

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований
Российской академии наук

На правах рукописи

Сатунин Пётр Сергеевич

**Эффекты гипотетического нарушения
Лоренц-инвариантности в астрофизике частиц
высоких энергий**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
С. М. Сибиряков

Москва 2014

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Пертурбативные вычисления в квантовой электродинамике с нарушенной лоренц-инвариантностью	13
1.1 Введение	13
1.2 Модель и правила Фейнмана	14
1.3 Сечения взаимодействия	20
1.3.1 Распад фотона	21
1.3.2 Вакуумное черенковское излучение	25
1.3.3 Рождение пар на мягком фотоне	27
1.3.4 Рождение пар в кулоновском поле ядра	32
1.4 Обсуждение	37
Глава 2. Распад фотона в магнитном поле	40
2.1 Введение	40
2.2 Квазиклассическое описание распада фотона в магнитном поле	42
2.3 Обобщение метода на модель с нарушением лоренц-инвариантности	48
2.4 Обсуждение	52
Глава 3. Ограничения на нарушение лоренц-инвариантности из физики космических фотонов сверхвысоких энергий	54
3.1 Введение	54
3.2 Ограничения на ЛН параметры	57
3.3 Обсуждение	61
Глава 4. Заключение	63
Литература	65

Введение

Создание Эйнштейном Специальной Теории Относительности [1] внесло огромный вклад в становление современной физической картины мира. Прямым следствием основных её постулатов является инвариантность всех физических процессов относительно преобразований Лоренца. Идея лоренц-инвариантности оказалась фантастически успешной: открытые десятилетия спустя создания Специальной Теории Относительности сильное и слабое взаимодействия также оказались с хорошей точностью инвариантными относительно лоренцевой симметрии, как и известное на начало XX века электромагнитное взаимодействие. На сей день лоренц-инвариантность (далее ЛИ для краткости) является симметрией как общепринятых теорий электрослабого и сильного взаимодействий — Стандартной Модели и Квантовой Хромодинамики, так и большинства их расширений. Локальная лоренцева инвариантность является также симметрией Общей Теории Относительности как классической теории гравитации. Однако, несмотря на это, в последние десятилетия проводятся интенсивные проверки лоренцевой симметрии. Для этого есть как феноменологические, так и теоретические причины.

Согласно общему принципу науки, сформулированному Карлом Поппером в качестве критерия фальсифицируемости, ни одна научная гипотеза, даже проверенная с огромной точностью, не может быть безоговорочно признана истинной. Необходимо всегда искать пределы применимости данной теории, вне которых она не может с хорошей точностью описывать Природу. Так, общепринятая на конец XIX века симметрия физических процессов относительно преобразований Галилея оказалась применима только в случае малых по сравнению со скоростью света скоростей как наблюдаемой физической системы, так и наблюдателя. Возможно, лоренц-инвариантность также является лишь приближённой симметрией на характерных для нашего мира масштабах энергии, и при рассмотрении процессов с большими энергиями

должна быть заменена другой, более полной группой симметрии. Из примеров физики XX века можно упомянуть открытие нарушения пространственной и CP- чётностей. Каждая из них в своё время считалась точной симметрией; их нарушения, с промежутком в восемь лет, были подтверждены экспериментально.

Другим аргументом в пользу рассмотрения возможного нарушения лоренц-инвариантности (далее лоренц-нарушение, ЛН для краткости) является то, что многие подходы к построению квантовой теории гравитации подразумевают ЛН. Наиболее популярным подходом к квантованию гравитации является теория струн, в основе своей сохраняющая ЛИ. Однако, некоторые модели компактификаций в ней допускают ЛН в низкоэнергетической теории [2, 3]. Альтернативной теорией является Петлевая теория гравитации. В некоторых вариантах её построения ЛИ также нарушается [4, 5]. Ещё одним из подходов к данной проблеме является разработка некоммутативной геометрии [6, 7], в которой пространственные координаты становятся операторами, не коммутирующими друг с другом; это подразумевает ЛН. Определённые сценарии теории струн также предсказывают некоммутативную геометрию [8, 9]. Среди более экзотических моделей, нарушающих ЛИ, можно отметить пространственно-временную пену [10], аналоговую гравитацию [11].

Посмотрим на проблему квантования гравитации со стороны квантовой теории поля. В рамках этого подхода необходимо сделать расходящиеся петлевые диаграммы сходящимися. Простейшим, наивным вариантом является обрезание интегрирования по петлевым импульсам на большом энергетическом масштабе Λ_{UV} , которому соответствует фундаментальный масштаб длины Λ_{UV}^{-1} . Существование таких фундаментальных масштабов явным образом нарушает ЛИ. Однако, простейший вариант, с физическим обрезанием, кажется неестественным из-за явной зависимости низкоэнергетической физики от величины масштаба Λ_{UV} . Согласно другому варианту, петлевые диаграммы можно сделать сходящимися добавив члены с высшими производными

в лагранжиан теории. Однако, высшие производные по времени практически всегда приводят к появлению нежелательных духовых степеней свободы, поэтому естественной реализацией данной идеи становится добавление лишь пространственных производных, что также подразумевает нарушение лоренц-инвариантности. Самосогласованной реализацией данной идеи (наряду с идеей анизотропного скейлинга в ультрафиолетовом пределе) стала так называемая гравитация Хоравы-Лифшица [12–14].

Исторически первые попытки рассмотрения нарушения лоренц-инвариантности [15] сводятся к изменению дисперсионных соотношений для частиц

$$E^2 = m^2 + p^2(1 + \alpha_{(2)}) + \frac{\alpha_{(3)}}{M}p^3 + \frac{\alpha_{(4)}}{M}p^4 + \dots \quad (1)$$

Действительно, ЛИ жёстко фиксирует дисперсионное соотношение $E^2 = p^2 + m^2$ для частиц любого типа. Здесь и далее используется естественная система единиц. E обозначает энергию частицы, p — модуль её пространственного импульса. Безразмерные параметры $\alpha_{(i)}$ характеризуют отклонение от ЛИ. Массовый параметр M можно отождествить с энергетическим масштабом, на котором ЛИ существенно нарушена. Так как одновременно можно переопределить масштаб M и коэффициенты α_i , примем M равным планковскому масштабу $M = 10^{19}$ ГэВ, характеризующему энергии, на которых, как ожидается, становятся важными эффекты квантовой гравитации. Данный кинематический подход описывает лишь часть эффектов, предсказываемых ЛН, такие как появление некоторых реакций, кинематически запрещённых в ЛИ случае, и изменение порога других реакций (эти эффекты описаны далее). Для более полного описания ЛН требуется развитие соответствующего лагранжева формализма.

Одной из первых попыток ввести нарушение лоренц-инвариантности в Стандартную модель физики частиц на уровне лагранжиана стала работа Костелецкого и Колладея [16]. Авторы классифицировали все перенормиру-

емые члены размерностей три и четыре, которые можно добавить в лагранжиан Стандартной модели, не нарушая её калибровочную инвариантность относительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Модель Костелецкого и Колладея получила название Расширения Стандартной Модели (РСМ). В рамках парадигмы РСМ было проведено множество лабораторных экспериментов по ограничению параметров РСМ, описывающих нарушение ЛИ. В качестве примера можно указать интерференционные эксперименты типа Майкельсона-Морли в криогенных камерах [17, 18], изучение осцилляций нейтральных мезонов [19, 20], изучение атомных переходов [21] и многие другие. Полный перечень текущих ограничений на параметры РСМ приведён в таблицах [22]. В рамках РСМ не рассматриваются операторы размерности больше четырёх. Тем не менее, есть причины рассматривать в том числе и эти размерности.

Для описания теорий, лагранжиан которых содержит члены, нарушающие ЛИ, можно применить вильсоновский подход к перенормировкам. Рассмотрим некую “ультрафиолетовую” теорию, определённую на большом энергетическом масштабе Λ_{UV} . Отынтегрируя степени свободы с большими импульсами, получим низкоэнергетическую, “инфракрасную” теорию. В инфракрасной теории операторы размерности меньшей четырёх (релевантные) должны входить в лагранжиан с большим коэффициентом, порядка Λ_{UV}^{4-n} , где n — размерность оператора (в случае отсутствия тонкой подстройки параметров в ультрафиолетовой теории). Операторы размерности 5 и более являются иррелевантными, в низкоэнергетической эффективной теории естественно их считать подавленными той же величиной Λ_{UV}^{4-n} . Операторы размерности четыре являются маргинальными, и не могут зависеть от Λ_{UV} сильнее чем логарифмически. С точки зрения вильсоновского подхода естественно ожидать больших коэффициентов перед операторами размерности 3. Так как этого не происходит [22], можно полагать, что данные операторы запрещены какой-либо другой симметрией, например СРТ. Операторы размерности пять и более в рамках эффективной теории поля были рассмотрены Май-

ерсом и Поспеловым [23]. Эффективная теория, содержащая иррелевантные операторы, имеет смысл лишь при энергиях гораздо ниже Λ_{UV} (естественно полагать Λ_{UV} порядка Планковского масштаба, либо на несколько порядков ниже).

Большинство сценариев нарушения ЛИ подразумевают существование выделенной системы отсчёта, в качестве которой обычно рассматривается система отсчёта, связанная с реликтовым излучением (система, в которой реликтовое излучение имеет тепловой, планковский спектр). Из-за движения галактик и звёзд (и лабораторной системы отсчёта, связанной с Землёй) в этих системах отсчёта могут проявляться эффекты нарушения вращательной $SO(3)$ симметрии, даже если она является точной в выделенной системе отсчёта. Однако, из-за нерелятивистских скоростей движения Солнца этим эффектом можно пренебречь. Данный эффект позволяет нам поставить ограничения на ЛН из лабораторных экспериментов по поиску пространственной анизотропии [17, 18]. С другой стороны, при изучении ЛН в астрофизических процессах этим эффектом можно обычно пренебречь.

Особую роль в астрофизике частиц играют процессы с участием фотонов, электронов и позитронов. В стандартном ЛИ случае сечения этих процессов могут быть вычислены с высокой точностью в рамках квантовой электродинамики (КЭД). Таким образом, с теоретической точки зрения этот сектор представляет наиболее удобную арену для исследования отклонений от стандартной физики. В дальнейшем мы сконцентрируемся именно на этом секторе.

Приведём некоторые (не претендуя на полноту) возможные эффекты, которые можно использовать для поиска ЛН в физике частиц. В первую очередь, отметим изменения скоростей распространения частиц в вакууме. Этот эффект становится особенно существенным лишь для космологически больших расстояний. Далее, отметим изменения интенсивностей некоторых процессов, например синхротронного излучения в классической электродинами-

ке (см. обсуждение далее).

Также следует упомянуть процессы, которые возникают при нарушении, кроме ЛИ, СРТ-чётности: двойное лучепреломление, вращение плоскости поляризации. Их полное описание можно найти в [24]. Однако, в диссертации будем рассматривать лишь СРТ-чётную модель. В качестве причины можно указать то, что СРТ-нарушающие коэффициенты ограничены на несколько порядков сильнее, чем СРТ-чётные, но нарушающие ЛИ.

Наконец, широко обсуждаемым эффектом ЛН является изменение сечений и появление новых, ранее запрещённых реакций в физике частиц. В качестве простейших примеров можно указать распад фотона и черенковское излучение в вакууме. В ЛИ теории они запрещены законами сохранения. Дисперсионные соотношения, нарушающие ЛИ, могут сделать данные процессы кинематически разрешёнными при энергии начальной частицы выше некоей пороговой. Таким же образом ЛН может приводить к сдвигу порога в уже известных реакциях. Однако, ЛН может привести не только к пороговым эффектам. В присутствии ЛИ становится возможным, например, реакция расщепления фотона $\gamma \rightarrow 3\gamma$ [25]. Меняется также сечение рассеяния фотона на кулоновском потенциале [26]. Эти, а также другие реакции, могут быть использованы для ограничения величины ЛН.

Далее рассмотрим известные актуальные ограничения на ЛН. Исторически одними из первых появились ограничения на ЛН, основанные на изучении времени распространения фотонов от источников, находящихся на космологически больших расстояниях. В качестве источников обычно рассматриваются активные галактические ядра и гамма-всплески — яркие внегалактические объекты, излучающие фотоны в широком диапазоне энергий, вплоть до нескольких ТэВ. Нелинейные дисперсионные соотношения предсказывают распространение фотонов разных энергий с различными скоростями. Отсутствие статистически значимых дисперсионных эффектов при наблюдении вспышек от упомянутых источников позволяет поставить ограничения на

нелинейные дисперсионные соотношения для фотона. Данные ограничения являются чисто кинематическими и могут быть применены для фотонных дисперсионных соотношений произвольного вида. Для краткости приведём их лишь для коэффициента $\alpha_{(4)}$. Анализ данных по активным галактическим ядрам, проведённый в эксперименте HESS [27], позволяет поставить следующие ограничения на параметр $\alpha_{(4)}$ для фотонов: $|\alpha_{(4)}| < 3 \cdot 10^{16}$. Похожее ограничение, $|\alpha_{(4)}| < 10^{16}$, было получено также космической лабораторией FERMI на основе данных по гамма-всплескам [28].

Рассмотрим теперь основные ограничения на параметры ЛН в электронном секторе. Первое ограничение связано с ускорительной физикой. Заряженные частицы, двигаясь по замкнутой траектории в кольцевом ускорителе, излучают синхротронное излучение, причём интенсивность излучения пропорциональна гамма-фактору в четвёртой степени [29]. Из наблюдавшихся в лабораторных условиях частиц максимальным гамма-фактором обладали электроны в коллайдере LEP-II (максимальная энергия электронов составляла 110 ГэВ). Синхротронные потери на LEP известны с хорошей точностью и составляют около 3% полной энергии электрона за один оборот. ЛН изменяет скорость электронов и, следовательно, интенсивность синхротронного излучения. Однако, на LEP не было отмечено аномальных синхротронных потерь. Это позволяет поставить следующее ограничение на ЛН в электронном секторе: $|\alpha_{(2)}| < 4 \cdot 10^{-15}$ [30].

Сильное ограничение на ЛН в электронном секторе можно поставить из анализа спектра Крабовидной туманности. Это расширяющаяся оболочка от сверхновой, взорвавшейся в 1054 году. Благодаря близкому (около 2 килопарсек) расстоянию до Солнца, спектр её излучения измеряется с высокой точностью. Установлено, что он имеет характерную форму с двумя максимумами, согласующийся со следующей общепринятой моделью. Низкоэнергетический максимум спектра составляет синхротронное излучение, испущенное электронами плазмы, присутствующей в оболочке туманности. Второй пик

объясняется рассеянием фотонов синхротронного излучения на электронах плазмы (обратный эффект Комптона). Нарушение лоренц-инвариантности может сдвинуть как верхнюю границу синхротронного пика, так и параметры обратного комптоновского пика [31]. Отсутствие подобных расхождений между моделью и экспериментальными данными даёт ограничения на параметры ЛН для электронов: $|\alpha_{(4)}| < 3 \cdot 10^5$ [32].

Также в литературе широко обсуждается возможность прецизионного ограничения ЛН из физики космических лучей сверхвысоких энергий [33–39]. Она будет подробно освещена нами в третьей главе диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы.

В главе 1 рассматривается модель КЭД с операторами размерности 4 и 6, нарушающими лоренц-инвариантность. Для данной модели выведены правила Фейнмана и другие соотношения, такие как формулы суммирования по поляризациям и интегралы по фазовому пространству, необходимые для расчёта сечений взаимодействия элементарных процессов (раздел 1.2). В разделе 1.3 с помощью данных правил вычислены древесные сечения взаимодействия некоторых процессов физики частиц, представляющих интерес для астрофизики: распада фотона в вакууме, вакуумного черенковского излучения, рассеяния высокоэнергичного фотона на мягком фотоне с образованием электрон-позитронной пары, и рождения пары высокоэнергичным фотоном в кулоновом поле ядра.

В главе 2 рассматривается процесс распада фотона на электрон-позитронную пару во внешнем магнитном поле. Для этого модифицирован квазиклассический метод “инстантонов на мировых линиях”. В разделе 2.2 с помощью данного метода проведён вывод ширины указанного процесса в стандартной лоренц-инвариантной КЭД. В разделе 2.3 метод обобщён на случай нарушения ЛИ.

Глава 3 анализирует ограничения на параметры ЛН, которые могут быть получены в будущем из наблюдения широких атмосферных ливней, порождаемых фотонами сверхвысоких энергий.

