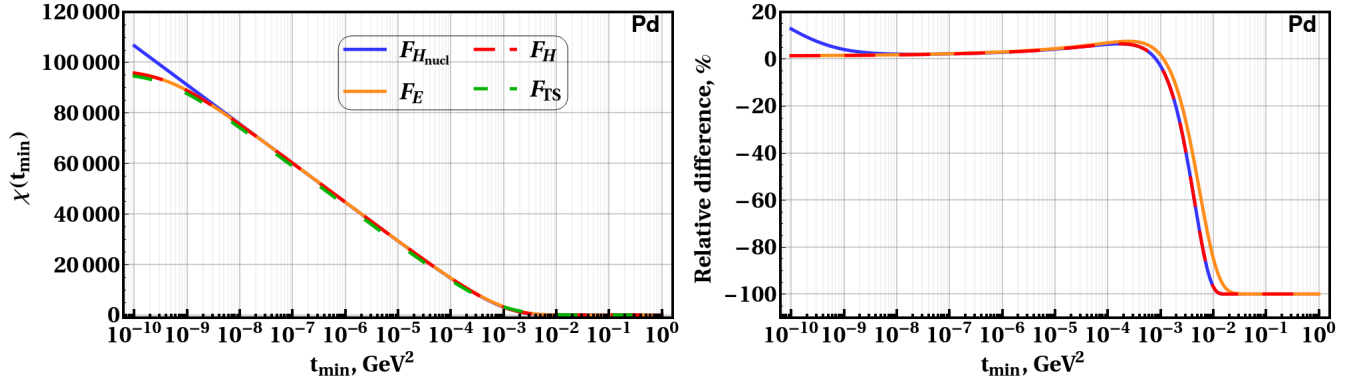


Рисунок 2.2 — (Слева) виртуальный поток фотонов как функция нижнего предела  $t_{\min}$  при массе медиатора 1 ГэВ для форм-факторов Тсаи-Шиффа  $F_{TS}$  (зеленая пунктирная линия), ядерного Хелма  $F_{H_{\text{nucl}}}$  (синяя сплошная линия), атомного Хелма  $F_H$  (красная пунктирная линия) и атомного экспоненциально-го  $F_E$  (оранжевая пунктирная линия). (Справа) относительная разница между эталонным потоком виртуальных фотонов с форм-фактором Тсаи-Шиффа и другими форм-факторами.

ра Тсаи-Шиффа, что приводит к разнице около 100% для  $t_{\min} > 10^{-2}$  ГэВ<sup>2</sup>. Стоит отметить, что зарезание для диапазона  $t_{\min} > 10^{-3}$  ГэВ<sup>2</sup> в случае хельмовского форм-фактора происходит сильнее экспоненциального форм-фактора. Для региона  $t_{\min} < t_a \approx 10^{-9}$  ГэВ<sup>2</sup> вклад от учета экранирования атомными электронами становится заметным. На это диапазоне вклад в поток фотонов от ядерного на 10 – 15% больше атомного форм-фактора. Однако, для диапазона  $t_{\min} \gg t_a$  эффект экранирования незначительный и атомный и ядерный форм-факторы совпадают.

Далее, с учетом формулы (2.23), характерные массы медиатора темной матери, ниже которых значительный эффект оказывает экранирование ядра атомными электронами, принимают значения  $m_{\text{MED}} \approx (4E_0^2 t_a)^{1/4}$ . Аналогично, характерные массы медиатора, выше которых начинается значительное зарезание сечения Вайцеккера-Вильямса потоком виртуальных фотонов, имеют вид  $m_{\text{MED}} \approx (4E_0^2 t_d)^{1/4}$ .



### 2.1.3 Интегрирование по углу двойного дифференциального сечения Вайцзеккера-Вильямса

В данном разделе рассматривается интегрирование по углу дважды дифференциального сечения Вайцзеккера-Вильямса, которое позволяет упростить расчеты и избежать проблем при численном вычислении двойного интеграла. Дифференциальное сечение для комптон-подобного процесса излучения скалярного, псевдоскалярного, векторного, псевдовекторного и тензорного медиаторов зависит от угла через переменные Манделъштама (2.4) как:

$$\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}}{d(p \cdot k)} = \frac{|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2}{8\pi(s_2 - m_l^2)^2} = \frac{P(s_2, t_2, u_2)}{f_{\text{Den}}^{\text{MED}}(U)}, \quad f_{\text{Den}}^{\text{MED}}(U) = (s_2 - m_l^2)^k (u_2 - m_l^2)^l t_2^n, \quad (2.33)$$

где  $P(s_2, t_2, u_2)$  - полиномиальная функция по всем аргументам,  $f_{\text{Den}}^{\text{MED}}(U)$  - знаменатель дифференциального сечения для комптон-подобного процесса излучения медиатора,  $n = 1$ ,  $l = 2$ ,  $k = 4$  для тензорного медиатора,  $n = 0$ ,  $l = 1$ ,  $k = 3$  для остальных типов медиаторов и переменная  $U$  определена в формуле (2.15). Явный вид матричных элементов медиаторов приведен в приложении A.1.2. В случае атомного форм-фактора Тсаи-Шиффа (2.28) можно проинтегрировать по углу сечение Вайцзеккера-Вильямса (2.9), которое в терминах переменной  $U$  принимает вид:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx dU} \right|_{\text{WW}} = \frac{\alpha\chi}{\pi} \frac{1}{2E_l^2 x} \frac{E_l^2 x}{1-x} \sqrt{1 - \frac{m_{\text{MED}}^2}{(xE_l)^2}} \frac{|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2}{8\pi(s_2 - m_l^2)^2}, \quad (2.34)$$

где в формуле (2.34) использована замена переменной  $d\cos(\theta_{\text{MED}}) = -1/(2xE_0^2)dU$  с новыми пределами интегрирования:

$$U_{\text{max}} = E_l^2 \theta_{\text{max}}^2 x + m_{\text{MED}}^2 (1-x)/x + m_l^2 x, \quad U_{\text{min}} = m_{\text{MED}}^2 (1-x)/x + m_l^2 x, \quad (2.35)$$

В итоге, используя при разложении на простые дроби выражения  $U^l/f_{\text{Den}}^{\text{MED}}(U)$  в подынтегральной функции (2.34), получим интегралы для аналитического интегрирования двойного дифференциального сечения Вайц-

зеккера-Вильямса как:

$$I_1(x, U, l) = U^l, \quad I_2(x, U, l) = \int_{U_{min}}^{U_{max}} U^l \ln \left[ \frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (2.36)$$

$$I_3(x, U, l) = \int_{U_{min}}^{U_{max}} \frac{U^l}{U + A(x)} dU, \quad l \geq 0, \quad (2.37)$$

$$I_4(x, U, l) = \int_{U_{min}}^{U_{max}} \frac{U^l}{U + A(x)} \ln \left[ \frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \geq 0, \quad (2.38)$$

где явный вид для  $I_1(x, U, l)$  тривиален, а для остальных интегралов выше явный вид приведен в приложении [A.1.5](#). Как видно из выражения выше, в случае тензорного медиатора необходимо дополнительно вычислить интеграл  $I_4(x, U, l)$  в отличие от других типов медиаторов. Частный вид выражений выше был использован в случае мюонного первичного пучка при расчете дифференциального сечения рождения векторного, скалярного и псевдоскалярного медиаторов на активной мишени в статье [\[148\]](#). Также стоит отметить, что зануление массы налетающего лептона может привести к неопределенности в итоговом выражении в случае наличия t-канала. Действительно, интеграл  $I_4(x, U_{min}, l)$  содержит  $\ln(m_l^2 x)$ , где  $U_{min}$  определен в выражении [\(2.35\)](#).

## 2.2 Сечение аннигиляции через медиатор

В данном разделе рассматриваются выражения ширин и сечений для аннигиляции через медиатор. В частности, аннигиляция в темную материю используется для расчетов ограничений на константу взаимодействия между медиатором и электроном. Реакции аннигиляции через медиатор в электрон-позитронную пару используются для расчетов реликтовых кривых термальной легкой темной материи.

Далее, приведем ширины распада скалярного и тензорного медиаторов темной материи для невидимой моды. Для невидимой моды предполагается, что темная материя легче медиатора, т.е. справедливо  $m_{MED} \gtrsim 2m_{DM}$ . В нашем исследовании мы считаем, что для ширин распада медиатора выполняется

соотношение  $\Gamma_{\text{MED} \rightarrow e^-e^+} \ll \Gamma_{\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}$  и, следовательно, для полной ширины распада медиатора справедливо  $\Gamma_{\text{tot}} \simeq \Gamma_{\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}$ . Расчеты ширины выполнялись с использованием пакета FeynCalc [169; 170] в программе Wolfram Mathematica [171].

Ширины распада для скалярного электронспецифического медиатора в случае векторной [134], дираковской [93; 130], майорановской [131], скалярной [131] темной материи и для электрон-позитронной пары принимают следующий вид, соответственно:

$$\Gamma_{\phi \rightarrow VV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\alpha_V m_\phi^3}{32\pi} \left(1 - \frac{4m_V^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi m_\phi}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \chi\chi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\alpha_\chi m_\phi}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow SS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\alpha_S}{16\pi m_\phi} \left(1 - \frac{4m_S^2}{m_\phi^2}\right)^{1/2}, \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow e^+e^-} \simeq \frac{(c_{ee}^\phi)^2 m_\phi}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_e^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (2.43)$$

Аналогично, в случае электронспецифического тензорного медиатора ширины распада для дираковской, скалярной, векторной темной материей и электрон-позитронной пары принимают следующие выражения, соответственно [32]:

$$\Gamma_{G \rightarrow \psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi m_G^3}{160\pi} \left(1 + \frac{8m_\psi^2}{3m_G^2}\right) \left(1 - 4\frac{m_\psi^2}{m_G^2}\right)^{3/2}, \quad (2.44)$$

$$\Gamma_{G \rightarrow SS} = \frac{4\pi\alpha_S m_G^3}{960\pi} \left(1 - 4\frac{m_S^2}{m_G^2}\right)^{5/2}, \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{G \rightarrow VV} = \frac{4\pi\alpha_V m_G^3}{960\pi} \left(1 - 4\frac{m_V^2}{m_G^2}\right)^{1/2} \left(13 + 56\frac{m_V^2}{m_G^2} + 48\frac{m_V^4}{m_G^4}\right), \quad (2.46)$$

$$\Gamma_{G \rightarrow e^+e^-} \simeq \frac{(c_{ee}^G/\Lambda)^2 m_G^3}{160\pi}, \quad (2.47)$$

## 2.2.1 Аннигиляция в темную материю через медиатор

В случае экспериментов с фиксированной мишенью процесс электрон-позитронной аннигиляции в темную материю может возникать в результате взаимодействия вторичных позитронов электромагнитного ливня с атомными электронами в толстой активной мишени. В свою очередь, электромагнитный ливень возникает в результате падения высокоэнергетического первичного электронного или позитронного пучка на мишень. Также стоит отметить, что из-за соотношения масс  $m_e \ll m_{\text{MED}}$ , вклад в рождение темной материи дают только ультрарелятивистские позитроны и, следовательно, можно положить  $|\mathbf{p}_{e^+}| \simeq E_{e^+}$ . Далее, пренебрегая движением электрона в атоме, типичные импульсы атомных электронов и вторичных позитронов можно записать как  $p_{e^-} = (m_e, 0, 0, 0)$  и  $p_{e^+} \simeq (E_{e^+}, 0, 0, E_{e^+})$ , соответственно. Таким образом, инвариантная масса принимает следующее выражение:

$$s = (m_e + E_{e^+})^2 - |\mathbf{p}_{e^+}|^2 = m_e^2 + 2m_e E_{e^+} \simeq 2m_e E_{e^+}. \quad (2.48)$$

Принимая во внимание, что эксперименты с фиксированной мишенью ограничены по энергии нижним порогом  $E_{\text{cut}}$  и энергией первичного пучка  $E_0$ , масса медиатора, на которую можно наложить ограничения в резонансном процессе, лежит в диапазоне  $\sqrt{2E_{\text{cut}}m_e} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim \sqrt{2E_0m_e}$ .

Важно отметить, что для расчета резонансного полного сечения для процесса электрон-позитронной аннигиляции в пару частиц темной материи через медиатор можно использовать формулу Брейта-Вигнера [172]:

$$\sigma_{e^-e^+ \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM DM}} = N_{\text{spin}}^{\text{BW}} \frac{16\pi}{(1 - 4m_t^2/s)} \frac{\Gamma_{\text{in}}(s)\Gamma_{\text{out}}(s)}{(s - m_{\text{MED}}^2)^2 + m_{\text{MED}}^2(\Gamma_{\text{tot}})^2}, \quad (2.49)$$

где  $N_{\text{spin}}^{\text{BW}} = C_{\text{BW}}(2J + 1)(2S_1 + 1)^{-1}(2S_2 + 1)^{-1}$  - коэффициент, учитывающий внутренние степени свободы,  $s$  - инвариантная масса,  $\Gamma_{\text{tot}}$  - полная ширина распада медиатора,  $\Gamma_{\text{in}}$ ,  $\Gamma_{\text{out}}$  - ширины распада медиатора в начальное и конечное состояния, соответственно,  $J$  - спин медиатора,  $S_1$  и  $S_2$  - спины начальных частиц,  $C_{\text{BW}} = 1$  и  $C_{\text{BW}} = 2$  для различных и одинаковых частиц в исходном

состоянии, соответственно. Действительно, фактор  $C_{\text{BW}}$  компенсирует дополнительный множитель в ширине распада в случае одинаковых частиц [173]. Положение пика связано только с массой медиатора и не зависит от типичной величины темной и электромагнитной постоянных тонкой структуры  $\alpha_{\text{DM}}$  и  $\alpha$ , соответственно. Кроме того, решение уравнения  $(s - m_{\text{MED}}^2)^2 \simeq m_{\text{MED}}^2 \Gamma_{\text{tot}}^2$  в знаменателе формулы (2.49) позволяет оценить ширину пика около резонансной области на половине высоты как  $\Delta s = m_{\text{MED}} \Gamma_{\text{tot}}$ , и, следовательно, справедлива оценка  $\Delta s \sim \alpha_{\text{DM}}$ . Из формулы (2.49) видно, что при резонансных значениях  $s \approx m_{\text{MED}}^2$ , пиковое значение сечения принимает вид:

$$\sigma_{e^-e^+ \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}^{\text{peak}} = N_{\text{spin}}^{\text{BW}} \frac{16\pi}{(m_{\text{MED}}^2 - 4m_l^2)} \frac{\Gamma_{\text{in}}(m_{\text{MED}}^2)}{\Gamma_{\text{out}}(m_{\text{MED}}^2)} \sim \alpha/\alpha_{\text{DM}}. \quad (2.50)$$

Также стоит упомянуть, что вклад в сечение в области  $4m_{\text{DM}}^2 \lesssim s \lesssim m_{\text{MED}}^2$  связан с тем, что медиатор лежит вне массовой оболочки, и, как следствие, соответствующий вклад подавлен.

В случае невидимой моды, считая полную ширину малой как  $\Gamma_{\text{tot}}/m_{\text{MED}} \ll 1$  и используя представление дельта-функции Дирака как  $\delta(x) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma/[\pi(x^2 + \Gamma^2)]$ , формула Брейта-Вигнера в приближении узкой ширины принимает следующий вид:

$$\sigma_{l-l^+ \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM DM}} = N_{\text{spin}}^{\text{BW}} \frac{16\pi}{(1 - 4m_l^2/s)} \frac{\pi \Gamma_{\text{in}}(s)}{m_{\text{MED}}^2} \delta(s - m_{\text{MED}}^2), \quad (2.51)$$

где принято во внимание, что  $\Gamma_{\text{out}}/\Gamma_{\text{tot}} \approx 1$ . Из формулы (2.51) видно, что в приближении узкой ширины процесс аннигиляции заряженной лептонной пары в темную материю проходит только через резонанс находящийся на массовой оболочке. Так же стоит отметить, что в приближении узкой ширины для аннигиляции лептонной пары в темную материю полное сечение не зависит от типа темной материи. Кроме того, приближение узкой ширины справедливо в предельном случае  $m_{\text{DM}}/m_{\text{MED}} \rightarrow 1/2$ .

Явный вид сечений аннигиляции электро-позитронной пары в темную материю приведен в приложении A.1.4 для скалярного медиатора в формулах (A.17) - (A.20) и для тензорного медиатора в выражениях (A.10) - (A.12).

## 2.2.2 Аннигиляция в лептон-антилептонную пару через медиатор

Меняя местами входящий и выходящий канал в формуле Брейта-Вигнера (2.49), получим аналогичную формулу для расчета аннигиляции темной материи в электрон-позитронную пару. В частности, явный вид сечений аннигиляции приведен для скалярного медиатора в формулах (A.13) - (A.16) и для тензорного медиатора в выражениях (A.6) - (A.8).

### Нерелятивистское приближение

Для получения выражений для сечений аннигиляции в нерелятивистском приближении можно использовать выражения для инвариантной массы  $s \simeq 4m_{\text{DM}}^2$  и скорости Мольера в системе центра масс (1.17). В частности, для скалярного электронспецифического медиатора в случае майорановской [41; 131], дираковской [93; 174], скалярной [131] и векторной темной материи справедливо, соответственно:

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{\chi\bar{\chi}\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_{\chi}(c_{ee}^{\phi})^2 m_{\chi}^2 \beta_e^3 (4m_{\chi}^2)}{8\pi D_{\chi}^{\phi} (4m_{\chi}^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.52)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{\psi\bar{\psi}\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_{\psi}(c_{ee}^{\phi})^2 m_{\psi}^2 \beta_e^3 (4m_{\psi}^2)}{8\pi D_{\psi}^{\phi} (4m_{\psi}^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.53)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{SS\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_S (c_{ee}^{\phi})^2 \beta_e^3 (4m_S^2)}{4\pi D_S^{\phi} (4m_S^2)}, \quad (2.54)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{VV\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_V (c_{ee}^{\phi})^2 m_V^4 \beta_e^3 (4m_V^2)}{18\pi D_V^{\phi} (4m_V^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.55)$$

где для совпадения с источниками необходимо положить  $D_{\text{DM}}^2(4m_{\text{DM}}^2) \simeq (4m_{\text{DM}}^2 - m_{\phi}^2)^2$ , и были использованы обозначения:

$$\beta_f(s) = \sqrt{1 - 4m_f^2/s}, \quad D_{\text{DM}}^{\text{MED}}(s) = (s - m_{\text{MED}}^2)^2 + m_{\text{MED}}^2 \Gamma_{\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}^2. \quad (2.56)$$

Также стоит отметить, что в случае скалярного медиатора и майорановской, дираковской и векторной темной материи аннигиляция происходит в р-волну, а для скалярной темной материи в s-волну. Аналогично, для тензорного электрон-

специфического медиатора выполняется и дираковской, скалярной и векторной темной материи справедливо, соответственно [175]:

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{\psi\bar{\psi}\rightarrow G\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_\psi(c_{ee}^G)^2 m_\psi^6 \beta_e^3 (4m_\psi^2) (3 + 2m_e^2/m_\psi^2)}{72\pi D_\psi^G (4m_\psi^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.57)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{SS\rightarrow G\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_S(c_{ee}^G)^2 m_S^6 \beta_e^3 (4m_S^2) (3 + 2m_e^2/m_S^2)}{360\pi D_S^G (4m_S^2)} v_{\text{Mol}}^4, \quad (2.58)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{VV\rightarrow G\rightarrow e^+e^-} = \frac{4 \cdot 4\pi\alpha_V(c_{ee}^G)^2 m_V^6 \beta_e^3 (4m_V^2) (3 + 2m_e^2/m_V^2)}{27\pi D_V^G (4m_V^2)}, \quad (2.59)$$

Кроме того, что для тензорного медиатора и дираковской, скалярной и векторной темной материи аннигиляции происходят в р-волну, d-волну и s-волну, соответственно.