Основные результаты диссертации представлены в статьях [40–45]:

1. Rubtsov G. I., Satunin P.S., Sibiryakov S.M. Calculation of cross sections in Lorentz-violating theories // Physical Review D. 2012. Vol. 86, P. 085012
2. Satunin P.S. Width of photon decay in a magnetic field: Elementary semiclassical derivation and sensitivity to Lorentz violation // // Physical Review D. 2013. Vol. 87, P. 105015
3. Rubtsov G. I., Satunin P.S., Sibiryakov S.M. Prospective constraints on Lorentz violation from UHE photon detection // arXiv:1312.4368 [astro-ph.HE], принята к печати в Phys. Rev. D.
4. Satunin P.S. Astrophysically relevant processes in Lorentz-violating QED // Phys.Part.Nucl.Lett. 10 (2013) P. 615-617
5. Satunin P.S. Probing Lorentz violation // Particle Physics at the Tercentenary of Mikhail Lomonosov: pp. 432-433.
6. Rubtsov G. I., Satunin P.S., Sibiryakov S.M. The influence of Lorentz violation on UHE photon detection // Proceedings of the 6th Meeting on CPT and Lorentz Symmetry (CPT 13), arXiv:1307.8027 [hep-ph]

Основные результаты диссертации доложены на 15й Ломоносовской конференции по физике элементарных частиц, МГУ, Москва, 18-24 августа 2011 г.; на 40-й Зимней Школе по физике ИТЭФ, 14-21 февраля 2012 г., на 41-й Зимней Школе по физике ИТЭФ, 12-19 февраля 2013 г.; на XVII Международном семинаре “Кварки-2012”, Ярославль, 4-10 июня 2012 г., на XVIII Международном семинаре “Кварки-2014”, Суздаль, 2-8 июня 2014 г.; на Международной конференции “СРТ-13”, университет Индианы, Блумингтон, Индиана,

США, 17-21 июня 2013 г, на Международных школах по субъядерной физике, Эриче, Италия (июнь 2012 и июнь 2013 г.), школе по космологии в Пассо дель Тонале, Италия (декабрь 2011 и 2012 г.); на научно-исследовательском семинаре факультета математики Высшей Школы Экономики, на научных семинарах кафедры теоретической физики Ярославского Государственного Университета и Отдела Теоретической Физики ИЯИ РАН.

Глава 1

Пертурбативные вычисления в квантовой электродинамике с нарушенной лоренц-инвариантностью

В данной главе рассматривается модель квантовой электродинамики с операторами размерности 4 и 6, нарушающими лоренц-инвариантность. Для данной модели вычисляются правила Фейнмана для расчёта древесных диаграмм. Данные правила применяются для расчёта сечений взаимодействия некоторых процессов физики частиц: вакуумных распада фотона и черенковского излучения, рассеяния высокоэнергетичного фотона на мягком фотоне с образованием электрон-позитронной пары, и рождение пары высокоэнергетичным фотоном в кулоновом поле ядра.

1.1 Введение

В последнее десятилетие различные расширения квантовой электродинамики (КЭД), содержащие в лагранжиане ЛН члены, широко рассматривались в литературе [24, 25, 34–37, 46]. Большинство этих работ концентрировалось на кинематических эффектах ЛН: появлении новых реакций, кинематически запрещённых в ЛИ, и сдвиг энергетических порогов уже известных процессов. Однако, важную роль играют также динамические следствия ЛН. Особенно они важны для реакций, не имеющих порога, таких как расщепление фотона (например, $\gamma \rightarrow 3\gamma$) [25] и расщепление нейтрино [38] (см также [47]), рождение электрон-позитронных пар фотоном в кулоновском поле ядра, распад фотона в магнитном поле. Для проведения динамического анализа необходимо развитие техники вычисления фейнмановских диаграмм в ЛН теориях с операторами высших порядков. Такие вычисления не были проведены ранее. В данной главе мы постараемся восполнить данный пробел.

Рассмотрим ещё раз способы возможного влияния ЛН на сечения вза-

имодействия. Оно сводится к трём эффектам: *(i)* изменение фазового пространства интегрирования по импульсам частиц в конечном состоянии; *(ii)* изменение волновых функций внешних состояний; *(iii)* изменения вершин и пропагаторов. Эффекты *(ii)* и *(iii)* описывают изменение матричного элемента процесса по сравнению со стандартным ЛИ случаем. Как будет в дальнейшем показано, все эти три эффекта приводят к поправкам одного порядка, поэтому мы будем учитывать их одновременно.

Отметим ещё несколько работ по данной тематике. Модификации фазового пространства и волновых функций частиц обсуждались в работе Джакбсена и соавторов [24] для КЭД с ЛН членами размерности 5. Спиновые суммы для модели, близкой к рассматриваемой в данном разделе, были получены в работе [48]. Клинкхаммер и Шрек [49] рассматривали КЭД с ЛН операторами размерности 4, и посчитали ширины вакуумного черенковского излучения и распада фотона в электрон-позитронную пару в данной теории. Необходимость учёта всех трёх эффектов *(i)* – *(iii)* была подчёркнута в работах [50, 51] для теорий с ЛН в секторе нейтрино.

1.2 Модель и правила Фейнмана

В качестве конкретной модели для проведения дальнейших вычислений рассмотрим квантовую электродинамику, в лагранжиан которой добавим ЛН операторы размерности вплоть до 6, при этом предполагая сохранение калибровочной инвариантности. Для упрощения анализа мы также налагаем несколько дополнительных требований:

- Теория должна быть инвариантной относительно вращений в трёхмерном пространстве в выделенной системе отсчёта.
- Мы предполагаем инвариантность теории относительно СРТ-преобразований¹.

¹Заметим, что СРТ-нарушающие члены ограничены сильнее в экспериментах [22].

- Кроме того, мы предполагаем сохранение P-чётности.
- Мы рассматриваем только операторы, квадратичные по полям.
- Мы рассматриваем только операторы, неэквивалентные с точностью до переопределения координат и полей.
- Согласно общей логике эффективной теории поля, операторы высших размерностей эквивалентны если они совпадают при использовании уравнений движения, полученных из низкоэнергетичной части лагранжиана. Мы рассматриваем только различные операторы в данном смысле.
- СРТ-чётные ЛН операторы размерности пять невозможно включить в Стандартную Модель из-за её киральной структуры [52]. Даже если такие операторы генерируются на масштабах ниже электрослабого M_{EW} , коэффициент перед ними будет подавлен отношением M_{EW}/M , делая их вклад во всевозможные реакции пренебрежимо малым. По этой причине мы не рассматриваем данные операторы.

Вышеуказанные условия приводят к следующему лагранжиану (сравни с [53]),

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\kappa\bar{\psi}\gamma^i D_i\psi + \frac{ig}{M^2}D_j\bar{\psi}\gamma^i D_i D_j\psi + \frac{\xi}{4M^2}F_{kj}\partial_i^2 F^{kj}, \quad (1.1)$$

где $D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi$ — стандартная ковариантная производная. Греческие индексы μ, ν, \dots принимают значения от 0 до 3 и поднимаются/опускаются с помощью метрики Минковского с сигнатурой $(+, -, -, -)$. Латинские индексы i, j, \dots являются чисто пространственными, принимая значения 1, 2, 3. Мы различаем нижние и верхние индексы: $\gamma^i = -\gamma_i$; суммирование по повторяющимся индексам подразумевается. Последние три члена в (1.1) описывают ЛН: первый из них имеет размерность 4, в то время как остальные два, будучи подавленными ЛН масштабом M , имеют размерность 6. Безразмерные параметры κ, g, ξ характеризуют величину ЛН. Один из параметров g, ξ может быть включён в определение масштаба M , но нам удобнее будет держать

их оба, так как мы фиксируем в качестве масштаба M планковскую массу (10^{19} ГэВ). С точки зрения эффективной теории, оператор размерности 4 должен быть ведущим членом. Однако, соответствующий коэффициент \varkappa очень сильно ограничен экспериментально, $|\varkappa| < 10^{-17}$ [21]; в астрофизически важных процессах эффекты операторов размерности 6 могут быть сравнимы или превышать их ².

Исследуем модель, описываемую лагранжианом (1.1). Рассмотрим для начала невзаимодействующую теорию; взаимодействие учтём позже по теории возмущений. Записав свободные уравнения движения и подставив решения в виде плоских волн для фотонов и электронов, получим модифицированные дисперсионные соотношения для каждого вида частиц:

$$E_\gamma^2 = k^2 + \frac{\xi k^4}{M^2}, \quad (1.2)$$

$$E_e^2 = m^2 + p^2 \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2} \right)^2 \approx m^2 + p^2(1 + 2\varkappa) + \frac{2gp^4}{M^2}. \quad (1.3)$$

Первая строка соответствует дисперсионному соотношению для фотонов, вторая — для электронов и позитронов. По сравнению с ЛИ теорией в дисперсионных соотношениях (1.2), (1.3) появились два типа новых членов. Во-первых, коэффициент перед квадратичным членом по импульсу для электронов отличается от той же величины для фотонов. Во-вторых, в обоих дисперсионных соотношениях появились вклады четвёртой степени по импульсам.

Далее рассмотрим суммы по поляризациям фотонов. Направив координатную ось z вдоль пространственного импульса фотона k^i , запишем два физических поляризационных вектора фотона как

$$\varepsilon_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0).$$

Проведя суммирование по поляризациям, получаем стандартную формулу

$$\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(a)} = \text{diag}(0, 1, 1, 0). \quad (1.4)$$

²К примеру, для космических лучей сверхвысоких энергий $E \sim 10^{19}$ eV и $M = 10^{16}$ GeV получаем $(E/M)^2 \sim 10^{-12} \gg \varkappa$.

Приведём сумму по поляризациям (1.4) к виду, инвариантному относительно пространственных вращений. Согласно тождествам Уорда добавление к выражению (1.4) комбинации $n_\mu k_\nu + k_\mu n_\nu$ с произвольным n_μ не влияет на матричный элемент. Подходящий выбор n_μ приводит к выражению

$$\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(a)} \simeq \text{diag}(-E_\gamma^2/k^2, 1, 1, 1). \quad (1.5)$$

Для ЛИ дисперсионного соотношения $E_\gamma = k$ (1.5) сводится к стандартному выражению $\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(a)} \simeq -\eta_{\mu\nu}$.

Далее перейдём к определению волновых функций спиноров. Раскладывая спинорное поле на компоненты положительной и отрицательной частотности

$$\psi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left(e^{-iEt+ipx} u^s(p) a_s(p) + e^{iEt-ipx} v^s(p) b_s^+(p) \right), \quad (1.6)$$

находим решения модифицированного уравнения Дирака

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - (\sigma^i p^i) \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \chi^s \\ \sqrt{E + (\sigma^i p^i) \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \chi^s \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - (\sigma^i p^i) \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \zeta^s \\ -\sqrt{E + (\sigma^i p^i) \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \zeta^s \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Здесь σ^i обозначает матрицы Паули; χ^s и ζ^s ($s = 1, 2$) являются двухкомпонентными базисными спинорами. Выбирая их ортонормированными, получаем стандартные условия нормировки

$$(u^r(p))^\dagger u^s(p) = (v^r(p))^\dagger v^s(p) = 2E \delta^{rs}, \quad (u^r(p))^\dagger v^s(-p) = 0.$$

При помощи (1.7) вычислим спиновые суммы фермионов:

$$\sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma^0 E - \gamma^i p^i \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2} \right) + m , \quad (1.9a)$$

$$\sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma^0 E - \gamma^i p^i \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2} \right) - m . \quad (1.9b)$$

Используя спиновые суммы (1.9a), (1.9b) и стандартные антикоммутиационные соотношения

$$\{a_s(p), a_r^+(q)\} = \{b_s(p), b_r^+(q)\} = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(p - q)$$

получим, что спинорные операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\{\psi(x, t), \psi^\dagger(y, t)\} = \delta(x - y) .$$

Удобно ввести обозначения

$$\tilde{p}^0 = E , \quad \tilde{p}^i = p^i \left(1 + \varkappa + \frac{gp^2}{M^2} \right) \quad (1.10)$$

которые позволят записать (1.9) в более компактной форме

$$\sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma^\mu \tilde{p}_\mu + m , \quad \sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma^\mu \tilde{p}_\mu - m .$$

Формулы (1.5), (1.9) были получены ранее [48].

Завершая рассмотрение невзаимодействующих полей в модели (1.1), найдём выражения для пропагаторов. В терминах введённого ранее обозначения \tilde{p}^μ получим, что фермионный пропагатор имеет стандартную форму:

$$\longrightarrow = \frac{i(\gamma^\mu \tilde{p}_\mu + m)}{\tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu - m^2 + i\epsilon} .$$

Для получения фотонного пропагатора³ необходимо сначала выбрать калибровку. Удобно выбрать фиксирующий калибровку член, уничтожающий

³Мы далее нигде не используем фотонный пропагатор и приводим его вывод лишь для полноты изложения

недиагональные члены в фотонном лагранжиане:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} \left(\partial_0 A_0 - \left(1 - \frac{\xi}{M^2} \Delta \right) \partial_i A_i \right) \left[1 - \frac{\xi}{M^2} \Delta \right]^{-1} \left(\partial_0 A_0 - \left(1 - \frac{\xi}{M^2} \Delta \right) \partial_i A_i \right), \quad (1.11)$$

где $\Delta \equiv \partial_i \partial_i$ есть пространственный лапласиан. В данной калибровке получим фотонный пропагатор вида:

$$\text{~~~~~} = i \left[E^2 - k^2 \left(1 + \frac{\xi k^2}{M^2} \right) + i\epsilon \right]^{-1} \text{diag} \left(- \left(1 + \frac{\xi k^2}{M^2} \right), 1, 1, 1 \right),$$

Заметим, что фиксирующий калибровку член (1.11) нелокален в пространстве. Однако в рамках теории возмущений это не вызывает проблем. В качестве альтернативы можно, фиксируя калибровку с помощью локального члена, рассматривать недиагональный пропагатор фотона.

Закончив рассмотрение свободных полей в модели (1.1), перейдём к учёту взаимодействий по теории возмущений. Вершины взаимодействия описываются малыми по электромагнитной константе связи операторами в лагранжиане (1.1). В отличие от стандартной КЭД, включающей только одну вершину взаимодействия фермиона с фотоном, в нашей модели появляются также вершины, описывающие двухфотонное и трёхфотонное взаимодействие. Это происходит из-за ковариантизации высших пространственных производных в лагранжиане (1.1). Стандартная трёхчастичная вершина взаимодействия также изменяется:

$$\mathcal{V}_{1\gamma}^\mu \equiv \text{~~~~~} = -ie\gamma^\mu - ie\delta_i^\mu \left[\not{x}\gamma^i + \frac{g}{M^2} (p_1^i(p_1 \cdot \gamma) + p_2^i(p_2 \cdot \gamma) - (p_1 \cdot p_2)\gamma^i) \right]. \quad (1.12)$$

Здесь импульсы фермионов p_1, p_2 направлены от вершины, а скалярное произведение определено следующим образом: $(p_1 \cdot \gamma) = p_1^i \gamma^i$. Пятый член в

лагранжиане (1.1) приводит к новым двух- и трёхфотонным вершинам

$$\mathcal{V}_{2\gamma}^{\mu\nu} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{ige^2}{M^2} \left[\gamma^i (p_2 - p_1)^j + \gamma^j (p_2 - p_1)^i + \delta^{ij} ((p_2 - p_1) \cdot \gamma) \right] \delta_i^\mu \delta_j^\nu, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{V}_{3\gamma}^{\mu\nu\lambda} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \\ \text{---} \end{array} = -\frac{2ige^3}{M^2} \left[\delta_i^\mu \delta_j^\nu \delta_j^\lambda + \delta_i^\nu \delta_j^\mu \delta_j^\lambda + \delta_i^\lambda \delta_j^\mu \delta_j^\nu \right] \gamma^i. \quad (1.14)$$

Здесь импульсы p_1 и p_2 снова направлены от вершины. Заметим, что взаимодействие, включающее два фотона (1.13), является антисимметричным при замене импульсов электрона и позитрона. Стоит отметить, что появление двухфотонной (1.13) и трёхфотонной вершин (1.14) наряду с изменением однофотонной диктуется калибровочной инвариантностью.

В следующем разделе мы применим полученные правила Фейнмана для вычисления вероятностей ряда процессов в физике частиц.

1.3 Сечения взаимодействия

Данный раздел посвящён описанию вероятностей некоторых астрофизически важных процессов в физике частиц в рамках модели 1.1. Описываемые нами процессы можно разбить на две группы. В первую входят простые процессы первого порядка по электромагнитной константе связи — распад фотона на электрон-позитронную пару и черенковское излучение фотона электроном в вакууме. Данные процессы достаточно широко изучены, пороговые эффекты этих реакций широко описаны в литературе [34, 35]. Однако, в модели, включающей ЛН операторы как четвёртого, так и шестого порядка вычисление ширины данных процессов ещё не проводилось. С точки зрения астрофизических приложений знание точных выражений для ширин не является

необходимым. Действительно, будучи кинематически разрешёнными, данные распады как процессы первого порядка протекают очень быстро, практически мгновенно для масштабов времени, характерных в астрофизике. Тем не менее, изучение данных простых реакций является первоначальным этапом для расчёта более сложных реакций из второй группы.