Также следует отметить, что с учетом формулы Брейта-Вигнера (2.49) для обратного канала, при заданной ширине распада  $\Gamma_{\text{MED}\rightarrow\text{DM DM}}(s) \sim (1 - 4m_{\text{DM}}^2/s)^{n/2}$  и  $n < 2$  для данного типа темной материи отсутствует подавление по скорости. В частности, такой тип темной материи исключен из-за ограничений из наблюдаемого спектра космического микроволнового излучения. Также, термальные кривые при получении нерелятивистского приближения для сечений аннигиляции выше в случае рассматриваемых типов темной материи совпадают [57] с результатами расчета через разложение квадрата матричного элемента в источнике [118].

## Результаты второй главы

В данном разделе были приведены формулы для расчета дифференциального сечения рождения скалярного и тензорного медиаторов темной материи на тяжелом ядре в приближении Вайцеккера-Вильямса в случае высокоэнергетического первичного пучка. Приведены основные модели ядерных и атомных форм-факторов и рассмотрены влияния экранирования атомными электронами и форм-факторов на соответствующий поток виртуальных фотонов. Также получены ширины распада медиатора и полные сечения для процессов аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени и механизма истощения реликтового избытка темной материи.

## Глава 3

## Ограничения на параметры темной материи из экспериментов с фиксированной мишенью

Предположение о термальном происхождении темной материи интервале масс от  $\mathcal{O}(1)$  MeV до  $\mathcal{O}(1)$  GeV переводит её пространство параметров в область чувствительности установок с фиксированной мишенью и экспериментов коллайдерного типа. Отсутствие сигнальных событий в данных экспериментах позволяет исключать различные модели темной материи и ее медиаторов. При падении высокоэнергетического лептона на мишень, приближение Вайцзеккера-Вильямса и формула Брейта-Вигнера позволяют оценить сечения рождения медиаторов, а следовательно верхний предел для ожидаемого числа испускаемых медиаторов при рассеянии электронов на ядре и при аннигиляции вторичных позитронов ливня в мишени, соответственно.

### 3.1 Лептонные эксперименты по поиску темной материи

В данном разделе приводятся основные параметры экспериментов с фиксированной мишенью для различных лептонных пучков. Кроме того, дополнительно приводятся сведения об электронных столкновительных экспериментах, из которых можно получить ограничения на константы взаимодействия темной материи.

#### 3.1.1 Коллайдерные эксперименты

##### ВаВаг

ВаВаг является завершившимся экспериментом в SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), который изначально использовал асимметричную реакцию электрон-позитронной аннигиляции для детального изучения нарушения CP-симметрии при распадах B-мезонов [176]. Однако, электрон-позитронная аннигиляция в эксперименте ВаВаг позволяет поставить ограничения на константу взаимодействия электрона и векторного медиатора темной материи [177–180]. А



именно, для масс векторного медиатора  $\lesssim \mathcal{O}(1)$  ГэВ ограничения на константу взаимодействия с электроном дают значение  $\epsilon < 10^{-3}$  на уровне достоверности 90 %.

## Belle II

Belle II представляет собой текущий эксперимент в японской организации КЕК (accelerator research organization) возле города Цукуба на ускорительном комплексе SuperKEKB, который использует асимметричную реакцию электрон-позитронной аннигиляции для изучения нарушения CP-симметрии при распадах В-мезонов и их физики [45]. Аналогично, эксперимент Belle II дает ограничения на переход материи в темный сектор [41].

### 3.1.2 Эксперименты с фиксированной мишенью

#### NA64e

Эксперимент NA64e является калориметрическим экспериментом с фиксированной мишенью, который расположен в северной зоне европейской организации ядерных исследований (ЦЕРН) на линии H4 протонного суперсинхротрона. Попадающие на бериллиевую мишень с тонким свинцовым конвектором протоны от ускорителя дают пучок ультрарелятивистских электронов (позитронов) с энергией  $E_0 \simeq 100$  ГэВ, который рассеивается на ядрах активной толстой мишени эксперимента NA64e. Основным каналом для рождения электронов (позитронов) служит реакция  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ , где короткоживущие пионы рождаются протонами в бериллиевой мишени и распадаются на гамма-кванты, которые в свинцовом конвекторе переходят в электрон-позитронную пару [181]. Основные составляющие компоненты эксперимента NA64e это [181; 182]:

1. Трекер с малым поглощением энергии, позволяющий прецизионно измерять начальный импульс пучка с точностью до 1%.
2. Два магнитных спектрометра, отклоняющих первичный пучок заряженных частиц и генерирующих синхротронное излучение.
3. Детектор синхротронного излучения, который используется для подавления фона через детектирование заряженных частиц [183].

4. Активная мишень, которая представляет собой электромагнитный калориметр с толщиной в 40 радиационных длин сегментированный на ячейки из чередующихся пластиковых сцинтилляторов и свинцовых поглотителей.
5. Вето-счетчик и адронного калориметр с толщиной в 30 ядерных длин, который служит для исключения фоновых ядерных реакций в мишени.

Невидимая мода распада предполагает, что распад медиатора в темный сектор является доминирующим. Доля энергии первичного пучка  $E_{\text{miss}} = xE_0$  может быть унесена в результате рождения частиц темной материи, которые проходят все детектора эксперимента NA64e без взаимодействия и осаждения энергии в случае невидимой моды. Оставшаяся часть энергии пучка,  $E_e^{\text{rec}} \simeq (1 - x)E_0$ , может быть выделена в электромагнитном калориметре NA64e электронами (позитронами) отдачи. Для ожидаемой формы электромагнитного ливня типичная доля общего энерговыделения в мишени составляет 0,5 от энергии первичного пучка, что влечет требование для доли недостающей энергии  $E_{\text{miss}} > 0,5E_0$  [184]. Для эксперимента NA64e используются следующие параметры мишени:

$$\rho \simeq 11.34 \text{ г см}^{-3}, A = 207 \text{ г моль}^{-1}, Z = 82, L_T = X_0, x_{\text{min}} = 0.5, \quad (3.1)$$

где  $Z$  - заряд ядра мишени,  $A$  - атомный номер ядер мишени,  $X_0 = 0.56 \text{ см}$  - радиационная длина электрона в свинце,  $L_T$  - эффективная длина взаимодействия и  $x_{\text{min}}$  - порог доли унесенной энергии. Эффективности рождения на ядре  $\eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}}$  и в аннигиляции на атомных электронах  $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$  принимаются на уровне 90% как для электронного, так и для позитронного пучка [182]. Критерии отбора событий в набранную статистику для эксперимента NA64e можно сформулировать следующим образом [182; 185]:

1. Трекерная система должна давать только один трек и импульс трека пучка должен быть в пределах  $100 \pm 10 \text{ ГэВ}$ .
2. Регистрируемая энергия в детекторе синхротронного излучения должна соответствовать энергии синхротронного излучения от  $e^\pm$  в магнитах спектрометра.

3. форма ливня в электромагнитном калориметре от события должна соответствовать ожидаемой форме [184; 186; 187];

Прогнозируемая статистика для эксперимента NA64e в конечной фазе  $\simeq 5 \times 10^{12}$  электронов упавших на мишень (ЕОТ). Для оценки текущей чувствительности эксперимента к обнаружению медиаторов темной материи использовалась статистика набранная в 2016–2023 годах  $\simeq 9.37 \times 10^{11}$  ЕОТ [188].

### NA64 $\mu$

Эксперимент NA64 $\mu$  работает в режиме мюонного пучка на линии M2 протонного суперсинхротрона в северной зоне ЦЕРН, который использует структуру детекторной системы эксперимента NA64e. Однако, в эксперименте NA64 $\mu$  важна точная реконструкция импульса падающей частицы для выделения фоновых процессов, так как мюоны обычно проявляют себя как минимально ионизирующие частицы и проходят всю детекторную систему с малым изменением импульса [189]. Для расчетов событий рождения медиаторов на мишени NA64 $\mu$  можно использовать параметры электронной моды (3.1), за исключением эффективной длины взаимодействия  $L_T \simeq 40X_0 \simeq 22.5$  см. Также следует отметить, что порог доли унесенной энергии  $x_{min} = 0.5$  получен как сумма пиков минимальных ионизирующих частиц соответствующих энергетических спектров [189]. Для оценки чувствительности NA64 $\mu$  используется энергия мюонного пучка  $E_\mu \simeq 160$  ГэВ и прогнозируемая статистика  $\simeq 5 \times 10^{13}$  мюонов упавших на мишень (МОТ) [190]. В эксперименте NA64 $\mu$  используется свинцовый электромагнитный калориметр, для которого можно пренебречь потерями для ультрарелятивистских мюонов из-за небольшого затухания энергии в свинце  $\langle dE_\mu/dx \rangle \simeq 12.7 \times 10^{-3}$  ГэВ/см [191]. Аналогично, критерии отбора событий в статистику для эксперимента NA64 $\mu$  принимают следующий вид [190]:

1. Трекерная система должна регистрировать импульс пучка в пределах  $160 \pm 20$  ГэВ с одиночным треком.
2. Единственный трек, который входит в адронный калориметр, и поведение этой частицы в адронном калориметре должно соответствовать минимально ионизирующей частице.
3. Энерговыделение в калориметрической системе эксперимента должно быть совместимым с минимально ионизирующей частицей.

Интенсивность мюонного пучка на линии M2 в  $\simeq 10$  раз выше электронной моды на линии H4 из-за чего за схожее время эксперимент NA64 $\mu$  накопит планируемую статистику быстрее чем эксперимент NA64e.

## LDMX

LDMX (Light Dark Matter Experiment) представляет собой планируемый в лаборатории SLAC эксперимент с электронным пучком, который использует уникальную методику измерения недостающего импульса электронов [192; 193]. Основные составляющие эксперимента LDMX это [192; 194]:

1. Система мечения состоящая из кремниевых модулей с ожидаемой точностью 1% и расположенной внутри дипольного магнита с 1.5 Т, которая используется для проверки требуемого полного импульса и направления падения пучка.
2. Тонкая мишень из алюминия или вольфрама с толщиной  $0.1X_0 - 0.4X_0$  расположенная в конце магнита по направлению пучка.
3. Трекер отдачи расположенный после мишени и перед электромагнитным калориметром, используемый для измерения импульса более мягких вторичных электронов по сравнению с полученными системой мечения.
4. Электромагнитный калориметр из чередующихся сцинтиллятора и вольфрамового поглотителя, в котором падающие частицы образуют электромагнитный ливень.
5. Адронным калориметром из чередующихся сцинтиллятора и железного поглотителя с толщиной в 3 ядерных длины, улавливающий образовавшиеся адроны в электромагнитном калориметре.

Также следует подчеркнуть, что наличие магнитного поля между мишенью и электромагнитным калориметром позволяет разделять электромагнитные ливни от фотонов и электронов. Таким образом, для эксперимента LDMX используются следующие параметры:

$$\rho \simeq 2.7 \text{ г см}^{-3}, A = 27 \text{ г моль}^{-1}, Z = 13, L_T = 0.4X_0, x_{min} = 0.7. \quad (3.2)$$

Энергия первичного пучка выбрана равной  $E_0 \simeq 16$  ГэВ, а прогнозируемая статистика соответствует  $EOT \simeq 10^{15}$ . Далее, правила отбора событий с недостающим импульсом в LDMX принимают следующий вид [41]:

1. Импульс трека пучка должен быть измерен детектором на уровне  $\simeq 16$  ГэВ.
2. Кремниевый трекер, установленный ниже по потоку от мишени, должен отмечать большой перенос импульса частицы отдачи  $e^\pm$ , связанный с эмиссией темной материи.
3. Форма ливня в электромагнитном калориметре должна соответствовать ожидаемой [41], где подразумевается порог для энергии электрона отдачи (позитрона)  $E_e^{\text{rec}} \lesssim 0.3E_0 \simeq 4.8$  ГэВ.

Явное исследование оценки фоновых событий произведено только для рождения медиатора на ядрах мишени в режиме электронного пучка [195]. Однако, в дальнейших рассуждениях предполагается, что для позитронного пучка LDMX и канала аннигиляции фоновые реакции будут аналогичными. Типичные эффективности  $\eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}}$  и  $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$  оцениваются на уровне  $\simeq 50\%$  в случаях электронного и позитронного первичного пучка [194].

### M<sup>3</sup>

M<sup>3</sup> (Muon Missing Momentum Experiment) представляет собой разрабатываемый эксперимент в SLAC по измерению недостающего импульса мюонного пучка на фиксированной мишени. Эксперимент M<sup>3</sup> направлен на исследование частиц темного сектора с помощью мюонной сигнатуры недостающего импульса в процессе  $\mu N \rightarrow \mu N \text{ MED}(\rightarrow \chi\bar{\chi})$ . Аналогично как с NA64 $\mu$  и NA64 $e$ , эксперимент M<sup>3</sup> рассматривается как дополнительный к LDMX и имеет схожую детекторную базу [194]. Однако, основное различие между постановками экспериментов M<sup>3</sup> и LDMX заключается в использовании толстой активной мишени, для которой можно выбрать параметры в виде [121]:

$$\rho \simeq 19.3 \text{ г см}^{-3}, \quad A = 184 \text{ г моль}^{-1}, \quad Z = 74, \quad L_T = 50X_0, \quad (3.3)$$

где  $X_0 \simeq 0.35$  см - радиационная длина электрона в вольфраме. Предполагается использование мюонного пучка с энергией  $E_\mu \simeq 15$  ГэВ, падающего

на вольфрамовую мишень, для которой порог недостающего импульса мюона выбрано равным  $E_\mu^{\text{rec}} \lesssim 9 \text{ ГэВ}$ , что дает нижний предел на долю энергии в виде  $x_{\text{min}} \simeq 0.4$ . Планируемая статистика в конечной фазе  $\simeq 10^{13}$  МОТ. Также стоит отметить, что для мюонов с энергией  $E_\mu \simeq 15 \text{ ГэВ}$  потери на остановку мюона в вольфраме [121] оцениваются величиной порядка 530 МэВ через среднюю мишени с эффективной длиной взаимодействия  $L_T$ . Это позволяет пренебречь зависимостью энергии налетающего мюона от доли энергии медиатора при расчете числа сигнальных событий излучения медиатора в эксперименте M<sup>3</sup>.

## E137

E137 представляет собой завершившийся эксперимент в SLAC и изначально предназначался для поиска аксионоподобных частиц [196]. Данный эксперимент имеет электронный первичный пучок с энергией 20 ГэВ с накопленным зарядом 30 Кл ( $2 \times 10^{20}$  электронов) в алюминиевой мишени за две фазы эксперимента [197]. Отсутствие сигнала в эксперименте E137 дает достаточно строгие ограничения на темную материю в суб-ГэВ регионе [198]. Дополнительно, анализ дифференциальных сечений в методе Вайцзеккера-Вильямса и на древесном уровне выполнялся в источнике [147; 149], поэтому далее анализ этого эксперимента не проводится.

## 3.2 Сечение излучения темной материи

В данном разделе рассматривается зависимость от параметров для дифференциального и полного сечений в приближении Вайцзеккера-Вильямса (2.9) процессов излучения медиаторов темной материи на тяжелом ядре в случае различных упругих атомных и ядерных форм-факторов.

### 3.2.1 Дифференциальное сечение медиаторов на ядре

Рассмотрим общее поведение дифференциального сечения по доле унесенной энергии для скалярного медиатора, которое приведено на графике 3.1. Форма дифференциального сечения в основном зависит от типа первичного

пучка и слабо зависит от других параметров эксперимента с фиксированной мишенью. В случае электронного первичного пучка наиболее вероятно излучение медиатора с большими энергиями  $x \approx x_{\max}$  для всего рассматриваемого диапазона масс от  $\mathcal{O}(1)$  МэВ до  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ. Далее, для мюонной моды при малых массах медиатора преобладает излучение с малыми унесенными энергиями. Однако, при массах лежащих в диапазоне  $\mathcal{O}(10^{-1})$  ГэВ  $> m_S > \mathcal{O}(10^{-2})$  ГэВ преобладает излучение со средними энергиями медиатора  $x \in (0.3, 0.8)$  и для  $m_S > \mathcal{O}(10^{-1})$  ГэВ преобладает при больших энергиях медиатора. Также стоит подчеркнуть, что в случае электронного первичного пучка, с увеличением массы  $m_S$  пик при  $x = x_{\max}$  становится острее, что может замедлять численные расчеты. Однако, с учетом выражения (2.22), в случае мюонного пучка значение  $t_{\min}$  при  $x \approx x_{\max}$  не может быть меньше  $m_l^2/4$ , и, следовательно, острый пик при  $x \approx x_{\max}$  в мюонной моде отсутствует.

Далее, рассмотрим поведение дифференциального сечения по доле унесенной энергии для тензорного медиатора, приведенное на графике 3.2. В случае электронного и мюонного пучка при малых и средних массах медиатора доминирует излучение при малых энергиях медиатора. Однако, при увеличении масс до верхней границы легкой темной материи значительным также становится излучение при средней унесенной энергии. Кроме того, в случае электронного первичного пучка присутствует резкий пик при больших унесенных энергиях, что связано с малым значением  $t_{\min}$  при  $x \approx x_{\max}$ .

Следующим шагом рассмотрим влияние различных форм-факторов на дифференциальное сечение по доле энергии медиатора. Далее, за эталонный форм-фактор взят общепринятый экранированный форм-фактор Тсаи-Шиффа (2.28). Следует отметить, что влияние форм-факторов на сечение для скалярного и тензорного медиаторов имеет схожий характер.