Вторая группа процессов в нашем рассмотрении включает в себя рассеяние фотона на фотоне с образованием электрон-позитронной пары, и рождение пар в кулоновском поле.

1.3.1 Распад фотона

Начнём вычисление сечений взаимодействия с рассмотрения простой реакции распада фотона в вакууме:

$$\gamma \rightarrow e^+ e^-. \quad (1.15)$$

Данный процесс кинематически запрещён в ЛИ теории. В ЛН модели кинематика меняется, и распад фотона может происходить, будучи пороговой реакцией.

Вычислим ширину распада фотона в модели (1.1) далеко за порогом. В данном режиме мы можем пренебречь массой электрона, что значительно упрощает вычисления. Матричный элемент реакции имеет вид

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{1\gamma}^\mu v(p_2) \varepsilon_\mu,$$

где выражение для вершины $\mathcal{V}_{1\gamma}^\mu$ дано в (1.12). Возведём данное выражение в квадрат, просуммировав по спинам вылетающих частиц и усреднив по поляризации фотона. В выражениях (1.5), (1.9) для спиновых сумм мы пренебрегаем фермионными массами и сохраняем только линейные по ЛН параметрам члены. Получим:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} = & 4e^2(1 + 3\kappa)(E_1E_2 - (p_1 \cdot p_2)) - \\ & - \frac{2e^2\xi}{M^2}k^2(E_1E_2 + (p_1 \cdot p_2)) + \frac{4e^2g}{M^2}(p_1 \cdot p_2)^2 + \frac{4e^2g}{M^2}E_1E_2(p_1^2 + p_2^2 - 3(p_1 \cdot p_2)) . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь p_1 и p_2 обозначают пространственный импульс электрона и позитрона, E_1 и E_2 — их энергию. Первая строчка (1.16) является стандартным матричным элементом Лоренц-инвариантной КЭД, умноженным на зависящий от κ фактор. Вторая строчка (1.16), в свою очередь, представляет собой ЛН поправку к матричному элементу, обладающему отличной структурой.

Ширина распада фотона определяется стандартной формулой

$$\Gamma = \frac{1}{2E_\gamma} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta(E_\gamma - E_1 - E_2) \delta^{(3)}(k - p_1 - p_2) \overline{|\mathcal{M}|^2} , \quad (1.17)$$

которая остаётся справедливой в присутствии ЛН (при её выводе не используется лоренц-инвариантность [54]). Направив координатную ось X вдоль импульса фотона, ось Y в плоскости разлёта электрон-позитронной пары, запишем импульсы фермионов следующим образом:

$$p_1^i = (k(1+x)/2, p_\perp, 0) , \quad p_2^i = (k(1-x)/2, -p_\perp, 0) . \quad (1.18)$$

Очевидно, что, с точностью до вращений, это наиболее общая параметризация, удовлетворяющая закону сохранения импульса. Введённый здесь параметр x характеризует разность продольных импульсов продуктов реакции. Значение $x = 0$ соответствует совпадающим импульсам электрона и позитрона. С помощью закона сохранения энергии в нулевом порядке по ЛН параметрам получим, что x лежит на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. В интересном для нас ультрарелятивистском режиме имеем $p_\perp \ll k$. С помощью (1.18) запишем выражения для энергий частиц:

$$E_\gamma = k + \frac{\xi k^3}{2M^2} , \quad E_{1,2} = \frac{k}{2}(1 + \kappa)(1 \pm x) + \frac{gk^3}{8M^2}(1 \pm x)^3 + \frac{p_\perp^2}{k(1 \pm x)} . \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.17), получим

$$\Gamma = \frac{1}{2k} \int \frac{dx dp_{\perp}^2}{8\pi k(1-x^2)} \delta\left(\omega_{LV}(x) - \frac{2p_{\perp}^2}{k(1-x^2)}\right) \overline{|\mathcal{M}|^2}, \quad (1.20)$$

Здесь мы ввели важное обозначение, которое не раз будем использовать в дальнейшем:

$$\omega_{LV}(x) = -\varkappa k + \frac{\xi k^3}{2M^2} - \frac{gk^3}{4M^2}(1+3x^2). \quad (1.21)$$

Посчитаем вклады в ширину распада от первой (лоренц-инвариантной) и второй (лоренц-неинвариантной) строк (1.16) отдельно. Для вклада ЛИ части матричного элемента имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\alpha(1+3\varkappa)}{k} \int \frac{dx dp_{\perp}^2}{k(1-x^2)} \delta\left(\omega_{LV}(x) - \frac{2p_{\perp}^2}{k(1-x^2)}\right) \times \\ &\times \left[\frac{\varkappa k^2}{2}(1-x^2) + \frac{gk^4}{8M^2}(1-x^4) + \frac{2p_{\perp}^2}{1-x^2} \right] \\ &= \alpha k \int dx \left[-\frac{\varkappa}{4}(1+x^2) + \frac{k^2}{M^2} \left(\frac{\xi}{4} - \frac{g}{16} - \frac{3gx^2}{8} - \frac{gx^4}{16} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\alpha = e^2/4\pi$ есть постоянная тонкой структуры. Данный вклад в ширину распада фотона подавлен ЛН параметрами, причём подавление связано с малостью ЛИ матричного элемента для почти коллинеарной кинематики продуктов распада.

Интегрируя вторую строчку (1.16), получаем

$$\Gamma_2 = \alpha k \int dx \frac{k^2}{M^2} \left(-\frac{\xi}{8} + \frac{\xi x^2}{8} + \frac{gx^2}{8} - \frac{gx^4}{8} \right).$$

Заметим, что этот вклад того же порядка, что и предыдущий (1.22). Собирая их вместе, получим полную ширину распада фотона

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-} = \frac{\alpha}{4} \int dx (1+x^2) \omega_{LV}(x). \quad (1.23)$$

Область интегрирования по x определяется тем, что квадрат поперечного импульса p_{\perp}^2 в аргументе δ -функции (см. формулу (1.20)), является положительным. Это приводит условию

$$\omega_{LV}(x) \geq 0.$$

В зависимости от значений ЛН параметров можно выделить несколько случаев:

- $0 \leq 2g \leq \xi_*$ и $g \leq 0$, $g/2 \leq \xi_*$, где $\xi_* = \xi - 2M^2\kappa/k^2$. В данном случае интегрирование по x проводится по всему отрезку $-1 \leq x \leq 1$. Полная ширина фотона принимает вид

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-} = \alpha k \left[-\frac{2\kappa}{3} + \frac{k^2}{M^2} \left(\frac{\xi}{3} - \frac{11g}{30} \right) \right]. \quad (1.24)$$

При $\xi = g = 0$, $\kappa < 0$ выражение для ширины фотона (1.24) совпадает с полученным Клинкхамером и Шреком[49]⁴.

- $0 < g$, $g/2 < \xi_* < 2g$. В этом случае x может принимать лишь значения на отрезке

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\xi_*}{g} - 1} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\xi_*}{g} - 1}.$$

Ширина фотона примет вид

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-} = \frac{\alpha k^3}{90\sqrt{3}M^2} \sqrt{\frac{2\xi_*}{g} - 1} \left(13\xi_* - 7g + \frac{2\xi_*^2}{g} \right). \quad (1.25)$$

Заметим, что в данном случае существуют верхняя и нижняя границы импульса, уносимого каждым из продуктов распада.

- $2g < \xi_* < g/2 < 0$. Здесь интегрирование производится по двум несвязным областям

$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\xi_*}{g} - 1}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\xi_*}{g} - 1} \leq x \leq 1$$

В данном случае электрон и позитрон не могут родиться с одинаковыми либо близкими по величине импульсами. Существование подобного асимметричного режима при ЛН было отмечено Джакобсеном [46]. В этом случае ширина фотона принимает вид:

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-} = \frac{\alpha k^3}{3M^2} \left[\left(\xi_* - \frac{11}{10}g \right) - \frac{1}{30\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\xi_*}{g} - 1} \left(13\xi_* - 7g + \frac{2\xi_*^2}{g} \right) \right]. \quad (1.26)$$

⁴В работе [49] скорость посчитана в модели, в которой электрон и позитрон имеют ЛИ дисперсионные соотношения, в то время как скорость фотона отличается от единицы. Путём переопределения пространственных координат, можно показать, что эта модель эквивалентна рассматриваемой здесь нами.

1.3.2 Вакуумное черенковское излучение

Следующий элементарный процесс, который может проходить в присутствии ЛН — это вакуумное черенковское излучение, спонтанное излучение фотона быстро движущимся электроном,

$$e^- \rightarrow \gamma e^- .$$

Это кросс-канал реакции (1.15). Как и прежде, мы рассматриваем процесс далеко за порогом, и поэтому пренебрегаем массой электрона. Таким образом, соответствующий матричный элемент получается из (1.16) заменой энергии и импульса позитрона энергией (со знаком минус) и импульсом входящего электрона,

$$E_2 \mapsto -E , \quad p_2^i \mapsto -p^i ,$$

и изменением общего знака. Это приводит к следующему выражению для матричного элемента:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} = & 4e^2(1 + 3\kappa)(EE' - (p \cdot p')) \\ & - \frac{2e^2\xi}{M^2}k^2(EE' + (p \cdot p')) - \frac{4e^2g}{M^2}(p \cdot p')^2 + \frac{4e^2g}{M^2}EE'(p^2 + p'^2 + 3(p \cdot p')) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь за E' , p'^i обозначены энергия и импульс вылетающего электрона. Введём систему координат, направив ось x вдоль направления импульса электрона. Запишем импульсы излучившего электрона и черенковского фотона в координатах:

$$p'^i = (p(1 - x), p'_\perp, 0) , \quad k^i = (px, -p'_\perp, 0) ,$$

здесь $0 \leq x \leq 1$ — доля импульса, унесённого фотоном. Ширина вакуумного черенковского излучения записывается в виде

$$\Gamma_{e^- \rightarrow \gamma e^-} = \frac{\alpha}{2p} \int \frac{dx dp_{\perp}^{\prime 2}}{px(1-x)} \delta \left(\omega'_{LV}(x) - \frac{p_{\perp}^{\prime 2}}{2px(1-x)} \right) \left[2\kappa p^2(1-x) + \frac{gp^4(1-x)(2-2x+x^2)}{M^2} + \frac{p_{\perp}^{\prime 2}}{2(1-x)} - \frac{\xi p^4}{M^2} x^2(1-x) - \frac{gp^4}{M^2} (1-x)^2 + \frac{gp^4}{M^2} (1-x)(5-5x+x^2) \right], \quad (1.28)$$

где мы снова ввели комбинацию параметров

$$\omega'_{LV}(x) = \kappa px - \frac{\xi p^3 x^3}{2M^2} + \frac{gp^3(3x-3x^2+x^3)}{M^2}.$$

Вторая строка выражения (1.28) получена из ЛИ части матричного элемента. ЛН параметры появляются в нём из-за изменений в дисперсионных соотношениях и сокращения членов главного порядка. Третья строка получается из ЛН членов в матричном элементе. Заметим, что, как и для распада фотона, необходимо учитывать вклад обеих строк в окончательный ответ. Проинтегрировав по p'_{\perp} , получим дифференциальную ширину процесса

$$\frac{d\Gamma_{e^- \rightarrow \gamma e^-}}{dx} = \alpha \left(\frac{2}{x} - 2 + x \right) \omega'_{LV}(x).$$

Для получения полной ширины необходимо проинтегрировать по значениям x , удовлетворяющих условию

$$\omega'_{LV}(x) \geq 0.$$

Область интегрирования зависит от соотношений между ЛН параметрами. Мы не будем здесь классифицировать все возможности. В простейшем случае $0 \leq \kappa$, $0 \leq g$, $\xi \leq 2g$ интеграл по всей области $0 \leq x \leq 1$ даёт

$$\Gamma_{e^- \rightarrow \gamma e^-} = \alpha p \left[\frac{4\kappa}{3} + \frac{p^2}{M^2} \left(\frac{157g}{60} - \frac{11\xi}{60} \right) \right]. \quad (1.29)$$

Полезной характеристикой черенковского излучения являются энергетические потери электрона в единицу времени

$$\frac{dE}{dt} = - \int dx px \frac{d\Gamma_{e^- \rightarrow \gamma e^-}}{dx} = -\alpha p^2 \left[\frac{7\kappa}{12} + \frac{p^2}{M^2} \left(\frac{11g}{12} - \frac{2\xi}{15} \right) \right]. \quad (1.30)$$

В случае отсутствия ЛН операторов размерности 6 $g = \xi = 0$ полученные нами выражения для ширины процесса (1.29) и энергетических потерь (1.30) сводятся к формулам, полученным в работе Клинкамера и Шрека [49].

1.3.3 Рождение пар на мягком фотоне

Начиная с данного подраздела перейдём к реакциям, включающим две частицы в начальном состоянии. Первой опишем реакцию рождения электрон-позитронной пары в столкновении высокоэнергичного фотона с мягким фотоном фонового излучения (в качестве такового может выступить, например, реликтовое микроволновое излучение).

$$\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-.$$

Данный процесс, в отличие от предыдущих, идёт и в ЛИ случае; если энергия налетающего фотона превышает некую величину $\frac{4m^2}{k_b}$, где k_b — энергия фонового фотона. Изменение порога реакции обсуждалось, например, в [35]. В данном подразделе мы исследуем изменение сечения реакции под влиянием ЛН вдали от порога.

Диаграммы, дающие вклад в требуемый матричный элемент, показаны на рис. 1.1. Заметим, что третья диаграмма с двухфотонной вершиной от-

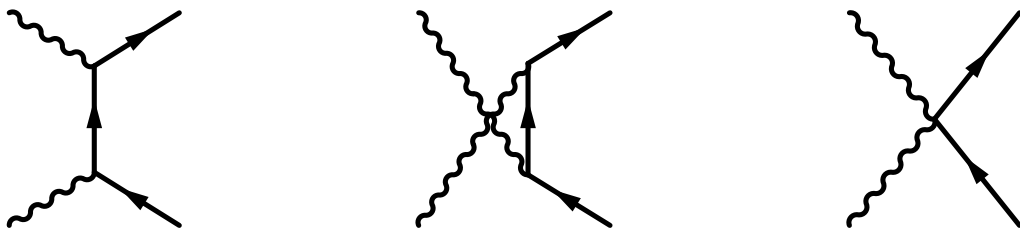


Рис. 1.1. Диаграммы, вкладывающие в матричный элемент рождения пар.

существует в ЛН случае. Обозначая вклады этих диаграмм за \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 соответственно, напишем

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{1\gamma}^\mu(p_1, p_2 - q) \frac{i(\gamma^\lambda(\tilde{q} - \tilde{p}_2)_\lambda + m)}{(\tilde{q} - \tilde{p}_2)_\rho(\tilde{q} - \tilde{p}_2)^\rho - m^2} \mathcal{V}_{1\gamma}^\nu(q - p_2, p_2) v(p_2) \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) , \quad (1.31)$$

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{1\gamma}^\mu(p_1, q - p_1) \frac{i(\gamma^\lambda(\tilde{p}_1 - \tilde{q})_\lambda + m)}{(\tilde{p}_1 - \tilde{q})_\rho(\tilde{p}_1 - \tilde{q})^\rho - m^2} \mathcal{V}_{1\gamma}^\nu(p_1 - q, p_2) v(p_2) \varepsilon_\mu(q) \varepsilon_\nu(k) , \quad (1.32)$$

$$\mathcal{M}_3 = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{2\gamma}^{\mu\nu}(p_1, p_2) v(p_2) \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) , \quad (1.33)$$

Мы рассматриваем следующую кинематическую конфигурацию:

$$k^i = (k, 0, 0) , \quad q^i = (q_x, q_y, 0) , \quad (1.34a)$$

$$p_1^i = \left(\frac{k + q_x}{2}(1 + x), \frac{q_y}{2}(1 + x) + p_y, p_z \right) ,$$

$$p_2^i = \left(\frac{k + q_x}{2}(1 - x), \frac{q_y}{2}(1 - x) - p_y, -p_z \right) . \quad (1.34b)$$

Импульс мягкого фотона q^i полагаем малым, $q_x, q_y \ll k$. Благодаря этому пренебрежём ЛН в соответствующем дисперсионном соотношении:

$$q^0 = \omega , \quad q_x = \omega \cos \theta , \quad q_y = \omega \sin \theta ,$$

здесь θ — угол между направлениями импульсов фотонов ($\theta = \pi$ соответствует лобовому столкновению).

Вычисление полного выражения для квадрата матричного элемента является очень громоздким. Вычислим матричный элемент в главном порядке по малому параметру ω/k . Для этого определим сначала порядки различных величин, появляющихся в вычислениях. Интересным для нас является случай, при котором ЛН поправки в дисперсионные соотношения (1.2), (1.3) являются величинами того же порядка, что и квадрат релятивистски инвариантной массы $s = 2k\omega(1 - \cos \theta)$. Другими словами, нужно рассматривать выражения $\varkappa k^2$, gk^4/M^2 , $\xi k^4/M^2$ как величины того же порядка, что и $k\omega$. В

стандартном ЛИ случае перпендикулярные компоненты импульсов электрона и позитрона определяются инвариантной массой,

$$p_y^2, p_z^2 \sim k\omega .$$

Предположим, что данная оценка выполняется и в присутствии ЛН, что будет проверено ниже.

Заметим, что знаменатели пропагаторов в амплитудах (1.31), (1.32) также являются величинами порядка $k\omega$,

$$(\tilde{q} - \tilde{p}_2)_\lambda (\tilde{q} - \tilde{p}_2)^\lambda - m^2 \approx -k(\omega - q_x)(1 - x) , \quad (1.35)$$

$$(\tilde{p}_1 - \tilde{q})_\lambda (\tilde{p}_1 - \tilde{q})^\lambda - m^2 \approx -k(\omega - q_x)(1 + x) , \quad (1.36)$$

При выводе (1.35), (1.36) мы использовали

$$\tilde{p}_{1\lambda} \tilde{p}_1^\lambda = \tilde{p}_{2\lambda} \tilde{p}_2^\lambda = m^2 .$$

Следовательно, для получения результата в главном по ω/k порядке вычислим числитель в выражении для $|\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}|^2$ до порядка $O((\omega/k)^2)$. В свою очередь, \mathcal{M}_3 уже подавлен первой степенью по ЛН параметрам. Таким образом, мы можем пренебречь его квадратом, а при вычислении интерференционных членов $\overline{\mathcal{M}_3 \mathcal{M}_1^*}$, $\overline{\mathcal{M}_3 \mathcal{M}_2^*}$ в матричных элементах \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 достаточно рассматривать только ЛИ часть. После громоздких, но прямых вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^4} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = & 4 \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{32p_\perp^2}{k(\omega - q_x)(1-x^2)^2} + \\ & + \frac{64p_\perp^4}{k^2(\omega - q_x)^2(1-x^2)^3} - \frac{16\omega_{LV}(x)p_\perp^2}{k(\omega - q_x)^2(1-x^2)} , \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $p_\perp^2 = p_y^2 + p_z^2$, а $\omega_{LV}(x)$ определено в (1.21). При выводе (1.37) мы пренебрегли массой электрона ⁵. Отметим большое количество сокращений между вкладками от различных диаграмм, благодаря которому исчезают члены,

⁵Учёт массы электрона понадобится в дальнейшем для обрезания логарифмических расходимостей в интеграле по фазовому пространству.

квадратичные по ЛН параметрам \varkappa , g , ξ . В частности, два интерференционных члена, содержащие \mathcal{M}_3 , сокращают друг друга. Однако это является лишь артефактом безмассового приближения: при учёте конечной массы электрона двухфотонная вершина будет давать конечный вклад.

Сечение процесса определяется формулой ⁶

$$\sigma_{\gamma\gamma\rightarrow e^+e^-} = \frac{1}{32\pi k\omega(1-\cos\theta)} \int dx \frac{dp_{\perp}^2}{k(1-x^2)} \times \quad (1.38)$$

$$\times \delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_{\perp}^2}{k(1-x^2)}\right) |\mathcal{M}|^2.$$

Подставляя $q_x = \omega \cos\theta$ и интегрируя по p_{\perp} , получим

$$\sigma_{\gamma\gamma\rightarrow e^+e^-} = \frac{\alpha^2 \pi}{2k\omega(1-\cos\theta)} \int dx \frac{1+x^2}{1-x^2} \left[1 + \left(1 + \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1-\cos\theta)} \right)^2 \right].$$

Область интегрирования по x определена условием

$$\omega(1-\cos\theta) + \omega_{LV}(x) > 0. \quad (1.39)$$

Ограничимся случаем, при котором интегрирование идёт по всему отрезку $-1 \leq x \leq 1$. В этом случае интеграл расходится логарифмически на концах отрезка. Это означает, что вся энергия системы уносится лишь одним фермионом из пары, в то время как второй не уносит никакой энергии. Очевидно, такая конфигурация возможна только для строго безмассовых фермионов, поэтому данная расходимость должна исчезнуть при учёте конечной массы электрона. Её можно учесть путём замены

$$p_{\perp}^2 \mapsto p_{\perp}^2 + m^2 \quad (1.40)$$

в аргументе дельта-функции в (1.38). Следовательно, условие (1.39) заменяется на

$$p_{\perp}^2 > 0 \implies 1 - x^2 > \frac{2m^2}{k(\omega(1-\cos\theta) + \omega_{LV})}.$$

⁶Выражение $(1 - \cos\theta)$ в знаменателе префактора получается из проекции относительной скорости сталкивающихся фотонов на ось x , $|v_{k,x} - v_{q,x}|$. Эта комбинация входит в релятивистское определение инвариантного сечения взаимодействия. Несмотря на то, что в нашем случае ЛИ отсутствует, мы продолжаем пользоваться стандартными обозначениями для сравнения с известными результатами. Заметим, что в пределе малых ЛН параметров префактор обратно пропорционален корню из инвариантной массы s , как и должно быть в ЛИ случае.

Из этого следует, что $|x|$ строго меньше единицы. Проинтегрировав по x , получим выражение для полного сечения рассеяния:

$$\sigma_{\gamma\gamma\rightarrow e^+e^-} = \frac{\alpha^2 \pi}{k\omega(1 - \cos\theta)} \left[1 + \left(1 + \frac{2\omega_{LV}}{\omega(1 - \cos\theta)} \right)^2 \right] \log \left[\frac{k(\omega(1 - \cos\theta) + \omega_{LV})}{m^2} \right], \quad (1.41)$$

где ω_{LV} взято в точке $x = 1$. Интеграл по x насыщается на концах области интегрирования, поэтому практически вся первоначальная энергия передаётся одному фермиону из пары; второй при этом практически останавливается. Формула (1.41) применима при

$$k(\omega(1 - \cos\theta) + \omega_{LV}) \gg m^2.$$

Введём параметр $r = \frac{\omega_{LV}}{\omega(1 - \cos\theta)}$, описывающий зависимость сечения (1.41) от ЛН параметров. Определяющее область интегрирования неравенство (1.39) можно записать в виде $r > -1$.

В случае больших положительных r ($r \gg 1$) сечение (1.41) степенным образом растёт. Однако, в этом случае $\omega_{LV} > 0$ и, следовательно, становится кинематически возможным распад фотона, который идёт всегда значительно быстрее рождения пар⁷. Следовательно, остаётся только случай $-1 < r < 0$. При данных r распад фотона запрещён, а рождение пар на мягком фотоне кинематически разрешено. В этом случае сечение (1.41) отличается от стандартного релятивистского выражения лишь на фактор порядка единицы.

Подводя итоги, отметим, что наибольшее влияние на сечение рождения пар фотоном на фоновом фотоне оказывают вызванные ЛН пороговые эффекты, описанные в [35]. Эффекты изменения сечения данной реакции вдали от порога не так заметны, и в главном порядке ими можно пренебречь.

⁷Строго говоря, распад фотона начинает происходить при $r > m^2/k\omega \sim 10^{-12}$. Из-за малости этой величины наше рассуждение не меняется.

1.3.4 Рождение пар в кулоновском поле ядра

В последнем разделе данной главы рассмотрим распад фотона на электрон-позитронную пару в кулоновском поле ядра,

$$\gamma Z \rightarrow Z e^+ e^- .$$

Здесь Z обозначает заряд ядра в единицах элементарного заряда. В рамках теории возмущений реакция может быть рассмотрена как взаимодействие реального фотона с виртуальным фотоном из кулоновского поля ядра. Таким образом, данный процесс описывается теми же самыми диаграммами (указанными на рис. 1.1), что и предыдущий из рассмотренных нами.

В отличие от рассмотренных ранее реакций, распад фотона в поле ядра не является пороговой реакцией. Сечение данного процесса (в стандартной ЛИ картине) было впервые посчитано Бете и Хайтлером [55]. Данный процесс важен при изучении формирования атмосферных ливней, вызванных космическими лучами сверхвысоких энергий: он является основным каналом первого взаимодействия фотонов сверхвысоких энергий в атмосфере Земли, [56]. Следовательно, изучение вызванных ЛН изменений в ширине данного процесса является важным для обнаружения фотонов в космолучах в ЛН моделях. В данном разделе мы вычислим сечение данного процесса в модели (1), а также обсудим влияние произвольного ЛН на сечение.

Так как реакция описывается теми же диаграммами, что и в предыдущем случае, мы можем использовать параметризацию (1.34) для импульсов частиц, участвующих в реакции. Вычислим квадрат матричного элемента в главном порядке по малой величине q_x/k . ЛН вклады, появляющиеся в дисперсионных соотношениях (1.2), (1.3) полагаем порядка kq_x .

Заметим несколько упрощений по сравнению с вычислением из предыдущего подраздела. Во-первых, виртуальные фотоны кулоновского поля имеют чистую времениподобную поляризацию, $\varepsilon_\mu(q) = \delta_\mu^0$, поэтому вклад третьей диаграммы на рис. 1.1 тождественно равен нулю, см. (1.13). Во-вторых,

виртуальный фотон имеет нулевую энергию, $q^0 = 0$, автоматически зануляя несколько членов, возникающих при вычислениях.

Более того, главный вклад в числитель квадрата матричного элемента является величиной порядка $O(kq_x)$ (вместо $O((kq_x)^2)$ в случае столкновения двух действительных фотонов). Это существенно для вычисления числителя в линейном приближении по ЛН параметрам.

Однако, в отличие от предыдущей задачи, компоненты q_x , q_y импульса виртуального фотона больше не являются величинами одного порядка, так как вычисление сечения включает в себя интегрирование по всем возможным значениям. Мы покажем, что

$$q_y^2 \sim kq_x \iff q_y \gg q_x. \quad (1.42)$$

Таким образом, в вычислениях мы сохраняем все члены с q_y вплоть до второй степени.

Наконец, в матричном элементе мы опять пренебрежём массой электрона, восстановив её позже для обрезания логарифмической расходимости. Условия применимости данного приближения будут обсуждены ниже. Прямые вычисления матричного элемента дают:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{2Z^2 e^6 k^2}{(q_x^2 + q_y^2)^2} \times \\ &\times \left[\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{4p_y^2 + 4p_z^2 + 4p_y q_y (1+x) + q_y^2 (1+x)^2 - k\omega_{LV}(x)(1-x^2)^2}{(2p_y q_y + q_y^2 x - kq_x(1-x))^2} + \right. \\ &+ \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{4p_y^2 + 4p_z^2 - 4p_y q_y (1-x) + q_y^2 (1-x)^2 - k\omega_{LV}(x)(1-x^2)^2}{(2p_y q_y + q_y^2 x + kq_x(1+x))^2} + \\ &\left. + 2 \frac{4p_y^2 + 4p_z^2 + 4p_y q_y x - k\omega_{LV}(x)(1-x^2)^2}{(2p_y q_y + q_y^2 x - kq_x(1-x))(2p_y q_y + q_y^2 x + kq_x(1+x))} \right]. \quad (1.43) \end{aligned}$$

Множитель

$$\frac{Z^2 e^2}{(q_x^2 + q_y^2)^2} \quad (1.44)$$

описывает плотность виртуальных фотонов в кулоновском поле. При выводе (1.43) мы просуммировали по спинам электрона и позитрона, и усреднили по

поляризациями фотона.

В случае рассеяния на фиксированном центре рассеяния сечение взаимодействия описывается формулой

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Z e^+ e^-} = \frac{1}{2k} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi) \delta(E_\gamma - E_1 - E_2) \overline{|\mathcal{M}|^2}.$$

Удобно заменить переменную интегрирования p_2^i на $q^i = (k - p_1 - p_2)^i$. Используя аксиальную симметрию задачи, проинтегрируем по направлению q^i в плоскости yz . В результате выделим общий множитель 2π ; останутся интегралы по q_x и q_y . Первый из них берётся с помощью δ -функции и соотношений

$$E_\gamma - E_1 - E_2 \approx \omega_{LV}(x) - \frac{2(p_y^2 + p_z^2)}{k(1-x^2)} - \frac{q_y^2}{2k} - q_x. \quad (1.45)$$

Заметим, что дельта-функция ограничивает область определения интеграла частью фазового пространства

$$q_x \sim |\omega_{LV}|, \quad q_y^2, p_y^2, p_z^2 \sim k|\omega_{LV}|.$$

В частности, условие (1.42) действительно выполняется. Пренебрегая импульсом q_x в кулоновском пропагаторе⁸ (1.44) и разделяя интеграл по p_1^i на продольную и поперечную части, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma Z \rightarrow Z e^+ e^-} = & \int dx dp_y dp_z dq_y \frac{2Z^2 e^6}{(2\pi)^4 q_y^3} \times \\ & \times \left[\frac{4p_z^2 + (2p_y + q_y(1+x))^2 - k\omega_{LV}(x)(1-x^2)^2}{D_1^2} \right. \\ & + \frac{4p_z^2 + (2p_y - q_y(1-x))^2 - k\omega_{LV}(x)(1-x^2)^2}{D_2^2} \\ & \left. - \frac{2(4p_y^2 + 4p_z^2 + 4p_y q_y x - k\omega_{LV}(x)(1-x^2)^2)}{D_1 D_2} \right], \end{aligned} \quad (1.46)$$

где

$$D_1 = 4p_z^2 + (2p_y + q_y(1+x))^2 - 2k\omega_{LV}(x)(1-x^2), \quad (1.47a)$$

$$D_2 = 4p_z^2 + (2p_y - q_y(1-x))^2 - 2k\omega_{LV}(x)(1-x^2). \quad (1.47b)$$

⁸Это приближение нарушается в определённой части фазового пространства, см. ниже.

Мы ограничиваемся только случаем $\omega_{LV}(x) < 0$, поэтому знаменатель (1.47) никогда не обращается в ноль. Физически это соответствует области в пространстве параметров, в которой запрещён процесс распада фотона.

Следующим шагом является интегрирование по p_y и p_z . Заметим, что вклад от каждого члена в квадратных скобках в (1.46), рассматриваемый отдельно, логарифмически расходится при $p_y, p_z \rightarrow \infty$. Однако при рассмотрении полного выражения эти расходимости сокращаются. Из (1.46) получим:

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Ze^+e^-} = \alpha^3 Z^2 \int dx \frac{1+x^2}{k|\omega_{LV}(x)|} \cdot \int \frac{dy}{y^2} \left[\frac{y+1-x^2}{\sqrt{y(y+2(1-x^2))}} \log \left[\frac{\sqrt{y+2(1-x^2)} + \sqrt{y}}{\sqrt{y+2(1-x^2)} - \sqrt{y}} \right] - 1 \right], \quad (1.48)$$

где

$$y = \frac{q_y^2}{k|\omega_{LV}(x)|}.$$

Интеграл по y логарифмически расходится при $y \rightarrow 0$. Это произошло из-за того, что мы пренебрегли q_x в кулоновском пропагаторе. Рассматривая q_x порядка $|\omega_{LV}|$, получим, что интеграл по y должен обрезаться на

$$y_0 \sim \frac{|\omega_{LV}|}{k}. \quad (1.49)$$

В выражении (1.48) вычислим интеграл по y , взяв y_0 в качестве нижнего предела интегрирования:

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Ze^+e^-} = \frac{2Z^2\alpha^3}{3} \int \frac{dx}{k|\omega_{LV}(x)|} \frac{1+x^2}{1-x^2} \left[\log \frac{1-x^2}{y_0} + \frac{13-6\log 2}{6} \right]. \quad (1.50)$$

Подынтегральное выражение в (1.48) было упрощено при помощи неравенства

$$y_0 \ll (1-x^2), \quad (1.51)$$

правильность которого будет проверена ниже. Интеграл (1.50) снова логарифмически расходится при $x \rightarrow \pm 1$. Как и в предыдущем расчёте, для обрезания этой расходимости мы должны учесть конечную массу электрона.

Это достигается путём подстановки (1.40) в аргумент дельта-функции, отвечающей за сохранение энергии. Из (1.45) видно, что массой электрона можно пренебречь только при условии

$$1 - x^2 \gg \frac{m^2}{|k\omega_{LV}(x)|}. \quad (1.52)$$

В большей части области интегрирования это удовлетворяется при

$$|k\omega_{LV}| \gg m^2. \quad (1.53)$$

Ограничивая область интегрирования в (1.50) согласно (1.52), мы получаем полное сечение рассеяния с логарифмической точностью:

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Ze^+e^-} = \frac{4Z^2\alpha^3}{3k|\omega_{LV}|} \left[\log \frac{k}{|\omega_{LV}|} - \frac{1}{2} \log \frac{k|\omega_{LV}|}{m^2} \right] \log \frac{k|\omega_{LV}|}{m^2}, \quad (1.54)$$

где под ω_{LV} подразумевается $\omega_{LV}(1)$.