Экранирование для ядерного форм-фактора наиболее сильно сказывается при малых массах излученного медиатора. В частности, характерные массы, при которых экранирование начинает оказывать значительное влияние, принимают значения  $\mathcal{O}(10^{-2})$  ГэВ. Действительно, в этом случае минимальное значение для квадрата минимального переданного импульса (2.23) достигает значений типичного импульса  $\sqrt{t_a}$ . На примере хельмовского форм-фактора, для масс медиатора от  $\mathcal{O}(10^{-3})$  ГэВ до  $\mathcal{O}(10^{-2})$  ГэВ в случае электронного и мю-

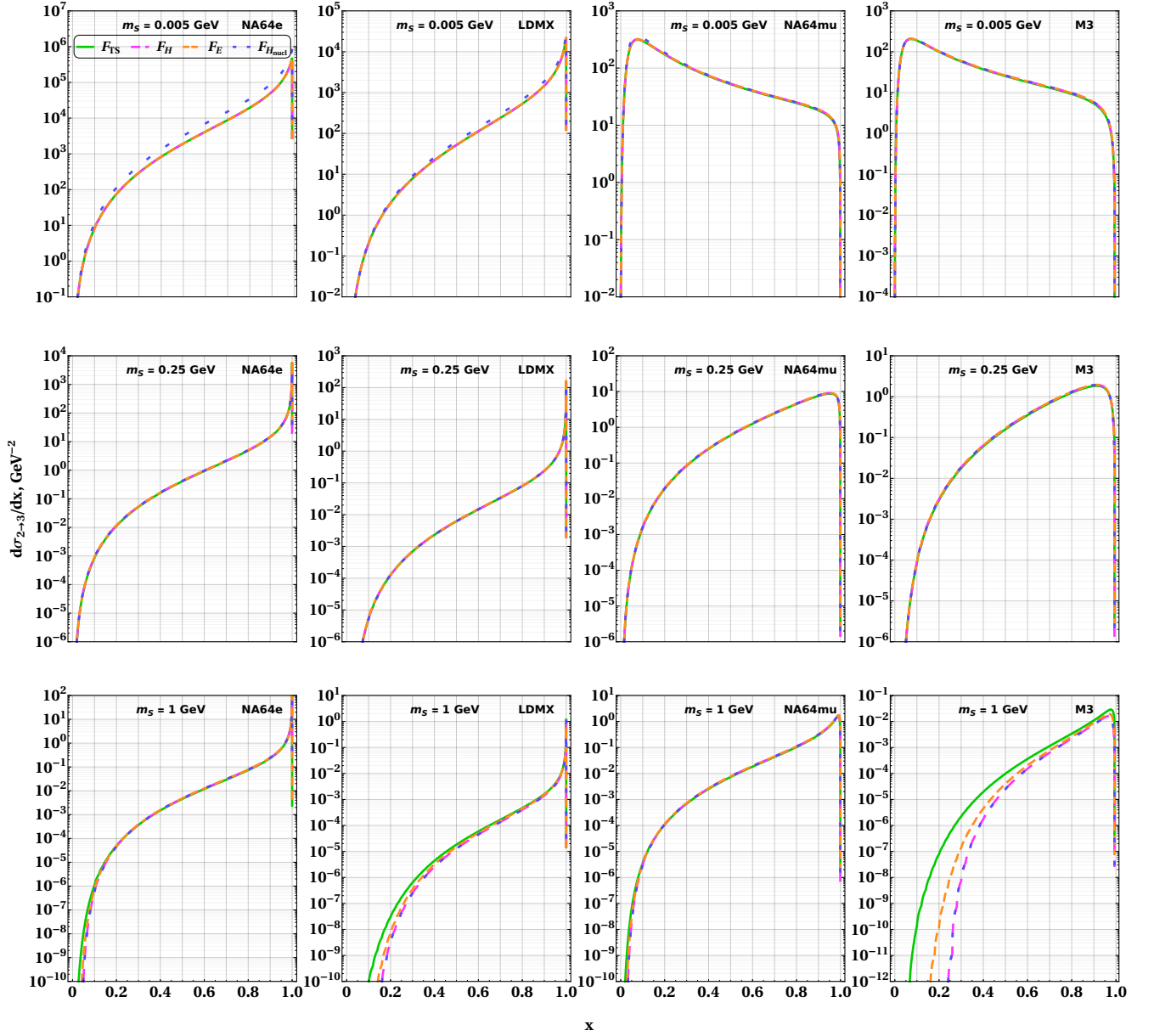


Рисунок 3.1 — Дифференциальное сечение в приближении Вайцеккера-Вильямса (раздел 2.1.1) по доле унесенной скалярным медиатором энергии (A.4) в случае различных масс медиатора, форм-факторов (раздел 2.1.2) и экспериментов с фиксированной мишенью (раздел 3.1.2). Дифференциальное сечение с атомными форм-факторами Тсаи-Шиффа, Хельма и экспоненциальный показаны непрерывной зеленой, пунктирными розовой и оранжевой линиями, соответственно. Дифференциальное сечение с ядерным форм-фактором изображено синей пунктирной линией. Константа взаимодействия равна  $c_{ll}^S = 1$ .

онного пучков относительная разница составляет  $< \mathcal{O}(10^2) \%$  и  $< \mathcal{O}(10^1) \%$ , соответственно. Также, для  $\mathcal{O}(10^{-2}) \text{ МэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim \mathcal{O}(10^{-1}) \text{ ГэВ}$  относитель-



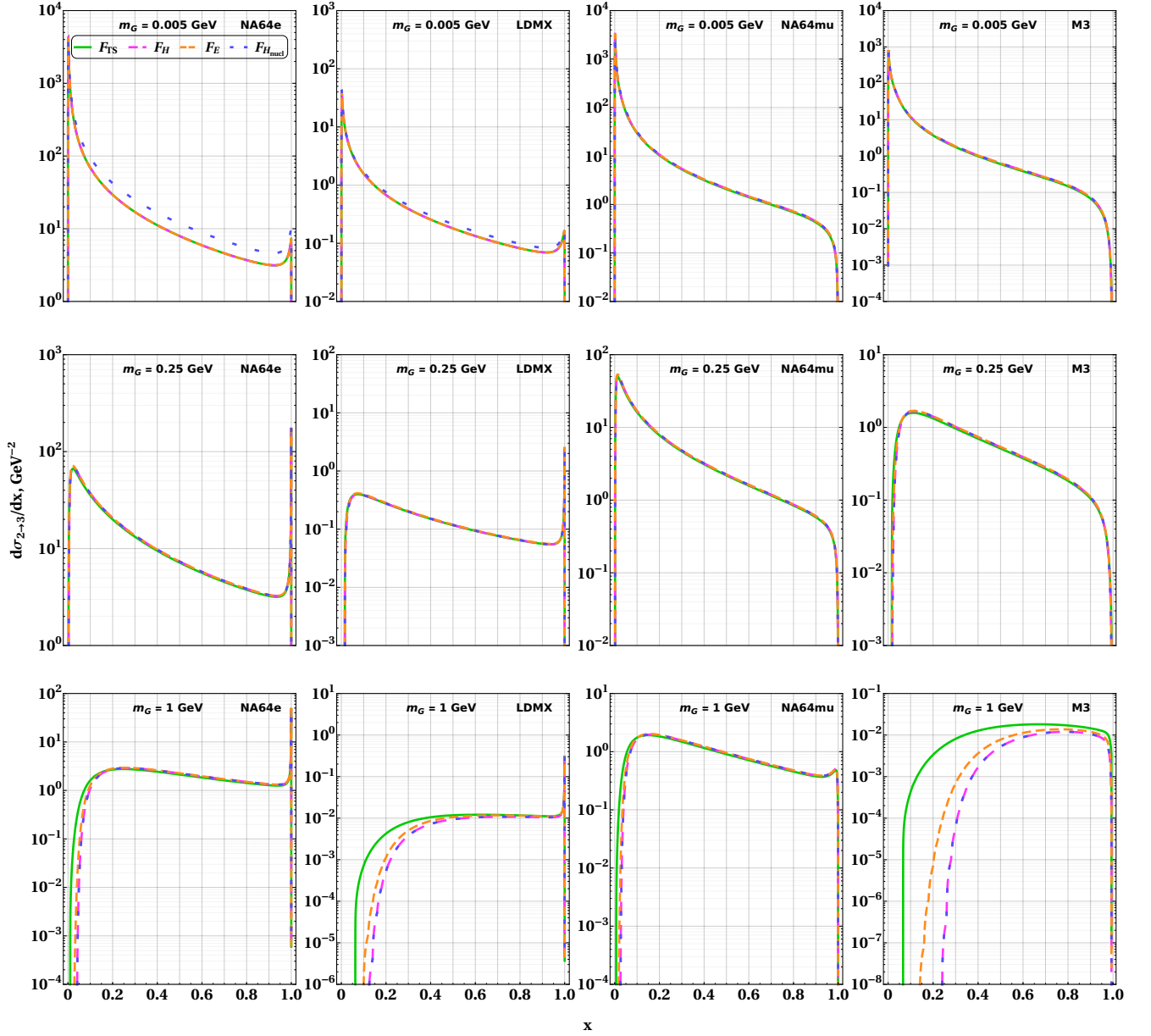


Рисунок 3.2 — Дифференциальное сечение в приближении Вайцеккера-Вильямса (раздел 2.1.1) по доле унесенной тензорным медиатором энергии (A.5) в случае различных масс медиатора, форм-факторов (раздел 2.1.2) и экспериментов с фиксированной мишенью (раздел 3.1.2). Дифференциальное сечение с атомными форм-факторами Тсаи-Шиффа, Хельма и экспоненциальный показаны непрерывной зеленой, пунктирными розовой и оранжевой линиями, соответственно. Дифференциальное сечение с ядерным форм-факторами изображено синей пунктирной линией. Константа взаимодействия принимает выражение  $c_{ll}^G = 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ .

ная разница принимает значения  $< \mathcal{O}(10^1) \%$  для электронного и  $< \mathcal{O}(10^0) \%$

для мюонного первичных пучков. Для масс  $m_{\text{МЕД}} > \mathcal{O}(10^{-1})$  ГэВ разница составляет  $< \mathcal{O}(10^0)$  % для мюонной и электронной моды.

Атомные хельмовский и экспоненциальный форм-факторы имеют схожее поведение для относительной разницы сечений. Однако, дифференциальное сечение в случае хельмовского форм-фактора дает меньшие значения по сравнению с экспоненциальным из-за более резкого зарезания для больших квадратов переданных импульсов  $t$ , что видно из графика 2.2. Также стоит отметить следствие из формулы (2.23), где характерные массы зарезания потока фотонов принимают значения  $\mathcal{O}(1)$  ГэВ в случае экспоненциальным форм-фактора. Действительно, в этой области диапазон интегрирования в потоке фотонов смещается в область с большими  $t$ , где форм-факторы Тсаи-Шиффа и экспоненциальный убывают по обратному степенному закону и экспоненциально, соответственно.

### 3.2.2 Полное сечение рождения медиаторов на ядре

На графике приведены полные сечения для скалярного и тензорного медиатора в случае атомного форм-фактора Тсаи-Шиффа и относительная разница для полного сечения в случае других атомных форм-факторов. С учетом того, что зависимость от форм-фактора входит одинаковым образом для всех медиаторов в приближении Вайцзеккера-Вильямса, относительная разница и зависимость от параметра  $t_{\text{max}}$  имеют общее поведение для всех медиаторов. Для масс медиатора  $m_{\text{МЕД}} \lesssim 10^{-1}$  ГэВ разница составляет 5 % и при  $m_{\text{МЕД}} \simeq \mathcal{O}(1)$  ГэВ происходит рост относительной разницы до  $\mathcal{O}(10)$  %. Как обсуждалось в секции 2.1.2, это связано с более резким зарезанием потока фотонов для других форм-факторов при достижении квадрата минимального переданного импульса значений, связанных с размером ядра. Также следует упомянуть, что сравнение расчетов на древесном уровне и в приближении Вайцзеккера-Вильямса уже проводилось, где точность лежит на допустимом уровне  $\lesssim \mathcal{O}(1)\%$ , поэтому в данной работе этот вопрос не рассматривается [50; 51; 147; 149].

Рассмотрим влияние на полное сечение в методе Вайцзеккера-Вильямса максимального значения квадрата переданного импульса, которое является верхним пределом потока фотонов (2.6). Расчеты далее сравниваются с обще-

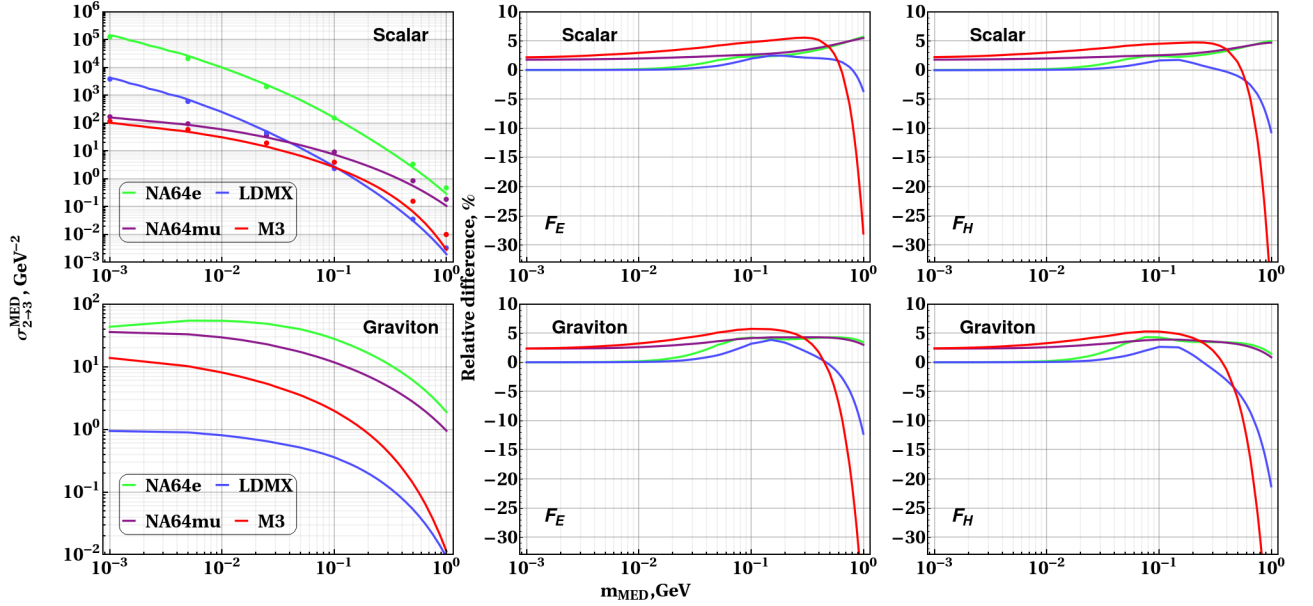


Рисунок 3.3 — (Слева) полное сечение в приближении Вайцеккера-Вильямса (раздел 2.1.1) в зависимости от массы для тензорного (A.5) и скалярного (A.4) медиаторов в случае экспериментов с фиксированной мишенью (раздел 3.1.2). (По центру и справа) относительная разница  $(\mathcal{O}_{FF} - \mathcal{O}_{TS})/\mathcal{O}_{TS}$  полных сечений для хельмовского и экспоненциального форм-факторов, где за эталонный взят форм-фактор Тсаи-Шиффа. Константы взаимодействия для скаляра и гравитона принимают следующие выражения  $c_{ll}^S = 1$  и  $c_{ll}^G = 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ , соответственно.

принятым выбором форм-фактора Тсаи-Шиффа (2.28) при значении верхнего предела  $t_{\max} = m_{\text{MED}}^2 + m_l^2$  [47; 50; 147]. Для сравнения использовались фиксированные значения верхнего предела в случаях максимального значения на рассматриваемом диапазоне масс  $t_{\max} = 1 \text{ ГэВ}$  и максимально возможного значения  $t_{\max} = E_0^2$ .

Далее, рассмотрим общее поведение полного сечения для электронного и мюонного первичного пучка. Следует отметить, что при различных значениях  $t_{\max}$  поведение полного сечения в случае массивных скалярного и тензорного медиаторов для всех видов форм-факторов имеет схожий характер. Дополнительно, для относительной разницы полных сечений в случаях  $t_{\max} = 1 \text{ ГэВ}$  и  $t_{\max} = E_0^2$  на основном диапазоне масс справедливо  $\leq 10^{-4} \%$  и при  $m_{\text{MED}} \simeq 1 \text{ ГэВ}$  выполняется  $\leq 10^{-2} \%$ , что происходит из-за пренебрежимо малых значений форм-фактора при  $t_{\max} > 1 \text{ ГэВ}$ .

Основное влияние параметр  $t_{\max}$  оказывает для экспериментов с электронной модой. В частности, относительная разница полных сечений в случаях  $t_{\max} = m_{\text{MED}}^2 + m_l^2$  и  $t_{\max} = 1$  ГэВ при  $m_{\text{MED}} = 10^{-3}$  ГэВ принимает значения  $\simeq 10^2$  % и экспоненциально падает до 1 % при  $m_{\text{MED}} = 10^{-1}$  ГэВ для NA64e и до 10 % для LDMX. Для мюонной моды, относительная разница на диапазоне масс от  $m_{\text{MED}} = 10^{-3}$  ГэВ до  $m_{\text{MED}} = 10^{-1}$  ГэВ составляет  $\simeq 1$  % в случае экспериментов NA64 $\mu$  и M<sup>3</sup>. На диапазоне масс от  $m_{\text{MED}} = 10^{-1}$  ГэВ до  $m_{\text{MED}} = 1$  ГэВ относительная разница резко падает до значений  $\simeq 10^{-2}$  % в случае электронного и мюонного первичного пучка.

В итоге, для электронной моды необходимо осторожно подходить к выбору параметра  $t_{\max}$  в особенности при рассмотрении масс медиатора  $\leq 10^{-1}$  ГэВ. Однако, для мюонного первичного пучка параметр  $t_{\max}$  является достаточно свободным при используемой точности расчетов в 1 %.

### 3.3 Реликтовая плотность темной материи

#### 3.3.1 Скалярный медиатор

В этом разделе рассматриваются характерные зависимости между массой легкой темной материи и ее константой взаимодействия с частицей видимого сектора, при которой достигается наблюдаемая реликтовая плотность темной материи, в случае электронспецифического скалярного медиатора. Для краткости далее мы будем называть такие графики термальными мишенями или реликтовыми кривыми. На графике 3.4 показаны термальные мишени майорановской, дираковской скалярной и векторной темной материи, которая аннигилирует в электрон-позитронную пару, где для расчетов термально усредненного сечения использовались численный расчет формулы (1.20) и ее аналитическое выражение в нерелятивистском приближении (1.21).