Переходя к описанию реальных процессов, заметим, что атомное ядро окружено оболочкой электронов, которые экранируют кулоновское поле ядра на больших расстояниях. В этом случае q_y ограничено снизу обратным размером атома, $q_y \gtrsim 1/a$. В атомной модели среднего поля (см., например, [29]),

$$a \sim \frac{1}{\alpha Z^{1/3} m}.$$

Если импульс $1/a$ больше, чем $|\omega_{LV}|$, необходимо заменить (1.49) на

$$y_0 \sim \alpha^2 Z^{2/3} \frac{m^2}{|k\omega_{LV}|}. \quad (1.55)$$

Подставив в выражение (1.50), получим:

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Ze^+e^-} = \frac{4Z^2\alpha^3}{3k|\omega_{LV}|} \left[2 \log \frac{1}{\alpha Z^{1/3}} + \frac{1}{2} \log \frac{k|\omega_{LV}|}{m^2} \right] \log \frac{k|\omega_{LV}|}{m^2}. \quad (1.56)$$

Осталось проверить предположение (1.51). Сравнивая (1.52) с (1.49) и (1.55), получаем что малость параметра y_0 (1.51) эквивалентна условию $|\omega_{LV}| \ll m$ (в случае отсутствия экранировки), или $\alpha Z^{1/3} \ll 1$ (в случае её наличия).

Эти условия удовлетворяются для ядер всех химических элементов и феноменологически интересной области ЛН параметров.

Сравним выражения (1.54), (1.56) со стандартным результатом Бете-Хайтлера[55] для ЛИ теории:

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Ze^+e^-}^{LI} = \frac{28Z^2\alpha^3}{9m^2} \times \begin{cases} \log \frac{2k}{m} - \frac{109}{42} & \text{без экранировки} \\ \log \frac{183}{Z^{1/3}} - \frac{1}{42} & \text{с экранировкой} \end{cases}$$

Очевидно, что в режиме (1.53) сечение рождения пар в кулоновском поле ядра сильно подавлено по сравнению с ЛИ случаем.

В заключение данного раздела отметим, что электрон и позитрон рождаются в асимметричной конфигурации, с максимально различными импульсами, в отличие от стандартной КЭД, в которой распределение энергии в паре является гладким вдоль всего отрезка $-1 \leq x \leq 1$ и имеет максимум при $x = 0$. Этот максимум в распределении энергии при $x = 0$ является результатом нетривиального сокращения, и имеет место только в ЛИ модели. В случае ЛН произвольного вида интеграл по x будет насыщаться вблизи $x \approx \pm 1$, и мы снова получим асимметричную конфигурацию продуктов реакции.

О возможных ограничениях на параметры ЛН, полученных из анализа астрофизических экспериментов при помощи результатов, описанных выше, речь пойдёт в третьей главе диссертации.

1.4 Обсуждение

В первой главе была рассмотрена модель квантовой электродинамики с дополнительными членами, нарушающими Лоренц-инвариантность. Для данной модели были выведены правила Фейнмана, которые впоследствии были применены для вычисления вероятностей некоторых астрофизически важных процессов. Прямые вычисления показали, что для расчёта сечений рассеяния необходимо принимать во внимание как кинематические, так и динамические аспекты нарушения лоренц-инвариантности. Первый, кинемати-

ческий, класс эффектов сводится к изменению фазового пространства в интегралах из-за изменения в дисперсионных соотношениях частиц. Динамические эффекты, в свою очередь, сводятся к изменениям в волновых функциях частиц и вершинах взаимодействия. Стоит упомянуть, что калибровочная инвариантность определяет структуру вершин взаимодействия, поэтому модификация вершин взаимодействия неизбежна в калибровочных теориях с ЛН.

Правила Фейнмана, сформулированные в данной работе, могут быть прямо применены к вычислениям и других сечений взаимодействия в модели (1.1). Интересным процессом с астрофизической точки зрения является расщепление фотона $\gamma \rightarrow 3\gamma$, которое происходит всегда если параметр ξ в дисперсионном соотношении для фотона (1.2) положителен. Однако, технически подобное вычисление представляется весьма сложным. Действительно, диаграммы, описывающие данный процесс, содержат фермионную петлю. В случае ЛН, кроме того, необходимо учитывать диаграммы со вставкой мультифотонных вершин (1.13), (1.14). Это значительно увеличивает число топологически различных вкладов. Правильный учёт расходимостей, появляющихся в петлевых интегралах, существенно усложняет задачу.

В литературе часто используются оценки по порядку величины, основанные на формализме эффективных масс [57]. Вычисления, проведённые в данной главе, по порядку величины согласуются с данными оценками. Взглянув на дисперсионные соотношения (1.2), (1.3), можно выделить зависящие от импульса эффективные массы для фотона и электрона:

$$m_\gamma^2(k) \equiv E_\gamma^2 - k^2 = \frac{\xi k^4}{M^2},$$

$$m_e^2(p) \equiv E_e^2 - p^2 = m^2 + 2\kappa p^2 + \frac{2gp^4}{M^2}.$$

Данные эффективные массы определяют масштаб характерной передачи энергии-импульса, и могут использоваться для размерной оценки. В качестве примера рассмотрим распад фотона. Приписав фотону эффективную

массу, сделаем формальный буст в его собственную систему отсчёта⁹. Вдали от порога рождения пар имеем $m_e \ll m_\gamma$, поэтому ширина фотона в данной системе отсчёта имеет чрезвычайно простой вид (m_γ является единственным размерным параметром):

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-}^{\text{rest}} \sim \alpha m_\gamma .$$

Для получения ширины фотона в лабораторной системе, произведём обратное преобразование Лоренца. При этом преобразовании ширина фотона умножается на фактор m_γ/k . Таким образом, получаем

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-} \sim \alpha m_\gamma^2(k)/k .$$

Точные формулы (1.24)-(1.26) более сложны и нетривиально зависят от параметры ЛИ в секторе электрона. Однако с помощью простой оценки (1.4) можно получить правильный по порядку величины результат, если $m_{\gamma\text{eff}} \sim m_{\text{eff}}$

Подобным образом можно рассмотреть и реакцию рождения пар в кулоновском поле. Переданный импульс в данной реакции является величиной порядка $2m_e(k)$. Таким образом, получим оценку для сечения:

$$\sigma_{\gamma Z \rightarrow Z e^+e^-} \sim \frac{Z^2 \alpha^3}{m_e^2(k)} ,$$

где мы уже включили постоянную тонкой структуры и заряд ядра в необходимых степенях. При $m_\gamma^2 \lesssim m_e^2$ данная оценка совпадает с точными выражениями (1.54), (1.56) с точностью до логарифмических множителей.

⁹Конечно, это рассуждение применимо только при $m_\gamma^2 > 0$

Глава 2

Распад фотона в магнитном поле

В данной главе мы предложим квазиклассический метод для описания процесса распада фотона на электрон-позитронную пару в слабом магнитном поле. Метод применим как в стандартном лоренц-инвариантном случае, так и в случае отсутствия лоренц-инвариантности. Данный процесс важен для обнаружения фотонов в космических лучах сверхвысоких энергий и может быть использован для ограничения на параметры нарушения лоренц-инвариантности. Первой частью данной главы является введение, во второй описывается квазиклассическое вычисление распада фотона в магнитном поле в стандартном ЛИ случае, в третьей распад фотона в магнитном поле обобщается на случай нарушенной лоренц-инвариантности.

2.1 Введение

В отличие от процессов, рассмотренных в предыдущей главе, распад фотона в магнитном поле не описывается по теории возмущений¹. Необходимо использовать другие методы.

В лоренц-инвариантном случае вероятность распада фотона в магнитном поле была посчитана в начале 1950х годов в работах Робла и Клепикова [58, 59]. Соответствующий матричный элемент был посчитан в квазиклассическом приближении используя выражения для точных волновых функций электрона в магнитном поле в координатном представлении. В пределе слабого магнитного поля распад фотона экспоненциально подавлен:

$$\Gamma \propto \exp\left(-\frac{8m^3}{3\omega eH \sin \varphi}\right). \quad (2.1)$$

Здесь ω — энергия фотона, H — величина однородного магнитного поля, φ

¹Точнее, описание по теории возмущений возможно только если использовать точное выражение для пропагатора электрона в магнитном поле

обозначает угол между импульсом фотона и магнитным полем, e и m — соответственно, заряд и массу электрона; подразумевается, что энергия фотона велика по сравнению с массой электрона, $\omega \sin \varphi \gg m$ (но, тем не менее, $\omega e H \sin \varphi \ll m^3$).

Однако, вычисления [58, 59] технически довольно сложны, а их обобщение на случай модели с ЛН становятся и вовсе громоздкими. В данной главе мы применяем технически более простой подход, основанный на квазиклассическом методе “инстантонов на мировых линиях”. В числе прочих достоинств, данный метод имеет наглядную геометрическую интерпретацию.

Квазиклассические методы широко используются в современной квантовой теории поля для изучения непертурбативных явлений. Хорошо известным примером является распад ложного вакуума [60, 61]. Согласно квазиклассическому вычислению, вероятность распада ложного вакуума пропорциональна экспоненте (со знаком минус) от действия теории, вычисленного на отскоковом решении. Последнее представляет собой решение в мнимом (евклидовом) времени, интерполирующее между истинным и ложным вакуумами.

Похожие вычисления возникают при описании рождения частиц во внешних фоновых полях. Простейшим примером является эффект Швингера — спонтанное рождение электрон-позитронных пар во внешнем классическом электрическом поле. Вероятность рождения пар сводится к статистической сумме для некоторой квантовомеханической системы [62]. Данная функция распределения вычисляется в седловом приближении. Квазиклассическое рассмотрение процессов, похожих на швингеровский, было также обобщено на случаи электрического поля, неоднородного в пространстве либо во времени [63] и на случай распада фотона в электрическом поле в приложении к лазерной физике [64]. Мы применяем этот метод для вычисления распада фотона на электрон-позитронную пару во внешнем магнитном поле. Мы интересуемся лишь пределом относительно слабого поля, в котором применимо

квазиклассическое приближение². В интересной с точки зрения астрофизических приложений области энергии фотона порядка $10^{19.5} - 10^{20}$ эВ и магнитного поля напряжённостью ~ 0.5 Гаусс квазиклассическое приближение выполняется.

2.2 Квазиклассическое описание распада фотона в магнитном поле

Рассмотрим фотон с четырёхимпульсом $k_\mu = (\omega, \mathbf{k})$, распространяющийся в однородном магнитном поле \mathbf{H} под углом φ к его направлению. Выберем систему координат, в которой магнитное поле направлено вдоль оси x , $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$, а вектор импульса лежит в плоскости (x, y) , $\mathbf{k} = (\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi, 0)$. Распад фотона в электрон-позитронную пару кинематически разрешён при $\omega \sin \varphi > 2m$. Мы будем работать в режиме $\omega \sin \varphi \gg m$, не рассматривая пороговые эффекты.

Для нахождения скорости распада фотона мы применяем метод, похожий на использованный в [62–64] для квазиклассического анализа Швингеровского процесса. В данных работах было показано, что в главном квазиклассическом приближении ответ нечувствителен к спину электрона. Так как мы ищем результат лишь в главном квазиклассическом порядке, для простоты мы работаем со скалярной КЭД, описываемой лагранжианом³

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi^*D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \quad (2.2)$$

где ковариантная производная D_μ определена стандартным образом, $D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$.

Согласно оптической теореме, вероятность распада фотона пропорциональна мнимой части поляризационного оператора:

$$\Gamma = \frac{1}{2\omega}\epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k)\text{Im}\Pi_{\mu\nu}(k), \quad (2.3)$$

²Обзор методов, применяющихся в противоположном случае сильного магнитного поля, дан в [65].

³Мы используем сигнатуру $(+, -, -, -)$ для метрики Минковского

где $\epsilon_\mu(k)$ — вектор поляризации фотона, который мы выберем действительным. Поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}$ задан Фурье-преобразованием коррелятора двух электромагнитных токов $j_\mu = -ie(\phi^* D_\mu \phi - \phi D_\mu \phi^*)$,

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \int d^4y e^{iky} \langle j_\mu(y/2) j_\nu(-y/2) \rangle . \quad (2.4)$$

В главном порядке можно пренебречь вкладом виртуальных фотонов в коррелятор, который может быть выражен в терминах производящего функционала для заряженной скалярной частицы во внешнем электромагнитном поле,

$$\langle j_\mu(y/2) j_\nu(-y/2) \rangle = \frac{1}{Z[A_\mu]} \frac{\delta}{i\delta A_\mu(y/2)} \frac{\delta}{i\delta A_\nu(-y/2)} Z[A_\mu] , \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} Z[A_\mu] &= \int D\phi^* D\phi e^{-\int d^4x (|D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2)} = \\ &= \det(-D_\mu^2 + m^2) = \exp \text{Tr} \ln(-D_\mu^2 + m^2) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что при определении производящего функционала мы сделали виковский поворот и перешли к евклидовой сигнатуре.

На следующем шаге мы используем формулу:

$$-\ln M = \int_0^\infty \frac{dT}{T} (e^{-MT} - e^{-T}) .$$

Она приводит к выражению производящего функционала в терминах интеграла по собственному времени T .

$$Z[A_\mu] = Z_0 \exp \left[- \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \text{Tr} \left(e^{TD_\mu^2} \right) \right] . \quad (2.7)$$

Оператор $(-D_\mu^2)$ может быть проинтерпретирован как квантовомеханический гамильтониан точечной частицы в четырёхмерном пространстве. Таким образом, $\text{Tr} \left(e^{-T(-D_\mu^2)} \right)$ можно рассматривать как статистическую сумму в термальной бане с температурой, обратной собственному времени T . Далее

мы переходим к лагранжевому формализму, сделав преобразование Лежандра,

$$\mathrm{Tr} \left(e^{TD^2_\mu} \right) = \frac{1}{(2\pi T)^2 \cdot N} \int_{p.b.c.} Dx_\mu e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}_\mu^2}{4} + ie\dot{x}_\mu A_\mu \right)}.$$

Здесь мы ввели дополнительное время τ ; *p.b.c.* обозначает периодические граничные условия $x_\mu(0) = x_\mu(T)$. $N = \int_{p.b.c.} Dx_\mu e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{x}_\mu^2}{4}}$ Функция распределения приходит к виду

$$Z[A_\mu] = Z_0 \exp \left[- \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \frac{1}{(2\pi)^2 N} \int_{p.b.c.} Dx_\mu e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}_\mu^2}{4} + ie\dot{x}_\mu A_\mu \right)} \right]. \quad (2.8)$$

Вернёмся обратно к поляризационному оператору (2.4). Каждая вариационная производная по A_μ производящего функционала приводит к вставке выражения $\oint d\tau \dot{x}_\mu(\tau) \delta(x(\tau) - y)$ в функциональный интеграл. Кроме того, перемасштабируем дополнительное время τ так, чтобы оно изменялось от 0 до 1.

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(y/2) j_\nu(-y/2) \rangle &\propto \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} \frac{1}{N} \int_{p.b.c.} Dx_\mu \oint d\tau_1 \oint d\tau_2 \dot{x}_\mu(\tau_1) \dot{x}_\nu(\tau_2) \times \\ &\times \delta(x(\tau_1) - y/2) \delta(x(\tau_2) + y/2) e^{-m^2 T - \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{x}_\mu^2}{4T} + ie\dot{x}_\mu A_\mu \right)}. \end{aligned}$$

Ширина распада фотона представляется как мнимая часть поляризационного оператора в импульсном представлении. Произведя Фурье-преобразование над мнимой частью поляризационного оператора, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} \Pi_{\mu\nu}(k) &\propto \mathrm{Im} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} \frac{1}{N} \int_{p.b.c.} Dx_\mu \oint d\tau_1 \oint d\tau_2 \\ &\dot{x}_\mu(\tau_1) \dot{x}_\nu(\tau_2) \delta(x(\tau_1) + x(\tau_2)) e^{-S_m[x_\mu; \tau_1, \tau_2]}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$S_m[x_\mu; \tau_1, \tau_2] = m^2 T + \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{x}_\mu^2}{4T} + ieA_\mu \dot{x}_\mu \right) - ik_\mu (x_\mu(\tau_1) - x_\mu(\tau_2)). \quad (2.10)$$

Данное выражение имеет вид евклидова действия для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Частица взаимодействует с двумя

источниками противоположных знаков, расположенных в моменты собственного времени τ_1 и τ_2 . Сила источников определяется величиной импульса фотона. Отынтегрируя параметр T , можно получить стандартную форму для действия релятивистской частицы. Заметим, что интеграл $\oint d\tau_1 \oint d\tau_2$ можно разбить на интегралы по их сумме и разности. Интеграл по сумме отфакторизуется, остаётся интеграл по $\tau_1 - \tau_2$.