Далее, рассмотрим разницу между расчетом термальных мишеней через формулу (1.20) и ее нерелятивистским приближением (1.21). В случае скалярной темной материи термальные мишени, которые рассчитаны через выражения (1.20) и (1.21), совпадают на всем диапазоне рассматриваемых масс легкой темной материи  $1 \text{ МэВ} \lesssim m_S \lesssim 10 \text{ ГэВ}$ . Для дираковской и майорановской темной материи, которые аннигилируют в  $p$ -волну, расхождение между анали-

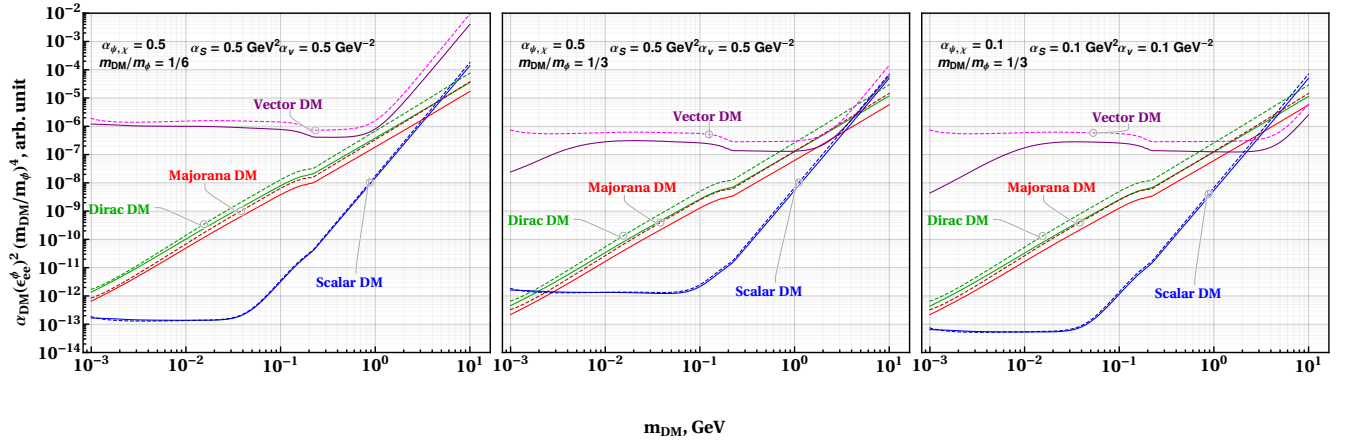


Рисунок 3.4 — Термальная мишень темной материи как функция ее массы. Майорановская [41], дираковская, скалярная и векторная темная материя изображены красной, зеленой, синей и фиолетовой линиями, соответственно. Сплошные линии соответствуют численному расчету через интеграл (1.20), а пунктирные линии представляют расчет термальной мишени в нерелятивистском приближении (1.21). Далее, приводятся численные значения параметров  $\alpha_{\text{DM}}$  с соответствующей размерностью для скаляра, фермиона и вектора как  $\text{ГэВ}^2$ , 1 и  $\text{ГэВ}^{-2}$ , соответственно. Левая панель:  $\alpha_{\text{DM}} = 0.5$ ,  $m_{\text{DM}}/m_\phi = 1/6$ . Центральная панель:  $\alpha_{\text{DM}} = 0.5$ ,  $m_{\text{DM}}/m_\phi = 1/3$ . Правая панель:  $\alpha_{\text{DM}} = 0.1$ ,  $m_{\text{DM}}/m_\phi = 1/3$ .

тическим и численным подходом для рассматриваемого диапазона масс может достигать  $\gtrsim 20\%$ . Также стоит отметить, что различие между реликтовыми кривыми для дираковской и майорановской темной материи возникает из-за коэффициента  $s$  между частицами и античастицами в формуле (1.19). В случае векторной темной материи расчет через формулу (1.20) и ее аналитического выражения в нерелятивистском приближении (1.21) дают значительное расхождение из-за резкого резонансного пика в сечении (2.55). Кроме того, нерелятивистское приближение для векторной темной материи перестает работать при малых массах темной материи и больших значениях  $m_V/m_\phi$ , так как в этом случае значительным становится вклад на массовой оболочке (2.51). В частности, аналитическое выражения (1.21) приводит к большой разнице для масс  $m_\phi \simeq 3m_V$  для  $m_V \simeq O(10)$  МэВ, которое уменьшается в области масс  $m_\phi \simeq 6m_V$  из-за удаления резонансной точки от  $s = 4m_V^2$ , что связано с резким зарезанием в формуле термального усреднения (1.20) при удалении от значений  $4m_{\text{DM}}^2$  инвариантной массы. Также, на графике 3.4 можно заметить малый скачок

реликтовой плотности в области масс темной материи  $m_{\text{DM}} \simeq 200$  МэВ, который связан с резким уменьшением числа эффективных степеней свободы (1.10) и (1.30) в эпоху рекомбинации.

Кроме того, как можно видеть на графике 3.4, скалярная и векторная темная материя имеют отличную от фермионной форму термальной мишени. Действительно, в нерелятивистском приближении,  $s \simeq 4m_{\text{DM}}^2$ , сечение аннигиляции масштабируется параметризацией Брейта-Вигнера в следующем виде:

$$\langle v_{\text{Mol}} \sigma_S \rangle \propto \alpha_S [(4m_S^2 - m_\phi^2)^2 + (\Gamma_{\phi \rightarrow SS})^2 m_\phi^2]^{-1}, \quad (3.4)$$

где справедливо  $m_\phi \Gamma_{\phi \rightarrow SS} \propto \alpha_S$ , что следует из формулы (2.42). В частности, при характерных параметрах  $\alpha_S \simeq 0.5 \text{ ГэВ}^2$  и  $m_S/m_\phi \simeq 1/3$ , параметризация (3.4) не зависит от массы  $m_{S,\phi}$  при доминировании вклада от ширины распада  $m_\phi \Gamma_{\phi \rightarrow SS} \gg 4m_S^2 - m_\phi^2$ , что выполняется при  $m_\phi \lesssim 200$  МэВ. В результате, реликтовая кривая для скалярного медиатора стремится к постоянной для относительно легких масс  $m_\phi \lesssim 300$  МэВ. Однако, для тяжелых масс  $m_\phi \gtrsim 300$  МэВ справедливо  $4m_S^2 - m_\phi^2 \gg m_\phi \Gamma_{\phi \rightarrow SS}$  в знаменателе уравнения (3.4) и полученное термальное усреднение сечения масштабируется как  $\langle v_{\text{Mol}} \sigma_S \rangle \propto \alpha_S/m_S^4$ . Аналогично, в случае векторной темной материи и параметрах  $\alpha_V = 0.5 \text{ ГэВ}^{-2}$  и  $m_V/m_\phi = 1/3$  справедливо  $\langle v_{\text{Mol}} \sigma_V \rangle \propto \alpha_V$  при  $m_V < \mathcal{O}(1) \text{ ГэВ}$ . Различное поведение для скалярной и векторной темной материи можно объяснить разной зависимостью полной ширины распада от массы темной материи, что приводит к характерным ограничениям на массу сверху или снизу. Кроме того, для дираковской и майорановской темной материи характерная зависимости термально усредненного сечения принимают выражения  $\langle v_{\text{Mol}} \sigma_{\chi,\psi} \rangle \propto \alpha_{\chi,\psi}/(m_{\chi,\psi})^2$  для рассматриваемого диапазона масс темной материи  $1 \text{ МэВ} \lesssim m_\phi \lesssim 1 \text{ ГэВ}$  и параметрах  $\alpha_{\chi,\psi} = 0.5$  и  $m_{\chi,\psi}/m_\phi = 1/3$ .

### 3.4 Ограничения на константу взаимодействия

В данном разделе приведены итоговые графики ограничений на константу взаимодействия в случае скалярного и тензорного медиаторов в области легкой термальной темной материи на основе отсутствия сигнала для невидимой моды

в экспериментах с фиксированной мишенью для процессов рождения медиатора на ядре и на атомных электронах. Кроме того, для расчета реликтовых кривых темной материи и электронспецифического скалярного медиатора использовалось численное интегрирование термально усредненного сечения (1.20). Также стоит упомянуть, что относительная разница для ограничений на константу взаимодействия и полных сечений на графике 3.3 при использовании различных форм-факторов отличаются из-за наличия нижней границы при интегрировании по унесенной энергии.

События с излучением медиатора темной материи можно считать независимыми, т.е. мы будем считать, что число испускаемых частиц  $N_{\text{MED}}$  распределено по закону Пуассона. Далее, для нахождения оценки верхнего предела числа ожидаемых событий  $\bar{N}_{\text{MED}}^{\text{up}}$  используем байесовский подход с уровнем достоверности  $1 - \alpha$  и постоянной апостериорной вероятностью  $\pi(\lambda)$ . В частности, в байесовской статистике оценка для верхнего ограничения числа ожидаемых событий принимает вид  $\bar{N}_{\text{MED}}^{\text{up}} = \ln(1/\alpha)$ . В итоге, при  $\alpha = 0.1$  для числа событий справедливо  $N_{\text{MED}} < 2.3$  при отсутствии сигнальных событий в эксперименте. Кроме того, для оценки верхнего предела числа ожидаемых событий результаты в байесовской статистике с постоянной апостериорной вероятностью и частотном подходе совпадают [199].

Далее, предполагая, что излучение медиатора происходит на первой радиационной длине или радиационными потерями можно пренебречь, для экспериментов с фиксированной мишенью число излученных на ядре медиаторов темной материи можно оценить следующим образом [182]:

$$N_{\text{MED}}^{\text{brem.}} \simeq \text{LOT} \cdot \frac{\rho N_A}{A} L_T \cdot \eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}} \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}(x)}{dx} \text{Br}(\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}), \quad (3.5)$$

где  $L_T$  - эффективная длина взаимодействия электрона в мишени; LOT - число упавших на мишень лептонов;  $\rho$  - массовая плотность материала мишени;  $N_A$  - число Авогадро;  $A$ ,  $Z$  - массовое число и заряд ядер мишени, соответственно;  $x \equiv E_{\text{MED}}/E_0$ ;  $E_0$  - начальная энергия первичного лептонного пучка;  $E_{\text{MED}}$  - унесенная медиатором энергия;  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  - определенные для конкретного эксперимента минимальная и максимальная доли унесенной медиатором энергии,

соответственно;  $d\sigma_{2\rightarrow 3}/dx$  - дифференциальное сечение излучения медиатора в процессе (2.1);  $\eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}}$  - типичная эффективность излучения медиатора на ядре для конкретного эксперимента, доля невидимых распадов считается преобладающей, т. е.  $\text{Br}(\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}) \approx 1$ .

Аналогично, число аннигиляций вторичных позитронах на атомных электронах материала мишени в темную материю оценивается как [53; 182]:

$$N_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \simeq \text{EOT} \cdot \frac{\rho N_A}{A} L_T \cdot \eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \cdot \int_{E_{e^+}^{\text{cut}}}^{E_{e^+}^{\text{max}}} dE_{e^+} \sigma_{\text{tot}}(E_{e^+}) T(E_{e^+}), \quad (3.6)$$

где  $\sigma_{\text{tot}}(E_{e^+})$  - резонансное полное сечение электрон-позитронной аннигиляции в темную материю (2.49);  $T(E_{e^+})$  - дифференциальное распределение длин треков вторичных позитронов;  $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$  - типичная эффективность, связанная с рождением темной материи через резонансный канал;  $E_{e^+}$  - энергия вторичных позитронов;  $E_{e^+}^{\text{cut}} = E_0 x_{\text{min}}$  и  $E_{e^+}^{\text{max}} = E_0$  - минимальная и максимальная энергии вторичных позитронов в электромагнитном ливне, соответственно. Также стоит отметить использование предположения, что сигналы для позитронного и электронного первичных пучков имеют одинаковую эффективность  $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$ . Кроме того, в случае резонансного рождения медиатора число сигнальных событий усилено зарядом ядра.

Подробное исследование аналитического приближения для типичного дифференциального распределения длин треков позитронов  $T(E_{e^+})$  можно найти в литературе [53; 200–203]. Для толстой мишени было показано, что  $T(E_{e^+})$  зависит в первом порядке от типа материала мишени через мультипликативный коэффициент как  $T(E_{e^+}) \propto X_0$ , где  $X_0$  - радиационная длина в соответствующем материале. Кроме того, дифференциальное распределение длин треков позитронов с энергией позитронов  $E_{e^+}$  зависит от энергии первичной налетающей частицы  $E_0$  через  $E_{e^+}/E_0$ . Следовательно, данная зависимость позволяет отшкалировать по энергии распределение и отнормировать распределение на радиационную длину. В результате, на основе преобразований выше, полученное распределение при фиксированном материале и энергии первичного пучка можно превратить в универсальное распределение позитронов [53; 56; 204]. Далее, подставляя конкретные для эксперимента значения  $E_0$  и  $X_0$ , можно



получить дифференциальное распределение длин треков позитронов для соответствующей мишени. Распределения длины треков позитронов при развитии электромагнитного ливня было рассчитано с помощью численного моделирования Монте-Карло с использованием библиотеки GEANT4 [205] в работах [53; 204]. Важно отметить, что зависимостью типичных углов между направлением первичного пучка и импульсов вторичных позитронов можно пренебречь [53].

В приближении узкой ширины (2.51), которое также справедливо при пороговых значениях  $m_{\text{MED}} \simeq 2m_{\text{DM}}$ , оценка числа сигнальных событий в резонансном процессе принимает вид:

$$N_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \approx \eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \text{EOT} \cdot \frac{\rho N_A Z}{A} L_T \frac{\tilde{c}_{\text{MED}} T_+(E_R)}{2m_e} \cdot \theta(E_R - E_{e^+}^{\text{cut}}) \theta(E_{e^+}^{\text{max}} - E_R), \quad (3.7)$$

где  $E_R = m_{\text{MED}}^2/(2m_e)$  - характерная энергия резонанса,  $\theta(x)$  - функция Хевисайда.

### 3.4.1 Ограничения для скалярного медиатора

Как показано на графике 3.5, для электронспецифического скалярного медиатора при текущей накопленной статистике  $\text{EOT} \simeq 9.37 \times 10^{11}$  эксперимент NA64e полностью исключает дираковскую и векторную легкую термальную темную материю. Также, для масс скалярного медиатора в области  $10^{-2} \text{ ГэВ} \lesssim m_\phi \lesssim 0.1 \text{ ГэВ}$  исключена майорановская темная материя. Более того, при ожидаемой статистике  $\text{EOT} \simeq 1 \times 10^{12}$  эксперимент NA64e позволяют полностью исключить майорановскую темную материю. Планируемые эксперименты как LDMX и Belle II позволяют также закрыть область параметров реликтовой плотности для рассматриваемой дираковскую, майорановской и векторной темной материи. Кроме того, в случае скалярной темной материи эксперименты NA64e и LDMX исключают только часть пространства параметров реликтовой плотности. Однако, с учетом отсутствия подавления сечения по скорости для скалярной темной материи, реликтовая плотность уже исключена на основе наблюдаемого спектра фонового космического излучения.

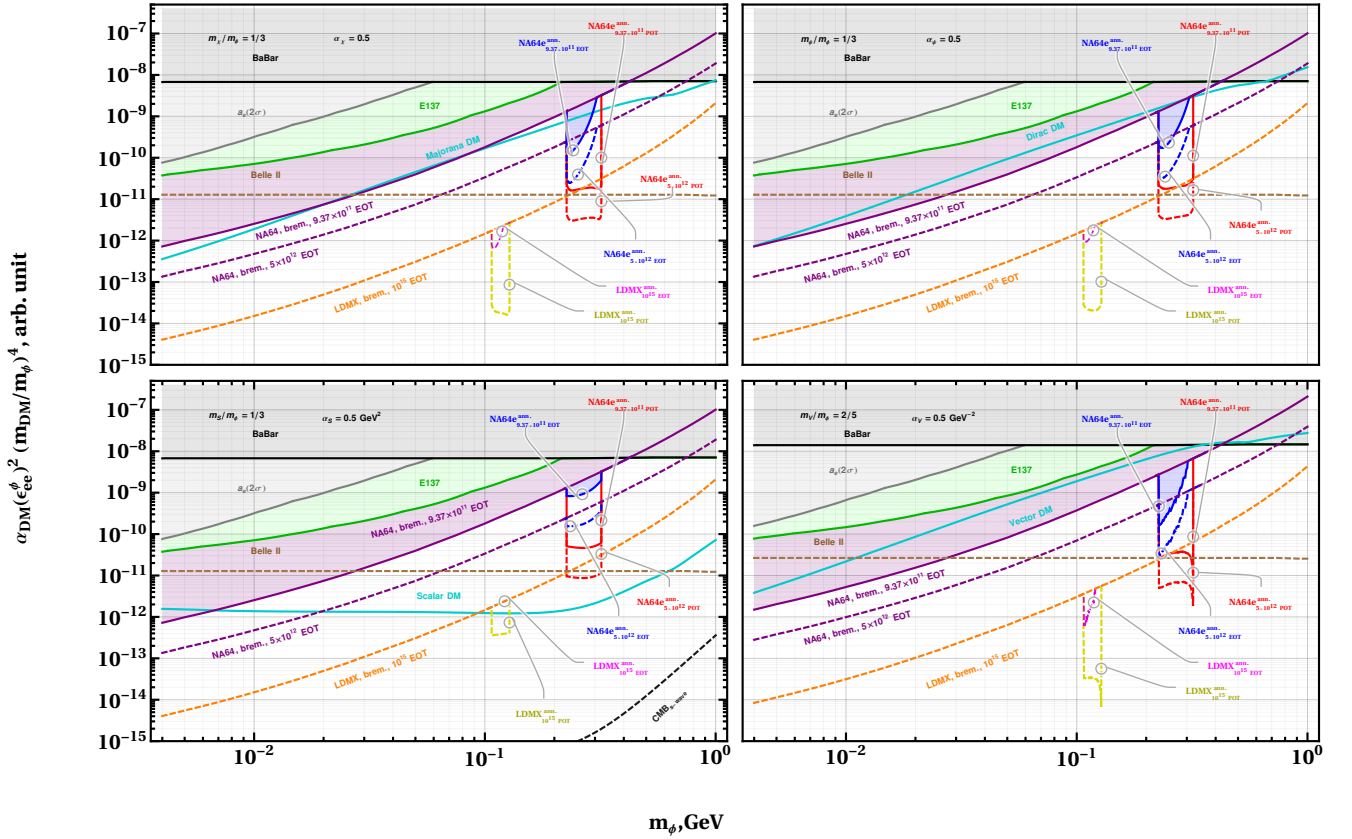


Рисунок 3.5 — Ограничения на константу взаимодействия скалярного медиатора с электроном как функция его массы из реакций рождения медиатора на ядре и в резонансном процессе для невидимой моды на основе отсутствия сигнала в экспериментах с фиксированной мишенью (раздел 3.1.2). Черной непрерывной линией показаны ограничение на основе эксперимента ВаВар [179]. Зеленой непрерывной линией показаны ограничения из эксперимента E137 [41; 196; 198]. Пунктирной коричневой линией показаны пределы из планируемых результатов эксперимента Belle II [41]. Исключение из СМВ для скалярной темной материи показаны пунктирной черной линией [12]. Фиолетовой и оранжевой непрерывной (пунктирной) линиями показаны текущие (планируемые) ограничения для экспериментов NA64e и LDMX, соответственно. Красной и синей (желтой и розовой) линиями показаны ограничение из резонансной реакции для позитронной и электронной мод из эксперимента NA64e (LDMX), соответственно, где для текущей статистики используется непрерывная линия, а планируемая показана пунктирной. Реликтовые кривые для соответствующего типа темной материи изображены бирюзовой линией. Соответствие панели и типу темной материи представлено как: левая верхняя - майорановская, левая нижняя - скалярная, правая верхняя - дираковская и правая нижняя - векторная.

Также на графике 3.5 показаны ограничения на основе аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени для планируемой и ожидаемой статистике в экспериментах NA64e и LDMX. Кроме того, показаны ожидаемые результаты в случае позитронного первичного пучка, где для оценки ограничений использована текущая и ожидаемая статистика для электронного пучка с предположением аналогичного электроной моде фона. При этом позитронный пучок дает более строгие ограничение на константу связи медиатора и электрона из-за присутствия в электромагнитном ливне позитронов уже в первом поколении. Использование процесса аннигиляции вторичных позитронов в мишени для экспериментов NA64e и LDMX позволяет сдвинуть текущие ограничения на порядок в узком диапазоне масс  $0.23 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 0.32 \text{ ГэВ}$  и  $0.11 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 0.13 \text{ ГэВ}$ , соответственно.

Рассмотрим влияние параметра  $t_{\text{max}}$  в приближение Вайцеккера-Вильямса (2.9) на ограничения константы взаимодействия для значений  $t_{\text{max}} = m_{\text{MED}}^2 + m_l^2$  и  $t_{\text{max}} = 1 \text{ ГэВ}$ . Из-за введения нижнего предела при интегрировании дифференциального сечения в формуле для оценки числа событий, разница между атомными форм-факторами уменьшается. Как было показано на примере полного сечения в секции 3.2.2, в случае мюонного пучка влияние параметра  $t_{\text{max}}$  незначительно. В частности, для экспериментов NA64 $\mu$  и M<sup>3</sup> разница составляет  $\lesssim 0.3 \%$  и  $\lesssim 0.6 \%$ , соответственно. Однако, влияние параметра  $t_{\text{max}}$  в случае электронной моды может быть существенным. Действительно, в случае NA64e разница при  $m_{\text{MED}} \simeq 2m_e$  составляет 30 %, которая падает до 0.3 % при  $m_{\text{MED}} \simeq 1 \cdot 10^{-1} \text{ ГэВ}$  и до  $\lesssim 10^{-4} \%$  при  $m_{\text{MED}} \simeq \mathcal{O}(1) \text{ ГэВ}$ . Аналогично, для эксперимента LDMX разница при  $m_{\text{MED}} \simeq 2m_e$  составляет 30 %, которая падает до 0.3 % при  $m_{\text{MED}} \simeq 2 \cdot 10^{-1} \text{ ГэВ}$  до  $\lesssim 10^{-4} \%$  при  $m_{\text{MED}} \simeq \mathcal{O}(1) \text{ ГэВ}$ .

### 3.4.2 Ограничения для тензорного медиатора

Аналогично, для электронспецифического тензорного медиатора в эксперименте BaBar на основе процесса  $e^+e^- \rightarrow \gamma G$  для масс  $m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$  ограничения на константу взаимодействия гравитона и электрона принимают вид  $c_{ee}^G \lesssim 2 \times 10^{-4} \text{ ГэВ}^{-1}$ , что исключает скалярную и дираковскую легкую

темную материю для масс  $m_G \lesssim 8 \times 10^{-1}$  ГэВ и  $m_G \lesssim 2 \times 10^{-1}$  ГэВ, соответственно. Кроме того, в случае векторной темной материи эксперимент ВаВаг исключает пространство параметров для масс  $m_G \lesssim 3 \times 10^{-2}$  ГэВ, однако данный тип темной материи исключен полностью из-за ограничений из наблюдаемого спектра фонового реликтового излучения. Также стоит отметить, что текущие ограничения эксперимента NA64e на основе процессов рождения медиатора на ядре и на атомных электронах дают менее строгие ограничения чем ВаВаг. Однако, с планируемой статистикой эксперимент NA64e ограничивает схожую с ВаВаг область параметров. Дополнительно, результат в планируемом эксперименте LDMX позволяет усилить ограничения для дираковской темной материи до  $m_G \lesssim 6 \times 10^{-1}$  ГэВ.

Более того, на графике 3.6 приведена оценка чувствительности экспериментов NA64 $\mu$  и M<sup>3</sup> с фиксированной мишенью, однако для получения соответствующей реликтовой кривой необходимо рассматривать лептонспецифический медиатор. Также стоит отметить, что мюоны с мюоны более высоких энергий из NA64 $\mu$  позволяют исследовать более широкую область по сравнению с M<sup>3</sup>. Кроме того, объяснение аномалии  $(g - 2)_\mu$  за счет тензорного медиатора уже исключено экспериментами ВаВаг и NA64e.

## Результаты третьей главы

В данном разделе было рассмотрено влияние моделей форм-факторов на дифференциальное и полное сечения рождения медиатора в поле тяжелых ядер в приближении Вайцеккера-Вильямса для экспериментов с фиксированной мишенью. Получены ограничения на константу взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов темной материи при торможении заряженного лептона в поле тяжелых ядер фиксированной мишени в случае различных форм-факторов. Получены ограничения на константу взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов темной материи при аннигиляции вторичных позитронов в мишени для электронного и позитронного первичного пучка. Получены реликтовые кривые для легкой темной материи в предположении ее термального контакта в ранней Вселенной и электронспецифического скалярного и тензорного медиаторов темной материи.

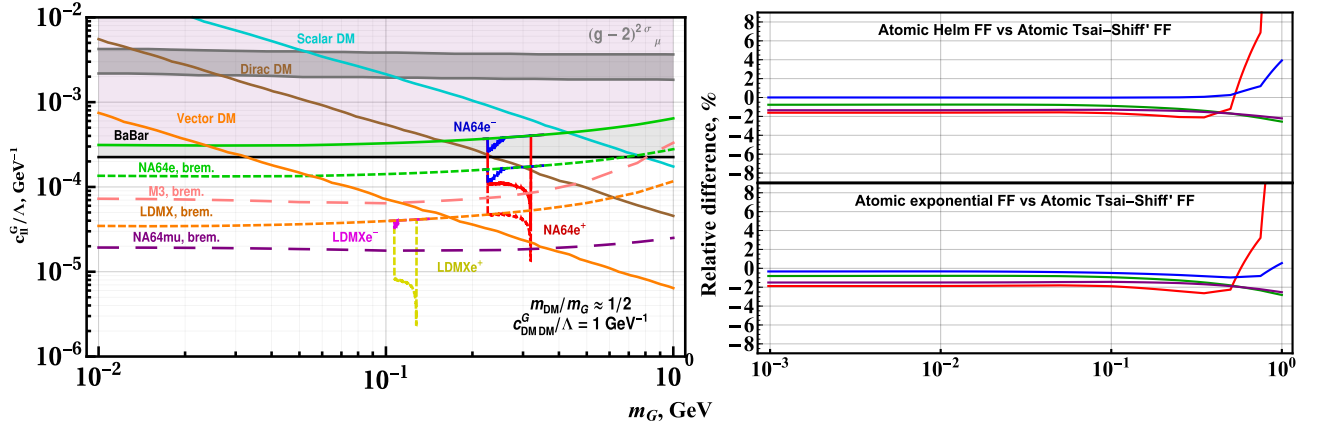


Рисунок 3.6 — (Слева) Ограничения на константу взаимодействия тензорного медиатора с лептоном как функция его массы из реакций рождения медиатора на ядре и в резонансном процессе для невидимой моды на основе отсутствия сигнала в экспериментах с фиксированной мишенью (раздел 3.1.2). Для всех кривых на графике использовано  $c_{\chi}/\Lambda \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$  и  $m_G \gtrsim 2m_{DM}$ . Область  $(g-2)_{\mu}$  при  $2\sigma$  показана серой полосой [33]. Черной непрерывной линией показаны ограничение на основе эксперимента BaBar [33]. Реликтовые плотности для скалярной, дираковской и векторной темной матери изображены бирюзовой, коричневой и оранжевой линиями, соответственно [33]. Для экспериментов ниже используется непрерывная и пунктирная линии для текущей и планируемой статистики, соответственно. Эксперименты NA64e, NA64 $\mu$ , LDMX и M $^3$  изображены зеленой, фиолетовой, оранжевой и розовой линиями, соответственно. Ограничение из резонансной реакции для электронной и позитронной мод эксперимента NA64e (LDMX) показаны синей (малиновой) и красной(желтой) линиями, соответственно. (Справа) Относительная разница рассматриваемых атомных форм-факторов и атомного форм-фактора Тсаи-Шиффа, где эксперименты NA64e, NA64 $\mu$ , LDMX и M $^3$  изображены зеленой, фиолетовой, синей и красной линиями, соответственно.

## Заключение

В данной работе было рассмотрено получение ограничений на пространство параметров темной материи в случае отсутствия сигнальных событий рождения медиаторов темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью. Перечислим основные результаты полученные в диссертации.

1. Получены ограничения на взаимодействие тензорного медиатора и соответствующего лептона в случае экспериментов NA64e, NA64 $\mu$ , LDMX и M<sup>3</sup> на основе процесса рождения медиатора на ядрах мишени при торможении лептона. Эксперимент NA64e при текущей статистике не дает новых ограничений. В случае планируемых результатов эксперимент NA64e позволяет улучшить ограничения и исключить дираковскую темную материю до  $m_G \lesssim 3 \cdot 10^{-1}$  ГэВ. Большая планируемая статистика эксперимента LDMX позволяет исключить скалярную легкую темную материю и улучшить ограничения для дираковской темной материи при  $m_G \lesssim 6 \cdot 10^{-1}$  ГэВ.

2. Получены ограничения на взаимодействие электрона и тензорного медиатора в экспериментах NA64e и LDMX для процесса аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени в случае дираковской и скалярной темной материи. В случае тензорного медиатора и электронного первичного пучка для экспериментов NA64e и LDMX происходит незначительное улучшение ограничений в соответствующей области, которое для текущей статистики не вносит новых ограничений. Однако, в случае экспериментов NA64e и LDMX планируемая позитронная мода позволяет улучшить ограничения в разы относительно ограничений основанных на процессе рождения медиаторов при торможении первичного пучка в поле ядра мишени, что показывает перспективность позитронного первичного пучка.

3. Показано незначительное влияние моделей упругих атомных форм-факторов в приближении Вайцзеккера-Вильямса на ограничения взаимодействие медиаторов темной материи и лептона при рождении тензорного медиатора на ядре. Для масс медиатора  $m_{\text{МЕД}} \lesssim 4 \cdot 10^{-1}$  ГэВ в случае хельмовского и экспоненциального форм-факторов относительная разница по отношению к форм-фактору Тсаи-Шиффа составляет  $\lesssim 2$  %, и для масс  $m_{\text{МЕД}} \lesssim 1$  ГэВ разница составляет  $\lesssim 10$  %.

4. Получены кривые реликтовой плотности в случае скалярного электрон-специфического медиатора для дираковской, скалярной и векторной термальной темной материи. Также показана относительная разница для реликтовых кривых в случае численного расчета термально усредненного сечения и нерелятивистского приближения. В случае скалярной темной материи реликтовые кривые для этих способов совпадают из-за отсутствия зависимости от скорости аргумента термального усреднения. Для майорановской и дираковской темной материи для относительной разницы справедливо  $\lesssim 20\%$ , которая принимает наибольшее значение при больших массах легкой темной материи.

5. Получены ограничения на константу взаимодействия скалярного медиатора и соответствующего лептона в случае экспериментов NA64e, NA64 $\mu$ , LDMX и M<sup>3</sup> на основе процесса рождения на ядрах мишени. Текущая статистика эксперимента NA64e позволяет исключить дираковскую и векторную темную материю. Кроме того, планируемые результаты эксперимента NA64e позволят исключить майорановскую темную материю. Также, эксперимент LDMX при наборе планируемой статистики позволит подтвердить результаты NA64e. В результате, с учетом ограничений из космического микроволнового фона для скалярного типа темной материи, основные модели для скалярного электрон-специфического медиатора будут исключены при достижении планируемой статистики.

### **Улучшение работы**

Для улучшения результатов данной работы можно сделать следующее:

1. Исследовать термальные мишени в случае лептонспецифических медиаторов для получение ограничений в случае мюонного первичного пучка для экспериментов с фиксированной мишенью.
2. Исследовать влияния неупругого форм-фактора на ограничения в приближении Вайцеккера-Вильямса.
3. Для тензорного медиатора полезно изучить влияния на реликтовые кривые полной ширины в знаменателе для нерелятивистского приближения.
4. Исследовать термальные мишени для тензорного медиатора без нерелятивистского приближения.

### **Дальнейшее развитие работы**

Дальнейшее развитие работы может включать в себя:

1. Расчет термальной мишени для неэластичной псевдодираковской, скалярной и векторной темной материи со скалярным медиатором.

2. Оценку числа сигнальных событий в экспериментах по прямому обнаружению через процессы неэластичного рассеяния на атомарных электронах, когда скалярный медиатор взаимодействует с заряженным лептонным сектором стандартной модели.

3. Оценку числа сигнальных событий в экспериментах по прямому обнаружению через процессы неэластичного рассеяния на ядрах мишени, где взаимодействие происходит с кварковым сектором стандартной модели.

4. Оценку чувствительности мюонной моды эксперимента NA64 к миллизаряженной темной материи, где основным сигнальным процессом является рождение пары миллизаряженной темной материи при торможении мюона в поле ядра мишени.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность научному руководителю диссертации Дмитрию Викторовичу Кирпичникову и научному руководителю магистерской работы Андрею Юрьевичу Трифонову за наставления и внимание к работе. Автор также выражает благодарность Ренату Рамильевичу Дусаеву, Алексею Эдуардовичу Шевелеву и Александру Ивановичу Фиксу за мотивационную поддержку, которую они оказывали в процессе подготовки диссертации. Автор признателен всем участникам коллаборации NA64 за поддержание творческой и рабочей атмосферы.



## Приложение А Выражения для сечений и матричных элементов

### А.1 Матричные элементы и сечения

В данном разделе приведены матричные элементы и сечения для рассматриваемых процессов. Все расчеты выполнялись с использованием пакета FeynCalc [169; 170] в программе Wolfram Mathematica [171].

#### А.1.1 Система единиц измерения

В естественной системе единиц:

$$1 \text{ cm}^{-1} = 0.19733 \cdot 10^{-13} \text{ GeV}, \quad 1 \text{ s}^{-1} = 6.5822 \cdot 10^{-25} \text{ GeV}, \quad 1 \text{ K} = 8.6173 \cdot 10^{-14} \text{ GeV}.$$

где использованы соотношение конверсии  $hc = 1$ , постоянная Планка  $\hbar = 1$  и постоянная Больцмана  $k_B = 1$ . Соответствующие размерности основных величин в уравнениях движения для частиц:

$$[S] = 0, \quad [\mathcal{L}] = 4, \quad [m] = 1, \quad [\partial_x] = 1,$$

$$[\phi] = 1, \quad [\psi] = 1, \quad [V_\mu] = 1, \quad [h_{\mu\nu}] = 1, \quad [F_{\mu\nu}] = 2.$$

#### А.1.2 Матричные элементы

Для процесса излучения скалярного медиатора на ядре квадрат матричного элемента принимает вид [147; 148]:

$$|\mathcal{M}_{l-N \rightarrow l-N\phi}|^2 = (g_{ll}^\phi)^2 e^4 \frac{F(t)}{t^2} \left[ \frac{(\tilde{u} + \tilde{s})^2}{\tilde{u}\tilde{s}} P^2 - \frac{4t(k, P)^2}{\tilde{u}\tilde{s}} - (m_{\text{MED}}^2 - 4m_l^2) \frac{(\tilde{u} + \tilde{s})^2}{\tilde{u}^2 \tilde{s}^2} \left( -P^2 t + 4 \frac{(\tilde{u}(p, P) + \tilde{s}(p', P))^2}{(\tilde{u} + \tilde{s})^2} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

где  $(k, P) = (p', P) - (p, P)$  и использованы переменные Мандельштама (2.2).