Мы вычислим правую часть уравнения (2.9) в приближении метода седловой точки. Для этого сначала мы найдём седловые уравнения для T и $x_\mu(\tau)$. Их решения описывают седловую классическую траекторию $x_\mu^{cl}(\tau)$. На следующем шаге траектория подставляется в действие (2.10). Фиксируем калибровку $A_\mu = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x_\nu$. Варьируя по x_μ , получаем (отдельно для временных и пространственных компонент x_μ),

$$\frac{\ddot{x}_0}{2T} = \omega (\delta(\tau - \tau_1) - \delta(\tau - \tau_2)), \quad (2.11)$$

$$\frac{\ddot{x}_i}{2T} - ieF_{ij}\dot{x}_j = -i\omega [\delta_{i1}\cos\varphi + \delta_{i2}\sin\varphi] (\delta(\tau - \tau_1) - \delta(\tau - \tau_2)). \quad (2.12)$$

Вариация по T приводит к седловому уравнению:

$$m^2 - \frac{\int_0^1 d\tau \dot{x}_\mu^2}{4T^2} = 0. \quad (2.13)$$

Мы ищем решения уравнений (2.11)–(2.13), которые описывают замкнутую траекторию в четырёхмерном пространстве. Решения данного типа называют “инстантонами на мировой линии”. Заметим, что в общем случае они могут быть комплексными (см. [64]). Решение существует при $|\tau_1 - \tau_2| = \frac{1}{2}$. Без потери общности мы положим $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \frac{1}{2}$. Наше решение состоит из двух дуг гиперболы (см. рис. 2.1), определённых соответственно на отрезках

$\tau \in (0, \frac{1}{2})$ и $\tau \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$\begin{aligned} \text{при } 0 < \tau < \frac{1}{2} : \quad x_0^{cl} &= \omega T \left(\tau - \frac{1}{4} \right), \\ x_1^{cl} &= -iA\eta \cos \varphi \operatorname{ch} \frac{\eta}{4} \cdot \left(\tau - \frac{1}{4} \right), \\ x_2^{cl} &= -iA \sin \varphi \operatorname{sh} \left(\eta \left(\tau - \frac{1}{4} \right) \right), \\ x_3^{cl} &= -A \sin \varphi \left[\operatorname{ch} \left(\eta \left(\tau - \frac{1}{4} \right) \right) - \operatorname{ch} \frac{\eta}{4} \right]; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{1}{2} < \tau < 1 : \quad x_0^{cl} &= -\omega T \left(\tau - \frac{3}{4} \right), \\ x_1^{cl} &= iA\eta \cos \varphi \operatorname{ch} \frac{\eta}{4} \cdot \left(\tau - \frac{3}{4} \right), \\ x_2^{cl} &= iA \sin \varphi \operatorname{sh} \left(\eta \left(\tau - \frac{3}{4} \right) \right), \\ x_3^{cl} &= A \sin \varphi \left[\operatorname{ch} \left(\eta \left(\tau - \frac{3}{4} \right) \right) - \operatorname{ch} \frac{\eta}{4} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь параметры A , η определяются из уравнений (2.11), (2.12):

$$A = \frac{\omega}{2eH \operatorname{ch} \frac{\eta}{4}}, \quad \eta = 2TeH. \quad (2.16)$$

Подставляя решение (2.14)–(2.16) в уравнение (2.13) получим ⁴:

$$T = \frac{4m}{\omega eH \sin \varphi}. \quad (2.17)$$

Следующим шагом является вычисление действия (2.10) на классическом решении. После прямых вычислений мы получаем:

$$S[x_\mu^{cl}] = \frac{8}{3} \frac{m^3}{\omega eH \sin \varphi}. \quad (2.18)$$

Квазиклассический метод применим до тех пор, пока классическое действие велико⁵, $S[x_\mu^{cl}] \gg 1$. Собирая все части вместе, получим ширину распада фотона:⁶

$$\Gamma = \frac{1}{2\omega} \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu(k) \operatorname{Im} \left(\dot{x}_\mu^{cl}(0) \dot{x}_\nu^{cl}(1/2) \mathcal{N} e^{-S[x_\mu^{cl}]} \right). \quad (2.19)$$

⁴Данная формула верна в режиме $\omega \sin \varphi \gg 2m$. Точное выражение $T = \frac{2}{eH} \operatorname{arctch} \frac{2m}{\omega \sin \varphi}$.

⁵В качестве примера, рассмотрим геомагнитное поле $H \sim 0.5 G$ и $\sin \varphi \sim 1$. В этом случае метод применим для фотонов энергией $\omega \lesssim 10^{19.5} \text{ eV}$.

⁶В общем случае нужно суммировать по всем вкладам всех классических решений, мы рассматриваем только решение, описывающее основной вклад.

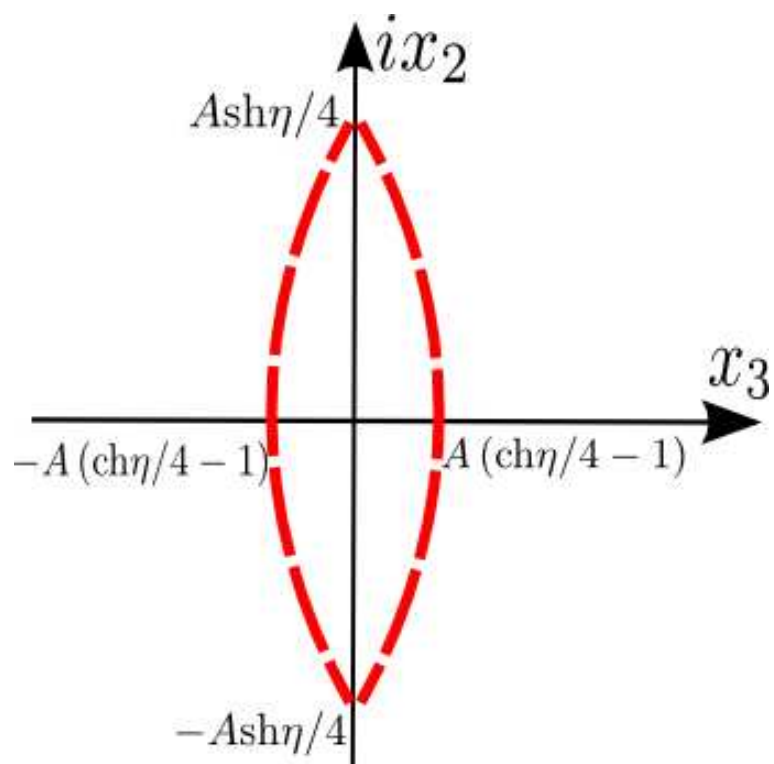


Рис. 2.1. 'Инстантон на мировой линии' — классическая траектория, описывающая рождение пар в магнитном поле в случае, когда импульс фотона перпендикулярен направлению магнитного поля, $\varphi = \pi/2$. Показана проекция траектории на плоскость (ix_2, x_3) .

Здесь \dot{x}_μ^{cl} — производная классического решения (2.14)–(2.16). Заметим, что расходимости \dot{x}_μ^{cl} в точках $\tau = 0, 1/2$, определяемые уравнениями (2.11), (2.12), пропорциональны k_μ , и поэтому исчезают, сворачиваясь с векторами поляризации. Под \mathcal{N} подразумевается предэкспоненциальный фактор, который записывается как интеграл по малым флуктуациям δx_μ около классического решения (2.14)–(2.16):

$$\mathcal{N} = \int_{p.b.c.} D\delta x_\mu e^{-\delta^2 S[x_\mu^{cl}]}.$$

Под $\delta^2 S[x_\mu^{cl}]$ мы понимаем вторую вариацию действия (2.10), квадратично зависящую от δx_μ . Флуктуации содержат одну отрицательную моду $\delta x_\mu^{-1} \propto x_\mu^{cl}$, соответствующую изменению размера инстантона. Существование отрицательной моды в функциональном интеграле приводит к появлению мнимой единицы в префакторе [61]. После взятия мнимой части в выражении (2.19) получим действительную ширину распада. В главном квазиклассическом порядке мы пренебрегаем численной зависимостью в префакторе, сразу получая из (2.19) искомое выражение (2.1).

2.3 Обобщение метода на модель с нарушением лоренц-инвариантности

Техническая простота метода, описанного в предыдущем разделе, позволяет применить его к другим, нестандартным теориям. В этом разделе опишем чувствительность ширины распада фотона в магнитном поле к отклонениям от ЛИ. В качестве конкретной теории мы берём аналог модели (1.1), в котором было произведено два изменения. Эти изменения упрощают вычисления, но не меняют результат в главном квазиклассическом приближении. Во первых, учитывая независимость процессов швингеровского типа от спинов частиц, спинорные электроны заменяем на скалярные таким образом, чтобы дисперсионные соотношения (1.2), (1.3) не изменились. Во-вторых, с

помощью переобозначений координат и полей коэффициент \varkappa переносим из электронного в фотонный сектор. Лагранжиан модели приобретает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi^*D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi + \\ & + \frac{1}{4}F_{kj} \left(-2\varkappa + \frac{\xi\partial_i^2}{M^2} \right) F^{kj} - \frac{2g}{M^2}D_i^2\phi^*D_i^2\phi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оптическая теорема основана только на унитарности, при её выводе никак не используется лоренц-инвариантность. Поэтому, при вычислении ширины распада фотона в магнитном поле мы по-прежнему можем использовать формулу (2.3). Как и прежде, мы пренебрегаем вкладами виртуальных фотонов, поэтому поляризаационный оператор $\Pi_{\mu\nu}$ снова определяется второй вариационной производной от производящего функционала $Z[A_\mu]$. Производящий функционал же, в свою очередь, изменяется по сравнению с ЛИ случаем:

$$Z[A_\mu] = Z_0 \exp \left[- \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2T} \text{Tr} e^{T(D_\mu^2 - \frac{2g}{M^2}(D_i^2)^2)} \right]. \quad (2.21)$$

Здесь снова подразумевается виковский поворот к евклидову времени. Добавочный член $-\frac{2g}{M^2}(D_i^2)^2$ во внутренней экспоненте появляется из кинетического члена с четырьмя пространственными производными в лагранжиане (2.20). Дальнейшие шаги полностью повторяют проведённые в предыдущем разделе. Рассмотрим след в выражении (2.21) в качестве квантовомеханической статистической суммы, и напишем представление в виде функционального интеграла в терминах действия для точечной частицы. Получим выражение (2.9) для мнимой части поляризаационного оператора, где вместо действия (2.10) получаем:

$$S_m = m^2T + \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{x}_\mu^2}{4T} + ieA_\mu\dot{x}_\mu + \frac{g(\dot{x}_i^2)^2}{8T^3M^2} \right) - ik_\mu(x_\mu(\tau_1) - x_\mu(\tau_2)). \quad (2.22)$$

При переходе к функциональному интегралу мы использовали приближение

$$\frac{g\dot{x}_i^2}{M^2T^2} \ll 1. \quad (2.23)$$

В дальнейшем мы убедимся, что данное условие эквивалентно малости ЛН поправок в дисперсионном соотношении по сравнению с квадратом импульса. Заметим, что это не запрещает ЛН поправки большие, чем квадрат массы электрона. В действии (2.22) имеется 2 отличия от ЛИ действия (2.10). Во-первых, в лагранжиане для точечной частицы появляется член $\frac{g(\dot{x}_i^2)^2}{8T^3M^2}$. Во-вторых, импульс k_μ начального фотона должен удовлетворять дисперсионному соотношению (1.2).

Далее вычислим интегралы по T и по x_μ в выражении (2.9) используя седловой метод. Варьируя действие (2.22) по T , получим

$$m^2 = \frac{\dot{x}_\mu^2}{4T^2} + \frac{3g(\dot{x}_i^2)^2}{8M^2T^4}. \quad (2.24)$$

Варьирование по x_μ даёт уравнения движения. Временная компонента уравнений имеет тот же вид, что и в ЛИ случае, см. (2.11). С другой стороны, пространственные компоненты уравнения меняются⁷.

$$\frac{\ddot{x}_i}{2T} \left[1 + \frac{g\dot{x}_j^2}{M^2T^2} \right] - ieF_{ij}\dot{x}_j = -ik [\delta_{i1} \cos \varphi + \delta_{i2} \sin \varphi] (\delta(\tau - \tau_1) - \delta(\tau - \tau_2)). \quad (2.25)$$

Решение уравнений (2.11), (2.25) имеет вид (2.14), (2.15), но с другими значениями параметров A и η ,

$$A = \frac{k}{2eH \operatorname{ch} \frac{\eta}{4}}, \quad \eta = 2TeH \left[1 + \frac{g\omega^2}{M^2} \right]. \quad (2.26)$$

Подставляя решение (2.14), (2.15), (2.26) в уравнение (2.24) и решая его относительно T , получим

$$T = \frac{2\sqrt{\left(\frac{2m}{\omega}\right)^2 + \frac{g\omega^2}{2M^2} - \frac{\xi\omega^2}{M^2} + 2\kappa}}{eH \sin \varphi}. \quad (2.27)$$

Заметим, что здесь нельзя пренебречь ни одним членом под знаком квадратного корня. Возвращаясь к условию (2.23), убедимся, что на классическом

⁷Заметим, что в левой части (2.25) был опущен член $\frac{g\dot{x}_i}{2T^3M^2} \frac{d\dot{x}_i^2}{d\tau}$, так как \dot{x}_j^2 является интегралом движения.

решении оно сводится к

$$\frac{g\omega^2}{M^2} \ll 1,$$

то есть к малости члена четвёртой степени по импульсу в дисперсионном соотношении для электрона по сравнению с квадратом импульса. Очевидно, это условие удовлетворяется для астрофизических фотонов любой разумной энергии ω при разрешённых параметрах g .

На следующем шаге подставим решение (2.14), (2.15), (2.26), (2.27) в действие (2.10). Получим

$$S[x_\mu^{cl}] = \frac{\omega^2}{3eH \sin \varphi} \left(\left(\frac{2m}{\omega} \right)^2 + \frac{g\omega^2}{2M^2} - \frac{\xi\omega^2}{M^2} + 2\kappa \right)^{3/2}. \quad (2.28)$$

Заметим, что из ЛН членов в выражении (2.28) можно выделить введённую в первой главе комбинацию $\omega_{LV}(x)$ (формула (1.21), в которой примем $x = 0$). Используя данные обозначения, получим выражение для ширины распада фотона:

$$\Gamma \propto \exp \left[-\frac{8m^3}{3\omega eH \sin \varphi} \left(1 - \frac{\omega \cdot \omega_{LV}(0)}{2m^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.29)$$

Формула (2.29) — основной результат данного раздела. Проанализируем его. С одной стороны, наличие даже малого отрицательного ω_{LV} ($\omega_{LV}(0) < -\frac{2m^2}{\omega}$) уменьшает ширину распада фотона в магнитном поле экспоненциально. С другой стороны, даже малое положительное $\omega_{LV}(0) \sim \frac{2m^2}{\omega}$ уменьшает абсолютное значение показателя экспоненты, и распад фотона в магнитном поле перестаёт быть экспоненциально подавленным. Очевидно, в этом случае нарушается квазиклассическое приближение, и мы более не можем оценить ширину фотона данным методом. Однако, при данном $\omega_{LV}(0)$ ширина распада фотона в магнитном поле становится не важна для любых экспериментальных приложений, так как становится кинематически разрешённым гораздо более быстрый распад фотона в вакууме.

Формула (2.29) может быть проинтерпретирована в духе рассуждений об эффективных массах (см. раздел 1.4.). Рассмотрим для простоты случай, ко-

гда ЛН есть только в электронном секторе, $\varkappa = \xi = 0$. Введём эффективную массу электрона, зависящую от импульса:

$$m_{eff}^2(p) \equiv E^2 - p^2 = m^2 + \frac{2gp^4}{M^2}. \quad (2.30)$$

В данных обозначениях формула для ширины фотона в магнитном поле принимает стандартную форму (2.1), где масса m заменена на $m_{eff}(\omega/2)$ — эффективную массу рождённого электрона (позитрона). При увеличении эффективной массы распад фотона становится более подавленным, и наоборот. Можно сделать вывод, что в главном приближении ЛН влияет на ширину процесса только кинематически.

2.4 Обсуждение

Подытожив данную главу, обсудим, как вычисление ширины распада фотона меняется в случае ЛН более общего вида. Обобщение на произвольное ЛН в фотонном секторе является элементарным: единственное изменение состоит в изменении зависимости энергии фотона от импульса в уравнениях (2.11) и (2.25). Вид уравнений остаётся неизменным, и, буквально повторяя вышеописанные вычисления, можно аналитически найти экспоненту подавления в модели с произвольным дисперсионным соотношением $\omega(k)$.

При рассмотрении дисперсионного соотношения более общего вида для электронов (и позитронов) возникают несколько большие технические сложности. Седловые уравнения (2.24) изменяются, и в общем случае не могут быть решены аналитически: все члены в данном уравнении сравнимы между собой, и мы не можем использовать разложение по малому параметру. Таким образом, для дисперсионного соотношения общего вида для электронов ширину распада фотона можно найти только численно. Однако, мы предполагаем, что и в этом случае главный эффект от ЛН должен определяться кинематикой. Для оценки экспоненты подавления можно подставить определённую согласно (2.30) эффективную массу электрона m_{eff} в стандартную

формулу (2.1).