Применяя правила Феймана (1.49), (1.50) и (1.51) для процесса излучения массивного гравитона в комптон-подобном процессе, квадрат матричного

элемента принимает вид:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{l-\gamma \rightarrow Gl^-}|^2 &= \\
&= (g_{ll}^G)^2 e^2 \frac{u_2 [s_2 - 2m_l^2] [(t_2 + u_2)^2 + (u_2 - m_G^2)^2] [4u_2(2m_l^2 - s_2) - m_G^2 t_2]}{4t_2(u_2 - m_l^2)^2 (s_2 - m_l^2)^2} - \\
&\quad - (g_{ll}^G)^2 e^2 \frac{m_l^2 R(m_l, m_G, t_2, u_2)}{12t_2^2 (m_l^2 - u_2)^2 (s_2 - m_l^2)^2}, \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

где  $s_2$ ,  $u_2$  и  $t_2$  определены в выражении (2.4),  $R_G(m_l, m_G, t, u)$  представляет собой регулярное выражение по  $m_l$  и  $m_G$ :

$$\begin{aligned}
R_G(m_l, m_G, t, u) &= 24m_l^{10}t + 24m_l^8[m_G^4 + 5m_G^2t - 6tu] + \\
&+ 2m_l^6[24m_G^6 + 6m_G^4(15t - 8u) - 3m_G^2t(33t + 92u) + 2t(13t^2 + 18tu + 90u^2)] + \\
&\quad + 2m_l^4[12m_G^8 + 12m_G^6(5t - 6u) + m_G^4(72u^2 - 113t^2 - 288tu) + \\
&\quad + 4m_Gt(t + 3u)(13t + 42u) - t(7t^3 + 64t^2u + 144tu^2 + 240u^3)] + \\
&+ m_l^2[12m_G^8(3t - 4u) - 3m_G^6(29t^2 + 80tu - 48u^2) + m_G^4(70t^3 + 544t^2u + 696tu^2 - 96u^3) - \\
&- m_G^2t(27t^3 + 364t^2u + 852tu^2 + 912u^3) + 2t(t^4 + 46t^3u + 92t^2u^2 + 216tu^3 + 180u^4)] + \\
&\quad + [-3m_G^8(3t^2 + 16tu - 8u^2) + m_G^6(15t^3 + 128t^2u + 168tu^2 - 48u^3) - \\
&\quad - m_G^4(9t^4 + 122t^3u + 362t^2u^2 + 384tu^3 - 24u^4) + \\
&\quad + m_G^2t(3t^4 + 68t^3u + 240t^2u^2 + 552tu^3 + 408u^4) - \\
&\quad - 2tu(t + u)(7t^3 + 24t^2u + 72tu^2 + 72u^3)],
\end{aligned}$$

Пренебрегая массой лептона в полученном выражении (A.2) и проводя корсинг-симметрию в виде  $p_{e^+} \rightarrow -p'_{e^-}$  и  $p'_\gamma \rightarrow -p_\gamma$ , получим:

$$s_2 \rightarrow \hat{t}_2 = (p_{e^-} - p'_G)^2, \quad t_2 \rightarrow \hat{u}_2 = (p_{e^-} - p'_\gamma)^2, \quad u_2 \rightarrow \hat{s}_2 = (p_{e^-} + p_{e^+})^2,$$

где для переменные Мандельштама  $s_2$ ,  $u_2$  и  $t_2$ , которые определены в выражении (2.4). В итоге квадрат матричного элемента для аннигиляции электрон-

позитронной пары в фотон и массивный гравитон принимает вид [33]:

$$|\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \gamma G}|^2 = (g_{ee}^G)^2 e^2 \frac{(\hat{s}_2^2 + 2\hat{t}_2(\hat{s}_2 + \hat{t}_2) - 2m_G^2\hat{t}_2 + m_G^4)}{4\hat{t}_2\hat{s}_2(\hat{s}_2 + \hat{t}_2 - m_G^2)} \cdot (4\hat{t}_2(\hat{s}_2 + \hat{t}_2) - m_G^2(\hat{s}_2 + 4\hat{t}_2)), \quad (\text{A.3})$$

### A.1.3 Сечения рождения медиатора на ядре

При падении заряженного лептона на мишень дифференциальные сечения в приближении Вайцеккера-Вильямса по доле энергии и углу вылета медиатора принимают вид в случае скалярного медиатора:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx d\cos(\theta_\phi)} \right|_{WW} = \frac{\alpha\chi E_e^2 x\beta_\phi 4\pi\alpha(c_{ee}^\phi)^2}{\pi 1-x 8\pi s_2^2} \times \left( \frac{x^2}{1-x} + 2m_\phi^2 \frac{u_2x + m_\phi^2(1-x)}{u_2^2} \right), \quad (\text{A.4})$$

и тензорного медиатора:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx d\cos(\theta_G)} \right|_{WW} = -\frac{\alpha\chi E_e^2 x\beta_G}{\pi 1-x} \frac{1}{8\pi s_2^2} \times 4\pi\alpha \frac{(c_{ee}^G)^2 [(t_2+u_2)^2+(u_2-m_G^2)^2][4u_2s_2+m_G^2t_2]}{\Lambda^2 4t_2u_2s_2}. \quad (\text{A.5})$$

### A.1.4 Сечения аннигиляции через медиатор

Аннигиляция в лептонную пару через тензорный медиатор для дираковской, скалярной и векторной темной материи имеют вид, соответственно:

$$\sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow G \rightarrow l^-l^+} = \frac{4\pi\alpha_\psi (g_{ll}^G)^2 s^3 \beta_\psi(s) \beta_l^3(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_\psi^2}{s}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{1280\pi D_\psi^G(s)}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{SS \rightarrow G \rightarrow l^-l^+} = \frac{4\pi\alpha_S (g_{ll}^G)^2 s^3 \beta_S^3(s) \beta_l^3(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{960\pi D_S^G(s)}, \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{VV \rightarrow G \rightarrow l^-l^+} = \frac{4\pi\alpha_V (g_{ll}^G)^2 s^3 \beta_V^{-1}(s) \beta_l^3(s) \left(13 + 56 \frac{m_V^2}{s} + 48 \frac{m_V^4}{s^2}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{8640\pi D_V^G(s)}, \quad (\text{A.8})$$

где использованы обозначения:

$$\beta_f(s) = \sqrt{1 - 4m_f^2/s}, \quad D_{\text{DM}}^{\text{MED}}(s) = (s - m_{\text{MED}}^2)^2 + m_{\text{MED}}^2 \Gamma_{\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}^2. \quad (\text{A.9})$$

Аннигиляция лептонной пары в дираковскую, скалярную и векторную темную материю через тензорный медиатор имеет вид, соответственно:

$$\sigma_{l-l^+ \rightarrow G \rightarrow \psi \bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi (g_{ll}^G)^2 s^3 \beta_\psi^3(s) \beta_l(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_\psi^2}{s}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{1280\pi D_\psi^G(s)}, \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{l-l^+ \rightarrow G \rightarrow SS} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_S (g_{ll}^G)^2 s^3 \beta_S^5(s) \beta_l(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{3840\pi D_S^G(s)}, \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_{l-l^+ \rightarrow G \rightarrow VV} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_V (g_{ll}^G)^2 s^3 \beta_V(s) \beta_l(s) \left(13 + 56 \frac{m_V^2}{s} + 48 \frac{m_V^4}{s^2}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{3840\pi D_V^G(s)}, \quad (\text{A.12})$$

Далее, аннигиляция в лептонную пару через скалярный медиатор для дираковской, скалярной и векторной темной материи имеют вид, соответственно:

$$\sigma_{\psi \bar{\psi} \rightarrow \phi \rightarrow \chi^+ e^-} = \frac{4\pi\alpha_\psi (c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\psi(s) \beta_e^3(s)}{16\pi D_\psi^\phi(s)}, \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_{\chi \chi \rightarrow \phi \rightarrow \chi^+ e^-} = \frac{4\pi\alpha_\chi (c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\chi(s) \beta_e^3(s)}{16\pi D_\chi^\phi(s)}, \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_{SS \rightarrow \phi \rightarrow \chi^+ e^-} = \frac{4\pi\alpha_S (c_{ee}^\phi)^2 \beta_S^{-1}(s) \beta_e^3(s)}{8\pi D_S^\phi(s)}, \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_{VV \rightarrow \phi \rightarrow \chi^+ e^-} = \frac{4\pi\alpha_V (c_{ee}^\phi)^2 s^2 \beta_V(s) \beta_e^3(s)}{144\pi D_V^\phi(s)}, \quad (\text{A.16})$$

Аннигиляция лептонной пары в дираковскую, скалярную и векторную темную материю через скалярный медиатор имеет вид, соответственно:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow SS} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_S (c_{ee}^\phi)^2 \beta_S(s) \beta_e(s)}{32\pi D_S^\phi(s)}, \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow \psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi (c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\psi^3(s) \beta_e(s)}{16\pi D_\psi^\phi(s)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow \chi\chi} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_\chi (c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\chi^3(s) \beta_e(s)}{16\pi D_\chi^\phi(s)}, \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow VV} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_V (c_{ee}^\phi)^2 s^2 \beta_V^3(s) \beta_e(s)}{64\pi D_V^\phi(s)}, \quad (\text{A.20})$$

### A.1.5 Интегралы в методе Вайцзеккера-Вильямса

В данном разделе приведены интегралы, которые позволяют аналитически проинтегрировать по углу дифференциальное сечение в приближении Вайцзеккера-Вильямса. Интеграл  $I_2(x, U, l)$  вида:

$$I_2(x, U, l) = \int U^l \ln \left[ \frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \in \mathbb{Z},$$

разбивается на несколько вспомогательных интегралов в зависимости от значения степени  $l$ . В случае  $n = -1$  и  $n = -2$ , соответственно:

$$\int \frac{1}{x} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \ln(x^2) - \frac{1}{2} [\text{Li}_2(-x^2/b) - \text{Li}_2(-x^2/a)]$$

$$\int \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = -\frac{1}{x} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) + 2 \left( \frac{\arctan(x/\sqrt{b})}{\sqrt{b}} - \frac{\arctan(x/\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \right)$$

При  $0 \leq n$  выполняется:

$$\int x^n \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) - \frac{2}{n+1} \sum_{m=0}^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}} (-1)^m \frac{x^{n+1-2m}}{n+1-2m} (b^m - a^m) + (-1)^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}} \frac{2}{n+1} R_{21}(x, n, a, b),$$

где  $(n \bmod k)$  - остаток от деления  $n$  на  $k$  и вспомогательное выражение  $R_{21}(x, n, a, b)$  принимает вид:

$$R_{21}(x, n, a, b) = \begin{cases} (1/2)b^{\frac{n+1}{2}} \ln(x^2 + b) - (1/2)a^{\frac{n+1}{2}} \ln(x^2 + a), & n \bmod 2 = 1, \\ b^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{b}) - a^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{a}), & n \bmod 2 = 0. \end{cases}$$

Для значений  $n < -2$  справедливо:

$$\int x^n \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) + R_{22}(x, -n, a, b)$$

где вспомогательное выражение  $R_{22}(x, n, a, b)$  для нечетных значений  $n$ :

$$R_{22}(x, n, a, b) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \left\{ \left( \frac{1}{b} \right)^{\frac{n-1}{2}} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2} \right) - \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{n-1}{2}} \ln \left( \frac{x^2 + a}{x^2} \right) \right\} + \\ + \frac{2}{n-1} \sum_{k=0}^{\frac{n-5}{2}} \frac{(-1)^k}{3+2k-n} \left( \left( \frac{1}{b} \right)^{k+1} - \left( \frac{1}{a} \right)^{k+1} \right) \frac{1}{x^{n-3-2k}}$$

и для четных значений  $n$ :

$$R_{22}(x, n, a, b) = \\ = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n-1} \left\{ \left( \frac{1}{b} \right)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctan} \left( \frac{x}{\sqrt{b}} \right) - \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctan} \left( \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right\} + \\ + \frac{2}{n-1} \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{(-1)^k}{3+2k-n} \left( \left( \frac{1}{b} \right)^{k+1} - \left( \frac{1}{a} \right)^{k+1} \right) \frac{1}{x^{n-3-2k}}$$

полученный выше интеграл  $I_2(x, U, l)$  позволяет проинтегрировать по углу дифференциальное сечение для скалярного, псевдоскалярного, векторного и псевдовекторного медиаторов. Далее, в случае  $l \geq 0$  интеграл  $I_3(x, U, l)$  принимает вид:

$$I_3(x, U, l) = \int \frac{U^l}{U + A(x)} dU = \sum_{m=0}^{l-1} C_l^m \frac{(-A)^m (U + A)^{l-m}}{l-m} + (-A)^l \ln(U + A),$$

где  $C_l^m$  - биномиальные коэффициенты. Интеграл вида:

$$I_4(x, U, l) = \int \frac{U^l}{U + A(x)} \ln \left[ \frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \geq 0,$$

выражается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n}{x + A} \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx &= \ln \left( \frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) I_3(x, U, n) - \\ &- 2 \sum_{m=0}^{l-1} C_n^m \frac{(-A)^m}{n-m} \sum_{j=0}^{n-m} C_{n-m}^j (A)^j R_{41}(x, n-m-j+1, a, b) - \\ &- (-A)^n \ln(A+x) \ln \left( \frac{x^2 + b}{A^2 + b} \right) + \\ &+ (-A)^n \ln(A+x) \ln \left( \frac{x^2 + a}{A^2 + a} \right) - \\ &- (-A)^n \left\{ 2\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{x+A}{A-i\sqrt{b}} \right) \right] - 2\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2 \left( \frac{x+A}{A-i\sqrt{a}} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} R_{41}(x, n, a, b) &= \int \frac{x^n dx}{x^2 + b} = \sum_{j=0}^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}-1} \frac{(-1)^j (b^j - a^j) x^{n-1-2j}}{n-1-2j} - \\ &- (-1)^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}} R_4(x, a, b, k), \end{aligned}$$

$$R_{42}(x, n, a, b) = \begin{cases} (1/2)b^{\frac{n-1}{2}} \ln(x^2 + b) - (1/2)a^{\frac{n-1}{2}} \ln(x^2 + a), & n \bmod 2 = 1, \\ b^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{b}) - a^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{a}), & n \bmod 2 = 0. \end{cases}$$

## Список литературы

1. *Pais A., Treiman S. B.* How Many Charm Quantum Numbers Are There? // *Phys. Rev. Lett.* — 1975. — Т. 35. — С. 1556. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.1556.
2. *Herrero M.* The Standard model // *NATO Sci. Ser. C* / под ред. Т. Ferbel. — 1999. — Т. 534. — С. 1—59. — DOI: 10.1007/978-94-011-4689-0\_1. — arXiv: hep-ph/9812242.
3. *Hubble E.* A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1929. — Т. 15. — С. 168—173. — DOI: 10.1073/pnas.15.3.168.
4. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / N. Aghanim [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 2020. — Т. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO]. — [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
5. *Zwicky F.* Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln // *Helv. Phys. Acta.* — 1933. — Т. 6. — С. 110—127. — DOI: 10.1007/s10714-008-0707-4.
6. *Rubin V. C., Thonnard N., Ford Jr. W. K.* Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/ // *Astrophys. J.* — 1980. — Т. 238. — С. 471. — DOI: 10.1086/158003.
7. *Markevitch M.* Chandra observation of the most interesting cluster in the universe // *ESA Spec. Publ.* — 2006. — Т. 604. — С. 723. — arXiv: astro-ph/0511345.
8. A direct empirical proof of the existence of dark matter / D. Clowe [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2006. — Т. 648. — С. L109—L113. — DOI: 10.1086/508162. — arXiv: astro-ph/0608407.
9. *White S. D. M., Frenk C. S., Davis M.* Clustering in a Neutrino Dominated Universe // *Astrophys. J. Lett.* / под ред. М. А. Srednicki. — 1983. — Т. 274. — С. L1—L5. — DOI: 10.1086/161425.



10. Formation of Galaxies and Large Scale Structure with Cold Dark Matter / G. R. Blumenthal [и др.] // Nature / под ред. М. А. Srednicki. — 1984. — Т. 311. — С. 517–525. — DOI: 10.1038/311517a0.
11. *Hu W., Dodelson S.* Cosmic Microwave Background Anisotropies // Ann. Rev. Astron. Astrophys. — 2002. — Т. 40. — С. 171–216. — DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093926. — arXiv: astro-ph/0110414.
12. Systematic Uncertainties In Constraining Dark Matter Annihilation From The Cosmic Microwave Background / S. Galli [и др.] // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88. — С. 063502. — DOI: 10.1103/PhysRevD.88.063502. — arXiv: 1306.0563 [astro-ph.CO].
13. *Perivolaropoulos L., Skara F.* Challenges for  $\Lambda$ CDM: An update // New Astron. Rev. — 2022. — Т. 95. — С. 101659. — DOI: 10.1016/j.newar.2022.101659. — arXiv: 2105.05208 [astro-ph.CO].
14. Is the observable Universe consistent with the cosmological principle? / P. K. Aluri [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2023. — Т. 40, № 9. — С. 094001. — DOI: 10.1088/1361-6382/acbefc. — arXiv: 2207.05765 [astro-ph.CO].
15. *Peebles P. J. E., Ratra B.* The Cosmological Constant and Dark Energy // Rev. Mod. Phys. / под ред. J.-P. Hsu, D. Fine. — 2003. — Т. 75. — С. 559–606. — DOI: 10.1103/RevModPhys.75.559. — arXiv: astro-ph/0207347.
16. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1980. — Т. 91. — С. 99–102. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.
17. *Guth A. H.* The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // Phys. Rev. D / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1981. — Т. 23. — С. 347–356. — DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
18. *Linde A. D.* A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // Phys. Lett. B / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1982. — Т. 108. — С. 389–393. — DOI: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.

19. *Baumann D.* Inflation // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Physics of the Large and the Small. — 2011. — С. 523—686. — DOI: 10.1142/9789814327183\_0010. — arXiv: 0907.5424 [hep-th].
20. *Riotto A.* Inflation and the theory of cosmological perturbations // ICTP Lect. Notes Ser. / под ред. G. Dvali [и др.]. — 2003. — Т. 14. — С. 317—413. — arXiv: hep-ph/0210162.
21. Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure / D. S. Akerib [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 118, № 2. — С. 021303. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.021303. — arXiv: 1608.07648 [astro-ph.CO].
22. Dark Matter Results From 54-Ton-Day Exposure of PandaX-II Experiment / X. Cui [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 18. — С. 181302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.181302. — arXiv: 1708.06917 [astro-ph.CO].
23. First Dark Matter Search Results from the XENON1T Experiment / E. Aprile [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 18. — С. 181301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.181301. — arXiv: 1705.06655 [astro-ph.CO].
24. *Lee B. W., Weinberg S.* Cosmological Lower Bound on Heavy Neutrino Masses // Phys. Rev. Lett. / под ред. M. A. Srednicki. — 1977. — Т. 39. — С. 165—168. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.39.165.
25. *Kolb E. W., Olive K. A.* The Lee-Weinberg Bound Revisited // Phys. Rev. D. — 1986. — Т. 33. — С. 1202. — DOI: 10.1103/PhysRevD.33.1202. — [Erratum: Phys.Rev.D 34, 2531 (1986)].
26. *McDonald J.* Gauge singlet scalars as cold dark matter // Phys. Rev. D. — 1994. — Т. 50. — С. 3637—3649. — DOI: 10.1103/PhysRevD.50.3637. — arXiv: hep-ph/0702143.
27. *Burgess C. P., Pospelov M., Veldhuis T. ter.* The Minimal model of nonbaryonic dark matter: A Singlet scalar // Nucl. Phys. B. — 2001. — Т. 619. — С. 709—728. — DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00513-2. — arXiv: hep-ph/0011335.
28. *Holdom B.* Two U(1)'s and Epsilon Charge Shifts // Phys. Lett. B. — 1986. — Т. 166. — С. 196—198. — DOI: 10.1016/0370-2693(86)91377-8.

29. *Okun L. B.* LIMITS OF ELECTRODYNAMICS: PARAPHOTONS? // Sov. Phys. JETP. — 1982. — Т. 56. — С. 502.
30. *Nomura Y., Thaler J.* Dark Matter through the Axion Portal // Phys. Rev. D. — 2009. — Т. 79. — С. 075008. — DOI: 10.1103/PhysRevD.79.075008. — arXiv: 0810.5397 [hep-ph].
31. ALPtraum: ALP production in proton beam dump experiments / B. Döbrich [и др.] // JHEP. — 2016. — Т. 02. — С. 018. — DOI: 10.1007/JHEP02(2016)018. — arXiv: 1512.03069 [hep-ph].
32. *Lee H. M., Park M., Sanz V.* Gravity-mediated (or Composite) Dark Matter // Eur. Phys. J. C. — 2014. — Т. 74. — С. 2715. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-2715-8. — arXiv: 1306.4107 [hep-ph].
33. *Kang Y.-J., Lee H. M.* Lightning gravity-mediated dark matter // The European Physical Journal C. — 2020. — Июль. — Т. 80, № 7. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-8153-x. — arXiv: 2001.04868.
34. Lepton flavor portal matter / G. N. Wojcik [и др.] // Phys. Rev. D. — 2023. — Т. 108, № 5. — С. 055033. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.055033. — arXiv: 2303.12983 [hep-ph].
35. *Jueid A., Nasri S.* Lepton portal dark matter at muon colliders: Total rates and generic features for phenomenologically viable scenarios // Phys. Rev. D. — 2023. — Т. 107, № 11. — С. 115027. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.115027. — arXiv: 2301.12524 [hep-ph].
36. *Davidson S., Hannestad S., Raffelt G.* Updated bounds on millicharged particles // JHEP. — 2000. — Т. 05. — С. 003. — DOI: 10.1088/1126-6708/2000/05/003. — arXiv: hep-ph/0001179.
37. *Dubovsky S. L., Gorbunov D. S., Rubtsov G. I.* Narrowing the window for millicharged particles by CMB anisotropy // JETP Lett. — 2004. — Т. 79. — С. 1—5. — DOI: 10.1134/1.1675909. — arXiv: hep-ph/0311189.
38. *Chang S., Weiner N., Yavin I.* Magnetic Inelastic Dark Matter // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 82. — С. 125011. — DOI: 10.1103/PhysRevD.82.125011. — arXiv: 1007.4200 [hep-ph].

39. *Chu X., Pradler J., Semmelrock L.* Light dark states with electromagnetic form factors // *Phys. Rev. D.* — 2019. — T. 99, № 1. — C. 015040. — DOI: 10.1103/PhysRevD.99.015040. — arXiv: 1811.04095 [hep-ph].
40. Freeze-In Production of FIMP Dark Matter / L. J. Hall [и др.] // *JHEP.* — 2010. — T. 03. — C. 080. — DOI: 10.1007/JHEP03(2010)080. — arXiv: 0911.1120 [hep-ph].
41. Dark Matter, Millicharges, Axion and Scalar Particles, Gauge Bosons, and Other New Physics with LDMX / A. Berlin [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2019. — T. 99, № 7. — C. 075001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.99.075001. — arXiv: 1807.01730 [hep-ph].
42. *Bertone G., Hooper D., Silk J.* Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints // *Phys. Rept.* — 2005. — T. 405. — C. 279–390. — DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031. — arXiv: hep-ph/0404175.
43. *Chung D. J. H., Kolb E. W., Riotto A.* Superheavy dark matter // *Phys. Rev. D.* — 1998. — T. 59. — C. 023501. — DOI: 10.1103/PhysRevD.59.023501. — arXiv: hep-ph/9802238.
44. Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector / M. G. Aartsen [и др.] // *Science.* — 2013. — T. 342. — C. 1242856. — DOI: 10.1126/science.1242856. — arXiv: 1311.5238 [astro-ph.HE].
45. *Gninenko S. N., Krasnikov N. V., Matveev V. A.* Search for light dark matter in the NA64 experiment // *Usp. Fiz. Nauk.* — 2021. — T. 191, № 12. — C. 1361–1386. — DOI: 10.3367/UFNe.2021.09.039066.
46. *Kim K. J., Tsai Y.-S.* AN IMPROVED WEIZSACKER-WILLIAMS METHOD AND PHOTOPRODUCTION OF LEPTON PAIRS // *Phys. Lett. B.* — 1972. — T. 40. — C. 665–670. — DOI: 10.1016/0370-2693(72)90622-3.
47. *Kim K. J., Tsai Y.-S.* Improved Weizsacker-Williams Method and Its Application to Lepton and W-Boson Pair Production // *Phys. Rev. D.* — 1973. — T. 8. — C. 3109. — DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3109. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3109>.

48. *Tsai Y.-S.* Pair production and bremsstrahlung of charged leptons // *Rev. Mod. Phys.* — 1974. — Т. 46. — С. 815. — DOI: 10.1103/RevModPhys.46.815.
49. *Tsai Y.-S.* AXION BREMSSTRAHLUNG BY AN ELECTRON BEAM // *Phys. Rev. D* / под ред. S. C. Loken. — 1986. — Т. 34. — С. 1326. — DOI: 10.1103/PhysRevD.34.1326.
50. New fixed-target experiments to search for dark gauge forces / J. D. Bjorken [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2009. — Окт. — Т. 80, вып. 7. — С. 075018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.80.075018. — arXiv: 0906.0580.
51. Probing hidden sectors with a muon beam: Total and differential cross sections for vector boson production in muon bremsstrahlung / D. V. Kirpichnikov [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Т. 104, № 7. — С. 076012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.076012. — arXiv: 2107.13297 [hep-ph].
52. *Берестецкий В., Лифшиц Е., Пятаевский Л.* Теоретическая физика. Том 4. Квантовая электродинамика. — Litres, 2022.
53. Dark photon production through positron annihilation in beam-dump experiments / L. Marsicano [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Т. 98, № 1. — С. 015031. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.015031. — arXiv: 1802.03794 [hep-ex].
54. New production channels for light dark matter in hadronic showers / A. Celentano [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Т. 102, № 7. — С. 075026. — DOI: 10.1103/PhysRevD.102.075026. — arXiv: 2006.09419 [hep-ph].
55. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing hidden spin-2 mediator of dark matter with NA64e, LDMX, NA64 $\mu$ , and M3 // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Т. 106, № 11. — С. 115041. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.115041. — arXiv: 2210.00751 [hep-ph].
56. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Resonant probing spin-0 and spin-2 dark matter mediators with fixed target experiments // *Phys. Rev. D.* — 2023. — Т. 107, № 11. — С. 115034. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.115034. — arXiv: 2304.14052 [hep-ph].

57. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing scalar, Dirac, Majorana, and vector dark matter through a spin-0 electron-specific mediator at electron fixed-target experiments // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Т. 109, № 7. — С. 075012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.075012. — arXiv: 2312.15697 [hep-ph].
58. *Hubble E., Humason M. L.* The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae // *Astrophys. J.* — 1931. — Т. 74. — С. 43–80. — DOI: 10.1086/143323.
59. *Zwicky F.* On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae // *Astrophys. J.* — 1937. — Т. 86. — С. 217–246. — DOI: 10.1086/143864.
60. *Bertone G., Hooper D.* History of dark matter // *Rev. Mod. Phys.* — 2018. — Т. 90, № 4. — С. 045002. — DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002. — arXiv: 1605.04909 [astro-ph.CO].
61. *Salucci P., Borriello A.* The intriguing distribution of dark matter in galaxies // *Lect. Notes Phys.* / под ред. J. Trampetic, J. Wess. — 2003. — Т. 616. — С. 66–77. — arXiv: astro-ph/0203457.
62. Colliding clusters and dark matter self-interactions / F. Kahlhoefer [и др.] // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2014. — Т. 437, № 3. — С. 2865–2881. — DOI: 10.1093/mnras/stt2097. — arXiv: 1308.3419 [astro-ph.CO].
63. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* The Structure of cold dark matter halos // *Astrophys. J.* — 1996. — Т. 462. — С. 563–575. — DOI: 10.1086/177173. — arXiv: astro-ph/9508025.
64. *Shapley H., Ames A.* A Survey of the External Galaxies Brighter than the Thirteenth Magnitude // *Annals of Harvard College Observatory.* — 1932. — ЯНВ. — Т. 88. — С. 41–76.
65. *Ostriker J. P., Peebles P. J. E.* A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies: or, can Cold Galaxies Survive? // *Astrophys. J.* — 1973. — Т. 186. — С. 467–480. — DOI: 10.1086/152513.
66. *Ostriker J. P., Peebles P. J. E., Yahil A.* The size and mass of galaxies, and the mass of the universe // *Astrophys. J. Lett.* — 1974. — Т. 193. — С. L1–L4. — DOI: 10.1086/181617.

67. *Springel V., Frenk C. S., White S. D. M.* The large-scale structure of the Universe // *Nature*. — 2006. — Т. 440. — С. 1137. — DOI: 10.1038/nature04805. — arXiv: astro-ph/0604561.
68. *Einstein A.* The foundation of the general theory of relativity. // *Annalen Phys.* / под ред. J.-P. Hsu, D. Fine. — 1916. — Т. 49, № 7. — С. 769—822. — DOI: 10.1002/andp.19163540702.
69. *Dyson F. W., Eddington A. S., Davidson C.* A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919 // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*. — 1920. — Т. 220. — С. 291—333. — DOI: 10.1098/rsta.1920.0009.
70. A weak lensing study of the Coma cluster / R. Gavazzi [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 2009. — Т. 498. — С. L33. — DOI: 10.1051/0004-6361/200911841. — arXiv: 0904.0220 [astro-ph.CO].
71. *Bartelmann M., Maturi M.* Weak gravitational lensing //. — 12.2016. — arXiv: 1612.06535 [astro-ph.CO].
72. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. — New York : John Wiley, Sons, 1972. — ISBN 978-0-471-92567-5.
73. *Walsh D., Carswell R. F., Weymann R. J.* 0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens // *Nature*. — 1979. — Т. 279. — С. 381—384. — DOI: 10.1038/279381a0.
74. *Kaiser N., Squires G.* Mapping the dark matter with weak gravitational lensing // *Astrophys. J.* — 1993. — Т. 404. — С. 441—450. — DOI: 10.1086/172297.
75. *Massey R., Kitching T., Richard J.* The dark matter of gravitational lensing // *Rept. Prog. Phys.* — 2010. — Т. 73. — С. 086901. — DOI: 10.1088/0034-4885/73/8/086901. — arXiv: 1001.1739 [astro-ph.CO].
76. Microlensing constraints on primordial black holes with Subaru/HSC Andromeda observations / H. Niikura [и др.] // *Nature Astron.* — 2019. — Т. 3, № 6. — С. 524—534. — DOI: 10.1038/s41550-019-0723-1. — arXiv: 1701.02151 [astro-ph.CO].

77. *Chapline G. F.* Cosmological effects of primordial black holes // Nature. — 1975. — T. 253, № 5489. — C. 251–252. — DOI: 10.1038/253251a0.
78. *Carr B., Kuhnel F., Sandstad M.* Primordial Black Holes as Dark Matter // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 94, № 8. — C. 083504. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.083504. — arXiv: 1607.06077 [astro-ph.CO].
79. *Carr B., Kuhnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // SciPost Phys. Lect. Notes. — 2022. — T. 48. — C. 1. — DOI: 10.21468/SciPostPhysLectNotes.48. — arXiv: 2110.02821 [astro-ph.CO].
80. *Bekenstein J. D.* Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm // Phys. Rev. D. — 2004. — T. 70. — C. 083509. — DOI: 10.1103/PhysRevD.70.083509. — arXiv: astro-ph/0403694. — [Erratum: Phys.Rev.D 71, 069901 (2005)].
81. *Angus G. W., Famaey B., Zhao H.* Can MOND take a bullet? Analytical comparisons of three versions of MOND beyond spherical symmetry // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2006. — T. 371. — C. 138. — DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.10668.x. — arXiv: astro-ph/0606216.
82. *Alpher R. A., Bethe H., Gamow G.* The origin of chemical elements // Phys. Rev. — 1948. — T. 73. — C. 803–804. — DOI: 10.1103/PhysRev.73.803.
83. *Gamow G.* The Evolution of the Universe // Nature. — 1948. — T. 162, № 4122. — C. 680–682. — DOI: 10.1038/162680a0.
84. *Alpher R. A., Herman R.* Evolution of the Universe // Nature. — 1948. — T. 162, № 4124. — C. 774–775. — DOI: 10.1038/162774b0.
85. *Penzias A. A., Wilson R. W.* A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s // Astrophys. J. — 1965. — T. 142. — C. 419–421. — DOI: 10.1086/148307.
86. Big Bang Nucleosynthesis: 2015 / R. H. Cyburt [и др.] // Rev. Mod. Phys. — 2016. — T. 88. — C. 015004. — DOI: 10.1103/RevModPhys.88.015004. — arXiv: 1505.01076 [astro-ph.CO].
87. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps / G. F. Smoot [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 1992. — T. 396. — C. L1–L5. — DOI: 10.1086/186504.



88. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results / C. L. Bennett [и др.] // *Astrophys. J. Suppl.* — 2013. — Т. 208. — С. 20. — DOI: 10.1088/0067-0049/208/2/20. — arXiv: 1212.5225 [astro-ph.CO].
89. *Weinberg S.* Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe // *Astrophys. J.* — 1971. — Т. 168. — С. 175. — DOI: 10.1086/151073.
90. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies / D. J. Eisenstein [и др.] // *Astrophys. J.* — 2005. — Т. 633. — С. 560—574. — DOI: 10.1086/466512. — arXiv: astro-ph/0501171.
91. *Hu W., Sugiyama N., Silk J.* The Physics of microwave background anisotropies // *Nature.* — 1997. — Т. 386. — С. 37—43. — DOI: 10.1038/386037a0. — arXiv: astro-ph/9604166.
92. *Slatyer T. R., Padmanabhan N., Finkbeiner D. P.* CMB Constraints on WIMP Annihilation: Energy Absorption During the Recombination Epoch // *Phys. Rev. D.* — 2009. — Т. 80. — С. 043526. — DOI: 10.1103/PhysRevD.80.043526. — arXiv: 0906.1197 [astro-ph.CO].
93. *Krnjaic G.* Probing Light Thermal Dark-Matter With a Higgs Portal Mediator // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Т. 94, № 7. — С. 073009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.073009. — arXiv: 1512.04119 [hep-ph].
94. Searching for Dark Matter in the CMB: A Compact Parameterization of Energy Injection from New Physics / D. P. Finkbeiner [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2012. — Т. 85. — С. 043522. — DOI: 10.1103/PhysRevD.85.043522. — arXiv: 1109.6322 [astro-ph.CO].
95. Constraints on dark matter annihilation from CMB observations before Planck / L. Lopez-Honorez [и др.] // *JCAP.* — 2013. — Т. 07. — С. 046. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/07/046. — arXiv: 1303.5094 [astro-ph.CO].
96. *Li J., Nomura T., Shimomura T.* Inelastic dark matter from dark Higgs boson decays at FASER // *JHEP.* — 2022. — Т. 09. — С. 140. — DOI: 10.1007/JHEP09(2022)140. — arXiv: 2112.12432 [hep-ph].

97. *Bell N. F., Cai Y., Medina A. D.* Co-annihilating Dark Matter: Effective Operator Analysis and Collider Phenomenology // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Т. 89, № 11. — С. 115001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.89.115001. — arXiv: 1311.6169 [hep-ph].
98. *Harko T.* The matter Lagrangian and the energy-momentum tensor in modified gravity with non-minimal coupling between matter and geometry // *Phys. Rev. D.* — 2010. — Т. 81. — С. 044021. — DOI: 10.1103/PhysRevD.81.044021. — arXiv: 1001.5349 [gr-qc].
99. *Mendoza S., Silva S.* The matter Lagrangian of an ideal fluid // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* — 2021. — Т. 18, № 04. — С. 2150059. — DOI: 10.1142/S0219887821500596. — arXiv: 2011.04175 [gr-qc].
100. *Rubakov V. A., Gorbunov D. S.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot big bang theory. — Singapore : World Scientific, 2017. — ISBN 978-981-320-987-9. — DOI: 10.1142/10447.
101. *Friedman A.* On the Curvature of space // *Z. Phys.* — 1922. — Т. 10. — С. 377–386. — DOI: 10.1007/BF01332580.
102. *Lemaitre G.* A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulæ // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 1931. — Т. 91, № 5. — С. 483–490. — DOI: 10.1093/mnras/91.5.483.
103. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure // *Astrophys. J.* — 1935. — Т. 82. — С. 284–301. — DOI: 10.1086/143681.
104. *Walker A. G.* On Milne's Theory of World-Structure // *Proc. Lond. Math. Soc. s.* — 1937. — Т. 2–42, № 1. — С. 90–127. — DOI: 10.1112/plms/s2-42.1.90.
105. *Ландау Л. Д., Lifшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 5. Статистическая физика. Часть 1. — Наука, 1976.
106. *Husdal L.* On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe // *Galaxies.* — 2016. — Т. 4, № 4. — С. 78. — DOI: 10.3390/galaxies4040078. — arXiv: 1609.04979 [astro-ph.CO].

107. *Abramowitz M., Stegun I. A., Romer R. H.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. — American Association of Physics Teachers, 1988.
108. *Choi S.-M., Lee H. M., Seo M.-S.* Cosmic abundances of SIMP dark matter // *JHEP*. — 2017. — Т. 04. — С. 154. — DOI: 10.1007/JHEP04(2017)154. — arXiv: 1702.07860 [hep-ph].
109. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Теоретическая физика. Том X. Физическая кинетика. — Физматлит, 2002.
110. *De Groot S. R.* Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications / под ред. W. A. Van Leeuwen, C. G. Van Weert. — 1980.
111. *Gondolo P., Gelmini G.* Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis // *Nucl. Phys. B*. — 1991. — Т. 360. — С. 145—179. — DOI: 10.1016/0550-3213(91)90438-4.
112. *Cannoni M.* Lorentz invariant relative velocity and relativistic binary collisions // *Int. J. Mod. Phys. A*. — 2017. — Т. 32, 02n03. — С. 1730002. — DOI: 10.1142/S0217751X17300022. — arXiv: 1605.00569 [hep-ph].
113. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Т. 2. — Наука, 1988.
114. *Srednicki M., Watkins R., Olive K. A.* Calculations of Relic Densities in the Early Universe // *Nucl. Phys. B* / под ред. М. А. Srednicki. — 1988. — Т. 310. — С. 693. — DOI: 10.1016/0550-3213(88)90099-5.
115. Axion-like particles as mediators for dark matter: beyond freeze-out / A. Bharucha [и др.] // *JHEP*. — 2023. — Т. 02. — С. 141. — DOI: 10.1007/JHEP02(2023)141. — arXiv: 2209.03932 [hep-ph].
116. *Kong K., Matchev K. T.* Precise calculation of the relic density of Kaluza-Klein dark matter in universal extra dimensions // *JHEP*. — 2006. — Т. 01. — С. 038. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/01/038. — arXiv: hep-ph/0509119.
117. *Kolb E. W., Turner M. S.* The Early Universe. Т. 69. — 1990. — ISBN 978-0-201-62674-2. — DOI: 10.1201/9780429492860.
118. *Wells J. D.* Annihilation cross-sections for relic densities in the low velocity limit. — 1994. — Март. — arXiv: hep-ph/9404219.