Приложение данного вычисления к постановке ограничений из наблюдения фотонов в космических лучах сверхвысоких энергий обсуждается ниже в главе 3.

Глава 3

Ограничения на нарушение лоренц-инвариантности из физики космических фотонов сверхвысоких энергий

3.1 Введение

Одним из важных открытых вопросов астрофизики частиц является вопрос наличия фотонной компоненты в космических лучах сверхвысоких энергий (КЛСВЭ). Ответ на этот вопрос может пролить свет на вопросы происхождения и состава КЛСВЭ. Одним из последних экспериментальных достижений в данной области является наблюдение в трёх независимых экспериментах обрезания в спектре КЛСВЭ при энергиях $\sim 5 \cdot 10^{19}$ эВ [66–68]. Это наблюдение согласуется с предсказаниями, сделанными Грейзеном, и независимо Зацепиным и Кузьминым (ГЗК) [69, 70] при предположении, что основную часть КЛСВЭ на этих энергиях составляют протоны. Согласно предсказаниям ГЗК, поток протонов в космических лучах при данных энергиях уменьшается из-за рождения пионов на реликтовом излучении. Нейтральные пионы, в свою очередь, распадаются на фотоны. Таким образом, если наблюдаемое обрезание спектра космических лучей действительно является ГЗК-обрезанием, то в спектре КЛСВЭ обязаны появиться фотоны. Можно показать, что доля фотонов в космических лучах при энергиях $10^{19} \div 10^{20}$ эВ должна составлять около $10^{-4} - 10^{-2}$, в зависимости от неизвестного фонового радиоизлучения, которое, как и реликтовое излучение, влияет на распространение фотонов через межзвёздную среду [71].

Согласно другой гипотезе, основную часть космических лучей составляют ядра. В этом случае обрезание спектра может являться результатом фотодезинтеграции на реликтовом излучении и инфракрасном фоне [72]. В этом случае доля фотонов в КЛСВЭ должна быть на два порядка ниже [71, 73]. Нельзя также исключать возможности того, что данное обрезание спектра

связано с обрезанием спектра в источниках космических лучей.

Фотоны с энергиями $\sim 10^{19}$ эВ могут появиться в космических лучах и в более экзотических моделях, таких как распад сверхтяжёлой тёмной материи либо Z-взрыв [71]. Поток фотонов, предсказанный данными моделями в общем случае превышает существующие ограничения, поэтому данные модели уже не рассматриваются в качестве основных источников КЛСВЭ [74, 75]. Однако, они могут давать субдоминантный вклад.

На момент написания диссертации ни один фотон сверхвысоких энергий не был зарегистрирован. Однако, ограничение сверху на поток фотонов, полученное в текущий момент экспериментально [74–80], приближается к верхней границе предсказаний модели ГЗК. Таким образом, в ближайшем будущем можно ожидать наблюдения фотонов сверхвысоких энергий [81].

В работе Галаверни и Сигла показано [34, 36], что экспериментальное наблюдение фотонов сверхвысоких энергий согласно предсказанию ГЗК приведёт к сильным ограничениям на ЛН в КЭД. В этой работе было предположено, что КЛСВЭ являются большей частью протонами, и что все фотоны сверхвысоких энергий являются продуктами ГЗК-процесса. Были изучены пороговые эффекты в реакциях распада фотона на электрон-позитронную пару, и рождения пар фотоном на фоновом фотоне реликтового излучения. Было показано, что, в зависимости от области в ЛН пространстве параметров, поток фотонов будет либо подавлен вакуумным распадом фотона в электрон-позитронную пару либо же, наоборот, он будет усилен из-за ослабления реакции рождения пар на реликтовом излучении. Похожие аргументы были использованы ранее [82] для постановки ограничений на ЛН в КЭД из наблюдения фотонов с энергиями в диапазоне нескольких ТэВ.

В диссертации мы хотим подчеркнуть, что не только распространение фотона в межзвёздной среде, но и его взаимодействие с атмосферой и магнитным полем Земли чувствительно к ЛН. Этот эффект должен быть обязательно учтён при анализе экспериментальных следствий ЛН. Из-за этого

наблюдение нескольких фотонов энергии $10^{19} \div 10^{20}$ эВ, совместных с предсказаниями стандартной ЛИ теории, даст очень хорошие ограничения на параметры ЛН — по крайней мере на порядок величины более сильные, чем указанные в [34, 36]. Важно отметить, что данные ограничения никак не зависят от астрофизических моделей происхождения и распространения фотонов через космическое пространство. Идея использования взаимодействия с атмосферой была впервые предложена в работе [33] при рассмотрении адронов сверхвысоких энергий. На подавление первого взаимодействия фотонов в атмосфере в контексте к фотонов с энергиями порядка 10 ТэВ было указано Ванковым и Станевым [26].

Согласно общепринятой теории, фотон сверхвысоких энергий, влетающий в атмосферу Земли, порождает широкий атмосферный ливень частиц более низких энергий, которые могут быть обнаружены с помощью наземных экспериментов. Характеристики атмосферного ливня зависят от высоты, на которой произошло первое взаимодействие фотона. В свою очередь, высота взаимодействия определяется сечением первого взаимодействия. При энергиях порядка $\sim 10^{19}$ эВ основным каналом первого взаимодействия является рождение электрон-позитронной пары в электрическом поле ядра, принадлежащего атмосфере Земли — так называемый процесс Бете-Хайтлера¹ [55]. Данный процесс происходит в атмосфере, на высоте в несколько (до 10) километров. Реальное сечение рождения пар несколько подавлено по сравнению с вычислением Бете и Хайтлера из-за деструктивной интерференции на нескольких центрах рассеяния, что составляет ЛПМ эффект (Ландау, Померанчук и Мигдал). Для фотонов энергии 10^{19} эВ, взаимодействующих в нижних слоях атмосферы, сечение подавлено в два раза для симметричной конфигурации продуктов распада, и уменьшается при увеличении разности между импульсами электрона и позитрона. Как показано в главе 1, ЛН су-

¹ Другим процессом, который также может быть первой реакцией, является прямая фотоядерная реакция. Однако её сечение составляет всего 10 мб (1/50 от Бете-Хайтлеровского) при энергии фотона 10^{19} эВ [83].

щественно влияет на процесс Бете-Хайтлера, изменяя таким образом высоту первого взаимодействия.

При более высоких ($10^{19.5}$ эВ и более) энергиях фотон распадается в магнитном поле Земли, рождая электрон-позитронную пару (реакция, описанная в главе 2), на высоте порядка тысячи километров над поверхностью Земли. При этом образуется так называемый пре-ливень из сравнительно небольшого числа частиц. При вхождении в атмосферу пре-ливень развивается, образуя широкий атмосферный ливень. Ливни, вызванные пре-ливнем, обладают уникальной сигнатурой: вероятность процесса зависит от величины магнитного поля, перпендикулярного импульсу, следовательно вероятность образования пре-ливня зависит от направления прилёта фотона.

Фотонные ливни, вызванные данными процессами, потенциально могут быть зарегистрированы в наземных экспериментах [83].

3.2 Ограничения на ЛН параметры

Возможное будущее обнаружение атмосферных ливней, вызванных фотонами сверхвысоких энергий, позволит поставить строгие двусторонние ограничения на параметры нарушения лоренц-инвариантности. Из такого наблюдения будет следовать, что, с одной стороны, запрещён вакуумный распад фотона; с другой стороны, первое взаимодействие фотона в атмосфере не слишком подавлено по сравнению с ожидаемым.

В качестве консервативной оценки можем считать, что сечение первого взаимодействия отличается не более чем на порядок.² Это даёт ограничение $-10m^2/k \lesssim \omega_{LV}(x) \lesssim 2m^2/k$ (см. формулу 1.56). Пренебрегая случайными сокращениями, мы находим, что возможное наблюдение фотонов энергией

²Большая асимметрия между импульсами рождаемых в первом столкновении частиц в ЛИ случае приводит к тому, что самая энергичная из них практически не теряет энергию по сравнению с исходным фотоном, что ещё более подавляет развитие ливня.

$k \sim 10^{19}$ eV позволит нам ограничить ЛН параметры на уровне

$$|\varkappa| \lesssim 10^{-25} ; \quad |g|, |\xi| \lesssim 10^{-7} . \quad (3.1)$$

Основной целью данной главы является оценка статистически значимых ограничений на параметры ЛН в зависимости от числа зарегистрированных фотонов. Мы остановимся на рассмотрении первичного фотона энергии 10^{19} эВ, и для простоты пренебрежём ЛПМ эффектом. Глубину первого взаимодействия фотона в атмосфере назовём X_0 . Это случайная величина, удовлетворяющая экспоненциальному распределению $dP/dX_0 = \langle X_0 \rangle^{-1} \exp(-X_0/\langle X_0 \rangle)$. Среднее значение распределения определяется сечением первого взаимодействия, $\langle X_0 \rangle = t/\sigma$, где под t мы понимаем усреднённую массу атомов веществ, составляющих воздух. Для стандартного ЛИ случая она составляет $\langle X_0 \rangle \approx 50$ г/см⁻² для сечения Бете-Хайтлера, и увеличивается в ЛН случае.

Глубину первого взаимодействия фотона X_0 невозможно непосредственно измерить в эксперименте. Вместо этого обычно используется величина X_{max} — глубина атмосферы, на которой количество заряженных частиц в ливне достигает своего максимума [83]. Она сдвинута относительно X_0 на глубину развития ливня ΔX : $X_{max} = X_0 + \Delta X$. Здесь ΔX также является случайной величиной — но, в отличие от X_0 , гауссовой из-за большого числа взаимодействий, происходящих в процессе развития ливня. Среднее значение X_{max} для фотонных ливней в ЛИ теории $\langle X_{max} \rangle \simeq 1000$ г/см⁻² (это приблизительно совпадает с полной толщиной атмосферы по вертикали), а флуктуации составляют ~ 80 г/см⁻² [84]. Мы будем считать, что среднее значение и дисперсия величины ΔX остаются такими же и в ЛН теории. Действительно, передача энергии в первом взаимодействии ливня больше, чем в последующих, поэтому эффекты ЛН в них должны быть выражены слабее.³

³Строго говоря, ΔX может увеличиться в ЛН случае, но учёт этого сделает наши ограничения лишь более строгими.

Параметр X_{max} атмосферного ливня может быть измерен в флюоресцентном черенковском детекторе. Ошибка измерения X_{max} составляет в этом случае 20 г/см^2 [85]. В наземных детекторах (массивах фотоумножителей, расположенных на большой площади) X_{max} может быть измерен косвенно по свойствам фронта ливня. Ошибка измерения X_{max} составляет в этом случае 50 г/см^2 [86]. Однако, экспозиция наземных детекторов существенно превосходит экспозицию флюоресцентных. Таким образом, с большей вероятностью инициированные фотонами ливни будут обнаружены в наземных детекторах. Поэтому для консервативной оценки возьмём величину 50 г/см^2 в качестве экспериментальной ошибки измерения X_{max} .

Для постановки возможных ограничений была проведено численное моделирование X_{max} для небольшого числа N фотонных событий согласно стандартному ЛИ распределению. Затем было произведено сравнение полученных данных с распределением по X_{max} в ЛН модели используя статистический тест Колмогорова-Смирнова. Для проведения численных вычислений была написана программа на языке Си. В таблице 3.1 представлены ограничения сверху на $\langle X_{max} \rangle$ на 95% и 99% уровне достоверности для различного числа фотонных событий (2 и 4 столбцы). Соответствующие ограничения сверху на отношение сечений первого взаимодействия в стандартном и ЛН случаях показаны в третьем и пятом столбцах таблицы 3.1 соответственно. Статистическая сила ограничений составляет 0.5, то есть ограничения получены на данном уровне достоверности для более 50% симуляций, которые были повторены 1 000 раз.

Заметим, что детектирование одного фотонного события не приводит ни к каким статистически значимым ограничениям. Действительно, как бы сильно ни было подавлено первое взаимодействие, фотон взаимодействует в первых 100 г/см^2 атмосферы с условной вероятностью порядка 10% (при условии, что его первое взаимодействие произошло в атмосфере). Абсолютная вероятность взаимодействия фотона в атмосфере не может быть ограничена без

N	95% CL		99% CL	
	$\langle X_{max} \rangle, \text{ g cm}^{-2}$	$\sigma_{BH}/\sigma_{BH}^{LV}$	$\langle X_{max} \rangle, \text{ g cm}^{-2}$	$\sigma_{BH}/\sigma_{BH}^{LV}$
1	-	-	-	-
2	1 880	18.6	-	-
3	1 380	8.6	1 970	20.4
4	1 270	6.4	1 600	13.0
5	1 225	5.5	1 490	10.8

Таблица 3.1. Ограничения сверху на $\langle X_{max} \rangle$ и отношение ЛИ и ЛН сечений первого взаимодействия в случае детектирования N атмосферных ливней, инициированных фотонами 10^{19} эВ.

априорных предположений о потоке фотонов сверхвысоких энергий, которых мы хотим избежать. По этой же причине из детектирования двух фотонных событий нельзя поставить ограничение на 99% уровне достоверности: с вероятностью около 1% оба этих события произойдут в первых 100 г/см^{-2} атмосферы.

Следовательно, для постановки статистически значимых ограничений требуется по крайней мере три фотонных события. Из таблицы 3.1. мы видим, что при увеличении статистики ограничения на ЛН становятся сильнее. Пяти фотонных событий достаточно для ограничения сечения первого взаимодействия снизу на уровне десятой доли от сечения Бете-Хайтлера. Детектирование пяти фотонных событий приводит нас к ограничениям (3.1), полученным ранее без использования статистического анализа.

Вернёмся к реакции распада фотона в магнитном поле. Ширина распада была посчитана во второй главе, формула (2.29), приведём здесь ограничения на параметры ЛН, следующие из возможного наблюдения фотонных событий с характерной сигнатурой пре-ливня. Этот факт поставит ограничение на параметр $\omega_{LV}(0)$: $\omega_{LV}(0) < -2m^2/\omega$. Для фотонов энергии 10^{20} эВ численно это соответствует $\omega_{LV}(0) < -5 \cdot 10^{-9}$ эВ. Принимая во внимание также ограни-

чения, следующие из распада фотона, получим двустороннее ограничение на параметры ЛН. Пренебрегая случайными сокращениями между различными членами, входящими в (1.21), получим

$$|\varkappa| \lesssim 10^{-28}, \quad |\xi|, |g| \lesssim 10^{-11}. \quad (3.2)$$

Здесь следует отметить, что согласно уже упомянутым в данной главе статистическим доводам наблюдение единичного пре-ливня не поставит статистически значимых ограничений на ЛН, необходимо, по крайней мере, три события. Однако, численное моделирование нескольких событий с пре-ливнем представляется здесь излишним: идея метода была уже описана в данной главе, реализация не несёт в себе ничего нового.

3.3 Обсуждение

Завершая данную главу, сделаем несколько комментариев. Во-первых, в данной главе обсуждается случай фотонов с энергией $10^{19} \div 10^{20}$ эВ, которые могут образоваться в ГЗК-процессе. Однако, тот же метод без существенных изменений можно применить к атмосферным ливням, порождаемым фотонами более низких энергий. Конечно же, ограничения в этом случае получатся слабее: ограничения на \varkappa и g, ξ обратно пропорциональны второй и четвёртой степени энергии фотона соответственно. Обнаружение фотонов с энергией 10^{17} эВ может ограничить g, ξ на уровне порядка 1, что соответствует ЛН на планковском масштабе. Более того, интересные ограничения на ЛН могут быть получены в ТэВном диапазоне. Оценки по порядку величины были получены Ванковым и Станевым [26], но подробный анализ с использованием экспериментальных данных проведён на данный момент отсутствует.

Во-вторых, обсудим, что произойдёт если ЛН существует в природе на уровне, значительно превышающем (3.1). В этом случае $\langle X_{max} \rangle$ будет превышать толщину атмосферы, и стандартные фотонные ливни с энергией более 10^{19} эВ не будут обнаружены в экспериментах. Вместо этого фотонные

ливни будут напоминать ливни, вызванные нейтрино: вероятность первого взаимодействия в атмосфере почти не будет зависеть от глубины. В частности, подобно нейтрино, такие ЛН фотоны могут рождать глубоко проникающие наклонные ливни под углом, близким к 90° . Тем не менее, фотоны можно будет отличить от нейтрино по отсутствию ливней, инициированных тау-лептонами, рождаемых ν_τ в земной коре [87].