119. *Edsjo J., Gondolo P.* Neutralino relic density including coannihilations // Phys. Rev. D. — 1997. — Т. 56. — С. 1879—1894. — DOI: 10.1103/PhysRevD.56.1879. — arXiv: hep-ph/9704361.
120. *Lisanti M.* Lectures on Dark Matter Physics // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings. — 2017. — С. 399—446. — DOI: 10.1142/9789813149441\_0007. — arXiv: 1603.03797 [hep-ph].
121.  $M^3$ : a new muon missing momentum experiment to probe  $(g - 2)_\mu$  and dark matter at Fermilab / Y. Kahn [и др.] // JHEP. — 2018. — Т. 09. — С. 153. — DOI: 10.1007/JHEP09(2018)153. — arXiv: 1804.03144 [hep-ph].
122. *Laine M., Schroder Y.* Quark mass thresholds in QCD thermodynamics // Phys. Rev. D. — 2006. — Т. 73. — С. 085009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.73.085009. — arXiv: hep-ph/0603048.
123. *Drees M., Hajkarim F., Schmitz E. R.* The Effects of QCD Equation of State on the Relic Density of WIMP Dark Matter // JCAP. — 2015. — Т. 06. — С. 025. — DOI: 10.1088/1475-7516/2015/06/025. — arXiv: 1503.03513 [hep-ph].
124. *Ala-Mattinen K., Kainulainen K.* Precision calculations of dark matter relic abundance // JCAP. — 2020. — Т. 09. — С. 040. — DOI: 10.1088/1475-7516/2020/09/040. — arXiv: 1912.02870 [hep-ph].
125. *Lee H. M., Park M., Sanz V.* Gravity-mediated (or Composite) Dark Matter Confronts Astrophysical Data // JHEP. — 2014. — Т. 05. — С. 063. — DOI: 10.1007/JHEP05(2014)063. — arXiv: 1401.5301 [hep-ph].
126. *Cai H., Cacciapaglia G., Lee S. J.* Massive Gravitons as Feebly Interacting Dark Matter Candidates // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Т. 128, № 8. — С. 081806. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.081806. — arXiv: 2107.14548 [hep-ph].
127. Flavor-specific scalar mediators / B. Batell [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 5. — С. 055026. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.055026. — arXiv: 1712.10022 [hep-ph].

128. New Searches for Muonphilic Particles at Proton Beam Dump Spectrometers / D. Forbes [и др.]. — 2022. — Ноябрь. — arXiv: 2212.00033 [hep-ph].
129. *Chen C.-Y., Kozaczuk J., Zhong Y.-M.* Exploring leptophilic dark matter with NA64- $\mu$  // JHEP. — 2018. — Т. 10. — С. 154. — DOI: 10.1007/JHEP10(2018)154. — arXiv: 1807.03790 [hep-ph].
130. Probing Leptophilic Dark Sectors at Electron Beam-Dump Facilities / L. Marsicano [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 11. — С. 115022. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.115022. — arXiv: 1812.03829 [hep-ex].
131. Implications of LHC searches for Higgs-portal dark matter / A. Djouadi [и др.] // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 709. — С. 65–69. — DOI: 10.1016/j.physletb.2012.01.062. — arXiv: 1112.3299 [hep-ph].
132. *Lebedev O., Lee H. M., Mambrini Y.* Vector Higgs-portal dark matter and the invisible Higgs // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 707. — С. 570–576. — DOI: 10.1016/j.physletb.2012.01.029. — arXiv: 1111.4482 [hep-ph].
133. *Kaneta K., Lee H.-S., Yun S.* Dark photon relic dark matter production through the dark axion portal // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 11. — С. 115032. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.115032. — arXiv: 1704.07542 [hep-ph].
134. *Kaneta K., Lee H.-S., Yun S.* Portal Connecting Dark Photons and Axions // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 118, № 10. — С. 101802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.101802. — arXiv: 1611.01466 [hep-ph].
135. *Zhevlakov A. S., Kirpichnikov D. V., Lyubovitskij V. E.* Implication of the dark axion portal for the EDM of fermions and dark matter probing with NA64e, NA64 $\mu$ , LDMX, M3, and BaBar // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 3. — С. 035018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.035018. — arXiv: 2204.09978 [hep-ph].
136. *Dreiner H. K., Haber H. E., Martin S. P.* Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry // Phys. Rept. — 2010. — Т. 494. — С. 1–196. — DOI: 10.1016/j.physrep.2010.05.002. — arXiv: 0812.1594 [hep-ph].

137. *Nordstrom G.* On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields // *Phys. Z.* — 1914. — Т. 15. — С. 504–506. — arXiv: physics/0702221.
138. *Kaluza T.* Zum Unitätsproblem der Physik // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )* — 1921. — Т. 1921. — С. 966–972. — DOI: 10.1142/S0218271818700017. — arXiv: 1803.08616 [physics.hist-ph].
139. *Klein O.* Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English) // *Z. Phys. / под ред. J. C. Taylor.* — 1926. — Т. 37. — С. 895–906. — DOI: 10.1007/BF01397481.
140. *Randall L., Sundrum R.* A Large mass hierarchy from a small extra dimension // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Т. 83. — С. 3370–3373. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.3370. — arXiv: hep-ph/9905221.
141. Cosmology of brane models with radion stabilization / *C. Csaki [и др.]* // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Т. 62. — С. 045015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.62.045015. — arXiv: hep-ph/9911406.
142. *Fierz M., Pauli W.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1939. — Т. 173. — С. 211–232. — DOI: 10.1098/rspa.1939.0140.
143. *Zee A.* Quantum field theory in a nutshell. — 2003. — ISBN 978-0-691-14034-6.
144. *Giudice G. F., Rattazzi R., Wells J. D.* Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders // *Nucl. Phys. B.* — 1999. — Т. 544. — С. 3–38. — DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00044-9. — arXiv: hep-ph/9811291.
145. *Степаньянц К.* Классическая теория поля. — ЛитРес, 2022. — ISBN 9785040048069. — URL: <https://books.google.ru/books?id=7MDfCwAAQBAJ>.
146. *Folgado M. G., Donini A., Rius N.* Gravity-mediated Scalar Dark Matter in Warped Extra-Dimensions. — 2019. — Июль. — DOI: 10.1007/JHEP01(2020)161. — arXiv: 1907.04340 [hep-ph]. — [Erratum: JHEP 02, 129 (2022)].

147. *Liu Y.-S., McKeen D., Miller G. A.* Validity of the Weizsäcker-Williams approximation and the analysis of beam dump experiments: Production of a new scalar boson // *Phys. Rev. D.* — 2017. — T. 95, № 3. — C. 036010. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.036010. — arXiv: 1609.06781 [hep-ph].
148. Probing hidden sectors with a muon beam: Implication of spin-0 dark matter mediators for the muon  $(g-2)$  anomaly and the validity of the Weizsäcker-Williams approach / H. Sieber [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2023. — T. 108, № 5. — C. 056018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.056018. — arXiv: 2305.09015 [hep-ph].
149. *Liu Y.-S., Miller G. A.* Validity of the Weizsäcker-Williams approximation and the analysis of beam dump experiments: Production of an axion, a dark photon, or a new axial-vector boson // *Phys. Rev. D.* — 2017. — T. 96, № 1. — C. 016004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.96.016004. — arXiv: 1705.01633 [hep-ph].
150. *Weizsacker C. F. von.* Radiation emitted in collisions of very fast electrons // *Z. Phys.* — 1934. — T. 88. — C. 612–625. — DOI: 10.1007/BF01333110.
151. *Williams E. J.* Nature of the high-energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae // *Phys. Rev.* — 1934. — T. 45. — C. 729–730. — DOI: 10.1103/PhysRev.45.729.
152. *Fermi E.* On the Theory of the impact between atoms and electrically charged particles // *Z. Phys.* — 1924. — T. 29. — C. 315–327. — DOI: 10.1007/BF03184853.
153. The Two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation / V. M. Budnev [и др.] // *Phys. Rept.* — 1975. — T. 15. — C. 181–281. — DOI: 10.1016/0370-1573(75)90009-5.
154. The exact tree-level calculation of the dark photon production in high-energy electron scattering at the CERN SPS / S. N. Gninenko [и др.] // *Phys. Lett. B.* — 2018. — T. 782. — C. 406–411. — DOI: 10.1016/j.physletb.2018.05.010. — arXiv: 1712.05706 [hep-ph].

155. *Schwartz M. D.* Quantum Field Theory and the Standard Model. — Cambridge University Press, 03.2014. — ISBN 978-1-107-03473-0.
156. *Perdrisat C. F., Punjabi V., Vanderhaeghen M.* Nucleon Electromagnetic Form Factors // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2007. — Т. 59. — С. 694—764. — DOI: 10.1016/j.pnpnp.2007.05.001. — arXiv: hep-ph/0612014.
157. *Hand L. N., Miller D. G., Wilson R.* Electric and Magnetic Formfactor of the Nucleon // Rev. Mod. Phys. — 1963. — Т. 35. — С. 335. — DOI: 10.1103/RevModPhys.35.335.
158. *Rekalo M. P., Tomasi-Gustafsson E.* Polarization effects in elastic electron proton scattering: Lecture notes. — 2002. — Февр. — arXiv: nucl-th/0202025.
159. *Hofstadter R.* Electron scattering and nuclear structure // Rev. Mod. Phys. — 1956. — Т. 28. — С. 214—254. — DOI: 10.1103/RevModPhys.28.214.
160. *Schiff L. I.* Energy-Angle Distribution of Thin Target Bremsstrahlung // Phys. Rev. — 1951. — Июль. — Т. 83, вып. 2. — С. 252—253. — DOI: 10.1103/PhysRev.83.252.
161. *Schiff L. I.* Interpretation of Electron Scattering Experiments // Phys. Rev. — 1953. — Т. 92. — С. 988—993. — DOI: 10.1103/PhysRev.93.1434. — [Erratum: Phys.Rev. 93, 1434–1434 (1954)].
162. Determining the nuclear form factor for detection of dark matter in the relativistic mean field theory / Y.-Z. Chen [и др.] // Commun. Theor. Phys. — 2011. — Т. 55. — С. 1059—1064. — DOI: 10.1088/0253-6102/55/6/21. — arXiv: 1101.3049 [hep-ph].
163. *Lewin J. D., Smith P. F.* Review of mathematics, numerical factors, and corrections for dark matter experiments based on elastic nuclear recoil // Astropart. Phys. — 1996. — Т. 6. — С. 87—112. — DOI: 10.1016/S0927-6505(96)00047-3.
164. *Freese K., Frieman J. A., Gould A.* Signal Modulation in Cold Dark Matter Detection // Phys. Rev. D. — 1988. — Т. 37. — С. 3388—3405. — DOI: 10.1103/PhysRevD.37.3388.



165. *Sick I.* Model-independent nuclear charge densities from elastic electron scattering // Nucl. Phys. A. — 1974. — T. 218. — C. 509–541. — DOI: 10.1016/0375-9474(74)90039-6.
166. The determination of the nuclear ground state and transition charge density from measured electron scattering data / B. Dreher [и др.] // Nucl. Phys. A. — 1974. — T. 235. — C. 219–248. — DOI: 10.1016/0375-9474(74)90189-4.
167. *Duda G., Kemper A., Gondolo P.* Model Independent Form Factors for Spin Independent Neutralino-Nucleon Scattering from Elastic Electron Scattering Data // JCAP. — 2007. — T. 04. — C. 012. — DOI: 10.1088/1475-7516/2007/04/012. — arXiv: hep-ph/0608035.
168. *Klein S., Nystrand J.* Exclusive vector meson production in relativistic heavy ion collisions // Phys. Rev. C. — 1999. — T. 60. — C. 014903. — DOI: 10.1103/PhysRevC.60.014903. — arXiv: hep-ph/9902259.
169. *Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F.* FeynCalc 9.3: New features and improvements // Comput. Phys. Commun. — 2020. — T. 256. — C. 107478. — DOI: 10.1016/j.cpc.2020.107478. — arXiv: 2001.04407 [hep-ph].
170. *Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F.* New Developments in FeynCalc 9.0 // Comput. Phys. Commun. — 2016. — T. 207. — C. 432–444. — DOI: 10.1016/j.cpc.2016.06.008. — arXiv: 1601.01167 [hep-ph].
171. *Inc. W. R.* Mathematica, Version 13.1. — URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> ; Champaign, IL, 2022.
172. Review of Particle Physics / R. L. Workman [и др.] // PTEP. — 2022. — T. 2022. — C. 083C01. — DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
173. *L'vov A. I.* About the Breit–Wigner Formula for Identical Particles // Phys. Atom. Nucl. — 2018. — T. 81, № 6. — C. 748–749. — DOI: 10.1134/S1063778818050149.
174. *Buckley M. R., Feld D., Goncalves D.* Scalar Simplified Models for Dark Matter // Phys. Rev. D. — 2015. — T. 91. — C. 015017. — DOI: 10.1103/PhysRevD.91.015017. — arXiv: 1410.6497 [hep-ph].

175. *Kang Y.-J., Lee H. M.* Lightning Gravity-Mediated Dark Matter // Eur. Phys. J. C. — 2020. — T. 80, № 7. — C. 602. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-8153-x. — arXiv: 2001.04868 [hep-ph].
176. *Izaguirre E., Krnjaic G., Shuve B.* Discovering Inelastic Thermal-Relic Dark Matter at Colliders // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 93, № 6. — C. 063523. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.063523. — arXiv: 1508.03050 [hep-ph].
177. Search for a Dark Photon in  $e^+e^-$  Collisions at BaBar / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — T. 113, № 20. — C. 201801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.201801. — arXiv: 1406.2980 [hep-ex].
178. Search for a muonic dark force at BABAR / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 94, № 1. — C. 011102. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.011102. — arXiv: 1606.03501 [hep-ex].
179. Search for Invisible Decays of a Dark Photon Produced in  $e^+e^-$  Collisions at BaBar / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, № 13. — C. 131804. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.131804. — arXiv: 1702.03327 [hep-ex].
180. Search for a Dark Leptophilic Scalar in  $e^+e^-$  Collisions / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — T. 125, № 18. — C. 181801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.181801. — arXiv: 2005.01885 [hep-ex].
181. Search for vector mediator of Dark Matter production in invisible decay mode / D. Banerjee [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — T. 97, № 7. — C. 072002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.97.072002. — arXiv: 1710.00971 [hep-ex].
182. Search for a light  $Z'$  in the  $L\mu$ - $L\tau$  scenario with the NA64-e experiment at CERN / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. D. — 2022. — T. 106, № 3. — C. 032015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.032015. — arXiv: 2206.03101 [hep-ex].
183. High purity 100 GeV electron identification with synchrotron radiation / E. Depero [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2017. — T. 866. — C. 196–201. — DOI: 10.1016/j.nima.2017.05.028. — arXiv: 1703.05993 [physics.ins-det].

184. Missing energy signature from invisible decays of dark photons at the CERN SPS / S. N. Gninenko [и др.] // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 9. — C. 095025. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.095025. — arXiv: 1604.08432 [hep-ph].
185. Search for a New B-L  $Z'$  Gauge Boson with the NA64 Experiment at CERN / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Т. 129, № 16. — C. 161801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.161801. — arXiv: 2207.09979 [hep-ex].
186. *Peso J. del, Ros E.* On the Energy Resolution of Electromagnetic Sampling Calorimeters // Nucl. Instrum. Meth. A. — 1989. — Т. 276. — C. 456. — DOI: 10.1016/0168-9002(89)90571-8.
187. *Grindhammer G., Peters S.* The Parameterized simulation of electromagnetic showers in homogeneous and sampling calorimeters // International Conference on Monte Carlo Simulation in High-Energy and Nuclear Physics - MC 93. — 02.1993. — arXiv: hep-ex/0001020.
188. Search for Light Dark Matter with NA64 at CERN / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2023. — Т. 131, № 16. — C. 161801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.161801. — arXiv: 2307.02404 [hep-ex].
189. Prospects in the search for a new light  $Z'$  boson with the NA64 $\mu$  experiment at the CERN SPS / H. Sieber [и др.] // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 5. — C. 052006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.105.052006. — arXiv: 2110.15111 [hep-ex].
190. Exploration of the Muon  $g - 2$  and Light Dark Matter explanations in NA64 with the CERN SPS high energy muon beam / Y. M. Andreev [и др.]. — 2024. — ЯНВ. — arXiv: 2401.01708 [hep-ex].
191. *Chen C.-Y., Pospelov M., Zhong Y.-M.* Muon Beam Experiments to Probe the Dark Sector // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 11. — C. 115005. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.115005. — arXiv: 1701.07437 [hep-ph].
192. *Mans J.* The LDMX Experiment // EPJ Web Conf. / под ред. М. Battaglieri [и др.]. — 2017. — Т. 142. — C. 01020. — DOI: 10.1051/epjconf/201714201020.

193. Light Dark Matter eXperiment (LDMX) / Т. Åkesson [и др.]. — 2018. — Авт. — arXiv: 1808.05219 [hep-ex].
194. Current Status and Future Prospects for the Light Dark Matter eXperiment / Т. Åkesson [и др.] // Snowmass 2021. — 03.2022. — arXiv: 2203.08192 [hep-ex].
195. A High Efficiency Photon Veto for the Light Dark Matter eXperiment / Т. Åkesson [и др.] // JHEP. — 2020. — Т. 04. — С. 003. — DOI: 10.1007/JHEP04(2020)003. — arXiv: 1912.05535 [physics.ins-det].
196. Search for Neutral Metastable Penetrating Particles Produced in the SLAC Beam Dump / J. D. Bjorken [и др.] // Phys. Rev. D. — 1988. — Т. 38. — С. 3375. — DOI: 10.1103/PhysRevD.38.3375.
197. Testing Light Dark Matter Coannihilation With Fixed-Target Experiments / E. Izaguirre [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 5. — С. 055007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.96.055007. — arXiv: 1703.06881 [hep-ph].
198. *Batell B., Essig R., Surujon Z.* Strong Constraints on Sub-GeV Dark Sectors from SLAC Beam Dump E137 // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 113, № 17. — С. 171802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.171802. — arXiv: 1406.2698 [hep-ph].
199. *Bityukov S. I., Krasnikov N. V.* The Use of statistical methods for the search for new physics at the LHC. — 2011. — ИЮЛЬ. — arXiv: 1107.3974 [physics.data-an].
200. *Bethe H., Heitler W.* On the Stopping of fast particles and on the creation of positive electrons // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1934. — Т. 146. — С. 83—112. — DOI: 10.1098/rspa.1934.0140.
201. *Carlson J. F., Oppenheimer J. R.* On Multiplicative Showers // Phys. Rev. — 1937. — Т. 51. — С. 220—231. — DOI: 10.1103/PhysRev.51.220.
202. *Landau L. D.* The Cascade Theory of Electronic Showers // Proc. Roy. Soc. Lond. A / под ред. D. ter Haar. — 1938. — Т. 166. — DOI: 10.1016/b978-0-08-010586-4.50041-9.

203. *Tsai Y.-S., Whitis V.* THICK TARGET BREMSSTRAHLUNG AND TARGET CONSIDERATION FOR SECONDARY PARTICLE PRODUCTION BY ELECTRONS // *Phys. Rev.* — 1966. — T. 149. — C. 1248—1257. — DOI: 10.1103/PhysRev.149.1248.
204. Improved exclusion limit for light dark matter from  $e^+e^-$  annihilation in NA64 / Y. M. Andreev [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2021. — T. 104, № 9. — C. L091701. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.L091701. — arXiv: 2108.04195 [hep-ex].
205. GEANT4—a simulation toolkit / S. Agostinelli [и др.] // *Nucl. Instrum. Meth. A.* — 2003. — T. 506. — C. 250—303. — DOI: 10.1016/S0168-9002(03)01368-8.