Глава 4

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации:

1. Для модели квантовой электродинамики с дополнительными членами, нарушающими лоренц-инвариантность, выведены правила Фейнмана, формулы суммирования по поляризациям и интегрирования по фазовому объёму. Впервые в рассмотрение самосогласованным образом включены нарушающие лоренцеву симметрию операторы с размерностью более четырёх.
2. Вычислены ширины процессов распада фотона на электрон-позитронную пару и вакуумного черенковского излучения, а также сечений реакций рождения высокоэнергетическим фотоном электрон-позитронной пары на мягком фотоне и в кулоновском поле ядра. Показано, что для расчёта сечений необходимо принимать во внимание как кинематические, так и динамические аспекты нарушения лоренц-инвариантности.
3. На основе подхода “инстантонов на мировой линии” разработан квазиклассический метод описания процессов рождения заряженных частиц в магнитном поле, имеющий прозрачную геометрическую интерпретацию. С помощью данного метода предложен новый вывод ширины распада фотона на электрон-позитронную пару в магнитном поле.
4. Разработанный квазиклассический метод обобщён на модель с нарушенной лоренц-инвариантностью. Показано, что ширина распада фотона в слабом магнитном поле экспоненциально чувствительна к величине нарушения лоренц-инвариантности.
5. Показано, что отклонения от лоренц-инвариантности оказывают влияние на развитие широких атмосферных ливней, индуцированных фо-

тонами в атмосфере Земли. Отмечено, что возможное наблюдение в будущем атмосферных ливней от фотонов сверхвысоких энергий, совместных с предсказаниями стандартной теории, поставит двусторонние ограничения на параметры нарушения лоренц-инвариантности в секторе квантовой электродинамики. Достоинством полученных таким образом ограничений будет их независимость от астрофизических предположений относительно происхождения и распространения фотонов.

6. С помощью численного моделирования наборов фотонных событий сделаны количественные предсказания относительно ожидаемых ограничений. Показано, что их точность на несколько порядков превышает точность ограничений, существующих в настоящее время.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность Сергею Сибирякову и Григорию Рубцову за внимание к работе, постоянную поддержку и критические замечания, а также всему коллективу отдела теоретической физики ИЯИ РАН за уникальную рабочую атмосферу. Хочется выразить отдельную благодарность Сергею Сибирякову и Анастасии Прохоровой за стилистические правки текста диссертации.

Литература

1. A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies // -Annalen Phys. -1905. -17. -p.891–921.
2. V. A. Kostelecky, S. Samuel. Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory // -Phys.Rev. -1989. -D39. -p.683.
3. V. A. Kostelecky, R. Potting. CPT and strings // -Nucl.Phys. -1991. -B359. -p.545–570.
4. R. Gambini, J. Pullin. Nonstandard optics from quantum space-time // -Phys.Rev. -1999. -D59. -p.124021.
5. J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl, L. F. Urrutia. Loop quantum gravity and light propagation // -Phys.Rev. -2002. -D65. -p.103509.
6. S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, T. Okamoto. Noncommutative field theory and Lorentz violation // -Phys.Rev.Lett. -2001. -87. -p.141601.
7. A. Anisimov, T. Banks, M. Dine, M. Graesser. Comments on noncommutative phenomenology // -Phys.Rev. -2002. -D65. -p.085032.
8. M. R. Douglas, C. M. Hull. D-branes and the noncommutative torus // -JHEP. -1998. -9802. -p.008.
9. M. R. Douglas, N. A. Nekrasov. Noncommutative field theory // -Rev.Mod.Phys. -2001. -73. -p.977–1029.
10. G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. Mavromatos, D. V. Nanopoulos. Distance measurement and wave dispersion in a Liouville string approach to quantum gravity // -Int.J.Mod.Phys. -1997. -A12. -p.607–624.
11. S. Fagnocchi, S. Finazzi, S. Liberati, M. Kormos, A. Trombettoni. Relativistic Bose-Einstein Condensates: a New System for Analogue Models of Gravity // -New J.Phys. -2010. -12. -p.095012.
12. P. Horava. Quantum Gravity at a Lifshitz Point // -Phys.Rev. -2009. -D79. -p.084008.

13. D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov. Consistent Extension of Horava Gravity // -Phys.Rev.Lett. -2010. -104. -p.181302.
14. D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov. Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy // -JHEP. -2011. -1104. -p.018.
15. T. Pavlopoulos. Breakdown of Lorentz invariance // -Phys.Rev. -1967. -159. -p.1106–1110.
16. D. Colladay, V. A. Kostelecky. Lorentz violating extension of the standard model // -Phys.Rev. -1998. -D58. -p.116002.
17. S. Herrmann, A. Senger, K. Mohle, M. Nagel, E. Kovalchuk et al. Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level // -Phys.Rev. -2009. -D80. -p.105011.
18. C. Eisele, A. Y. Nevsky, S. Schiller. Laboratory Test of the Isotropy of Light Propagation at the 10^{-17} Level // -Phys.Rev.Lett. -2009. -103. -p.090401.
19. J. Link, M. Reyes, P. Yager, J. Anjos, I. Bediaga et al. Charm system tests of CPT and Lorentz invariance with FOCUS // -Phys.Lett. -2003. -B556. -p.7–13.
20. B. Aubert et al. Search for T, CP and CPT violation in B^0 anti- B^0 mMixing with inclusive dilepton events // -Phys.Rev.Lett. -2006. -96. -p.251802.
21. M. Hohensee, N. Leeper, D. Budker, C. Harabati, V. Dzuba et al. Limits on Violations of Lorentz Symmetry and the Einstein Equivalence Principle using Radio-Frequency Spectroscopy of Atomic Dysprosium // -Phys.Rev.Lett. -2013. -111. -p.050401.
22. V. A. Kostelecky, N. Russell. Data Tables for Lorentz and CPT Violation // -Rev.Mod.Phys. -2011. -83. -p.11–31.
23. R. C. Myers, M. Pospelov. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory // -Phys.Rev.Lett. -2003. -90. -p.211601.
24. T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly. Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena and astrophysical constraints // -Annals Phys. -2006. -321. -p.150–196.

25. G. Gelmini, S. Nussinov, C. E. Yaguna. On photon splitting in theories with Lorentz invariance violation // -JCAP. -2005. -0506. -p.012.
26. H. Vankov, T. Stanev. Lorentz invariance violation and the QED formation length // -Phys.Lett. -2002. -B538. -p.251–256.
27. A. Abramowski et al. Search for Lorentz Invariance breaking with a likelihood fit of the PKS 2155-304 Flare Data Taken on MJD 53944 // -Astropart.Phys. -2011. -34. -p.738–747.
28. V. Vasileiou, A. Jacholkowska, F. Piron, J. Bolmont, C. Couturier et al. Constraints on Lorentz Invariance Violation from Fermi-Large Area Telescope Observations of Gamma-Ray Bursts // -Phys.Rev. -2013. -D87. (12) -p.122001.
29. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики. Часть 3: Квантовая механика. -Физматлит, Москва, 2001.
30. B. Altschul. Bounding Isotropic Lorentz Violation Using Synchrotron Losses at LEP // -Phys.Rev. -2009. -D80. -p.091901.
31. B. Altschul. Synchrotron and inverse compton constraints on Lorentz violations for electrons // -Phys.Rev. -2006. -D74. -p.083003.
32. S. Liberati, L. Maccione, T. P. Sotiriou. Scale hierarchy in Horava-Lifshitz gravity: a strong constraint from synchrotron radiation in the Crab nebula // -Phys.Rev.Lett. -2012. -109. -p.151602.
33. E. Antonov, L. Dedenko, A. Kirillov, T. Roganova, G. Fedorova et al. Test of Lorentz invariance through observation of the longitudinal development of ultrahigh-energy extensive air showers // -JETP Lett. -2001. -73. -p.446–450.
34. M. Galaverni, G. Sigl. Lorentz Violation in the Photon Sector and Ultra-High Energy Cosmic Rays // -Phys.Rev.Lett. -2008. -100. -p.021102.
35. M. Galaverni, G. Sigl. Lorentz Violation and Ultrahigh-Energy Photons // -Phys.Rev. -2008. -D78. -p.063003.

36. L. Maccione, S. Liberati. GZK photon constraints on Planck scale Lorentz violation in QED // -JCAP. -2008. -0808. -p.027.
37. L. Maccione, A. M. Taylor, D. M. Mattingly, S. Liberati. Planck-scale Lorentz violation constrained by Ultra-High-Energy Cosmic Rays // -JCAP. -2009. -0904. -p.022.
38. D. M. Mattingly, L. Maccione, M. Galaverni, S. Liberati, G. Sigl. Possible cosmogenic neutrino constraints on Planck-scale Lorentz violation // -JCAP. -2010. -1002. -p.007.
39. A. Saveliev, L. Maccione, G. Sigl. Lorentz Invariance Violation and Chemical Composition of Ultra High Energy Cosmic Rays // -JCAP. -2011. -1103. -p.046.
40. G. Rubtsov, P. Satunin, S. Sibiryakov. On calculation of cross sections in Lorentz violating theories // -Phys.Rev. -2012. -D86. -p.085012.
41. P. Satunin. Width of photon decay in a magnetic field: Elementary semiclassical derivation and sensitivity to Lorentz violation // -Phys.Rev. -2013. -D87. (10) -p.105015.
42. G. Rubtsov, P. Satunin, S. Sibiryakov. Prospective constraints on Lorentz violation from UHE photon detection // -arXiv:1312.4368[astro-ph.HE].
43. P. Satunin. Astrophysically relevant processes in Lorentz-violating QED // -Phys.Part.Nucl.Lett. -2013. -10. (7) -p.615–617.
44. P. Satunin. Probing Lorentz violation.
45. G. Rubtsov, P. Satunin, S. Sibiryakov. The influence of Lorentz violation on UHE photon detection // -1307.8027.
46. D. Mattingly, T. Jacobson, S. Liberati. Threshold configurations in the presence of Lorentz violating dispersion relations // -Phys.Rev. -2003. -D67. -p.124012.
47. L. Maccione, S. Liberati, D. M. Mattingly. Violations of Lorentz invariance in the neutrino sector after OPERA // -JCAP. -2013. -1303. -p.039.

48. D. Anselmi, M. Taiuti. Vacuum Cherenkov Radiation In Quantum Electrodynamics With High-Energy Lorentz Violation // -Phys.Rev. -2011. -D83. -p.056010.
49. F. Klinkhamer, M. Schreck. New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified-Maxwell theory // -Phys.Rev. -2008. -D78. -p.085026.
50. F. Bezrukov, H. M. Lee. Model dependence of the bremsstrahlung effects from the superluminal neutrino at OPERA // -Phys.Rev. -2012. -D85. -p.031901.
51. J. Carmona, J. Cortes, D. Mazon. Uncertainties in Constraints from Pair Production on Superluminal Neutrinos // -Phys.Rev. -2012. -D85. -p.113001.
52. P. A. Bolokhov, M. Pospelov. Classification of dimension 5 Lorentz violating interactions in the standard model // -Phys.Rev. -2008. -D77. -p.025022.
53. D. Mattingly. Have we tested Lorentz invariance enough? // -0802.1561.
54. M. E. Peskin, D. V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. -Westview Press, 1995.
55. H. Bethe, W. Heitler. On the Stopping of fast particles and on the creation of positive electrons // -Proc.Roy.Soc.Lond. -1934. -A146. -p.83–112.
56. M. Risse, P. Homola. Search for ultrahigh energy photons using air showers // -Mod.Phys.Lett. -2007. -A22. -p.749–766.
57. S. R. Coleman, S. L. Glashow. High-energy tests of Lorentz invariance // -Phys.Rev. -1999. -D59. -p.116008.
58. H. Robl // -Acta Phys. Austriaca. -1952. -6. -p.105.
59. Н.П. Клепиков. Излучение фотонов и электронно-позитронных пар в магнитном поле // -ЖЭТФ. -1954. -26. --34.
60. I. Y. Kobzarev, L. Okun, M. Voloshin. Bubbles in Metastable Vacuum // -Sov.J.Nucl.Phys. -1975. -20. -p.644–646.
61. S. R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory // -Phys.Rev. -1977. -D15. -p.2929–2936.

62. I. K. Affleck, O. Alvarez, N. S. Manton. Pair Production at Strong Coupling in Weak External Fields // -Nucl.Phys. -1982. -B197. -p.509.
63. G. V. Dunne, C. Schubert. Worldline instantons and pair production in inhomogeneous fields // -Phys.Rev. -2005. -D72. -p.105004.
64. A. Monin, M. Voloshin. Semiclassical Calculation of Photon-Stimulated Schwinger Pair Creation // -Phys.Rev. -2010. -D81. -p.085014.
65. A. Kuznetsov, N. Mikheev. Electroweak processes in external electromagnetic fields // -Springer Tracts Mod.Phys. -2004. -197. -p.1–120.
66. R. Abbasi et al. First observation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin suppression // -Phys.Rev.Lett. -2008. -100. -p.101101.
67. J. Abraham et al. Observation of the suppression of the flux of cosmic rays above 4×10^{19} eV // -Phys.Rev.Lett. -2008. -101. -p.061101.
68. T. Abu-Zayyad, R. Aida, M. Allen, R. Anderson, R. Azuma et al. The Cosmic Ray Energy Spectrum Observed with the Surface Detector of the Telescope Array Experiment // -Astrophys.J. -2013. -768. -p.L1.
69. K. Greisen. End to the cosmic ray spectrum? // -Phys.Rev.Lett. -1966. -16. -p.748–750.
70. G. Zatsepin, V. Kuzmin. Upper limit of the spectrum of cosmic rays // -JETP Lett. -1966. -4. -p.78–80.
71. G. Gelmini, O. E. Kalashev, D. V. Semikoz. GZK photons as ultra high energy cosmic rays // -J.Exp.Theor.Phys. -2008. -106. -p.1061–1082.
72. J. Puget, F. Stecker, J. Bredekamp. Photonuclear Interactions of Ultrahigh-Energy Cosmic Rays and their Astrophysical Consequences // -Astrophys.J. -1976. -205. -p.638–654.
73. D. Hooper, A. M. Taylor, S. Sarkar. Cosmogenic photons as a test of ultra-high energy cosmic ray composition // -Astropart.Phys. -2011. -34. -p.340–343.
74. G. Rubtsov, L. Dedenko, G. Fedorova, E. Y. Fedunin, A. Glushkov et al. Upper limit on the ultrahigh-energy photon flux from agasa and yakutsk data // -Phys.Rev. -2006. -D73. -p.063009.

75. P. Abreu et al. The Pierre Auger Observatory III: Other Astrophysical Observations // -1107.4805.
76. M. Risse, P. Homola, R. Engel, D. Gora, D. Heck et al. Upper limit on the photon fraction in highest-energy cosmic rays from AGASA data // -Phys.Rev.Lett. -2005. -95. -p.171102.
77. A. Glushkov, D. Gorbunov, I. Makarov, M. Pravdin, G. Rubtsov et al. Constraining the fraction of primary gamma rays at ultra-high energies from the muon data of the Yakutsk extensive-air-shower array // -JETP Lett. -2007. -85. -p.131–135.
78. A. Glushkov, I. Makarov, M. Pravdin, I. Sleptsov, D. Gorbunov et al. Constraints on the flux of primary cosmic-ray photons at energies 10^{18} eV from Yakutsk muon data // -Phys.Rev. -2010. -D82. -p.041101.
79. J. Abraham et al. Upper limit on the cosmic-ray photon flux above 10^{19} eV using the surface detector of the Pierre Auger Observatory // -Astropart.Phys. -2008. -29. -p.243–256.
80. T. Abu-Zayyad et al. Upper limit on the flux of photons with energies above 10^{18} eV using the Telescope Array surface detector // -Phys.Rev. -2013. -D88. (11) -p.112005.
81. J. Alvarez-Muniz, M. Risse, G. Rubtsov, B. Stokes. Review of the Multimessenger Working Group at UHECR-2012 // -EPJ Web Conf. -2013. -53. -p.01009.
82. F. Stecker, S. L. Glashow. New tests of Lorentz invariance following from observations of the highest energy cosmic gamma-rays // -Astropart.Phys. -2001. -16. -p.97–99.
83. M. Risse, P. Homola. Search for ultrahigh energy photons using air showers // -Mod.Phys.Lett. -2007. -A22. -p.749–766.
84. J. Abraham et al. An upper limit to the photon fraction in cosmic rays above 10^{19} -eV from the Pierre Auger Observatory // -Astropart.Phys. -2007. -27. -p.155–168.

85. P. Abreu et al. The Pierre Auger Observatory II: Studies of Cosmic Ray Composition and Hadronic Interaction models // -1107.4804.
86. H. Tokuno, Y. Tameda, M. Takeda, K. Kadota, D. Ikeda et al. New air fluorescence detectors employed in the Telescope Array experiment // - Nucl.Instrum.Meth. -2012. -A676. -p.54–65.
87. J. Abraham et al. Limit on the diffuse flux of ultra-high energy tau neutrinos with the surface detector of the Pierre Auger Observatory // -Phys.Rev. - 2009. -D79. -p.102001.