

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Рамазанов Сабир Рамазанович

**Начальные этапы развития Вселенной: статистические
свойства первичных возмущений**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
В. А. Рубаков

Москва 2014

Содержание

1	Введение	3
2	Модель конформного скатывания с промежуточной стадией	17
2.1	Эволюция возмущений фазы в конформную эпоху	17
2.1.1	Возмущения радиальной части конформного поля ϕ	22
2.1.2	Поправки к фазовым возмущениям	25
2.2	Особенности эволюции на промежуточной стадии	27
2.3	Масштаб нарушения конформной инвариантности в модели с промежуточной стадией	31
2.4	Эволюция возмущений фазы на промежуточной стадии	32
2.4.1	Случай $\mathbf{v} = \text{const}$	32
2.4.2	Общая формула и вычисление методом перевала	34
3	Феноменологические следствия модели с промежуточной стадией	38
3.1	Статистическая анизотропия в модели с промежуточной стадией	38
3.1.1	Сравнение с моделью конформного скатывания без промежуточной стадии	41
3.1.2	Сравнение с моделями анизотропной инфляции	43
3.2	Негауссовость	47
3.3	Наклон спектра скалярных возмущений	50
3.4	3-точечная функция	53
3.4.1	Предварительные замечания	53
3.4.2	Вычисление методом перевала	58
3.4.3	В коллинеарном пределе	62
3.4.4	Оценки и наблюдательные следствия	63
4	Экспериментальный поиск статистической анизотропии в космическом микроволновом фоне	70

4.1	Статистическая анизотропия и модели ранней Вселенной	72
4.2	Эстиматоры статистической анизотропии	75
4.2.1	Модельно-независимый анали	75
4.2.2	Случай статистической анизотропии специального квадрупольно- го вида	79
4.2.3	Случай статистической анизотропии, характеризуемой случайны- ми величинами q_{2M}	80
4.3	Анализ данных	82
4.3.1	Ограничения на модели конформного скатывания	85
4.3.2	Ограничения на анизотропные модели инфляции	90
5	Аномалии микроволнового фона на больших угловых масштабах	94
5.1	Фоновое излучение как источник аномалий реликтового микроволнового фона	94
5.2	Модели пояса Койпера	96
5.3	Влияние пояса Койпера на реликтовый фон	99
5.4	Восстановление чётность-симметрии в присутствии пояса Койпера	101
5.5	Два частных случая дипольной модуляции	102
5.6	Де-корреляция карты ИС и пояса Койпера. Результаты.	106
6	Заключение	110

1 Введение

Современная Вселенная является однородной и изотропной на огромных масштабах. Кроме того, согласно последним экспериментальным данным [1, 2], вклад пространственной кривизны в общую эволюцию Вселенной сильно ограничен. Три наблюдательных факта находят отражение в том, что космологическая эволюция с хорошей точностью описывается плоской метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2,$$

где $a(t)$ -масштабный фактор. Конечно, подобное описание эволюции Вселенной лишь эффективное и перестает работать на масштабах, намного меньших размера современного горизонта. Неоднородности начинают проявляться уже на космологических масштабах порядка 30–40 Мпк, соответствующих характерному размеру скоплений галактик. Присутствие этих и более мелких структур предполагает наличие неоднородностей плотности и, соответственно, флуктуаций метрики на более ранних этапах эволюции. Согласно экспериментальным данным, амплитуда возмущений плотности энергий оценивается как $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$. Несмотря на столь маленькую величину, эти возмущения имели достаточно много времени на стадии доминирования нерелятивистского вещества, чтобы вырасти до значений порядка единицы. С этого момента, уравнения эволюции космологических возмущений вошли в нелинейный режим, контраст плотности начал быстро расти благодаря гравитационной неустойчивости, что в конечном счете и привело к созданию крупномасштабных структур.

Замечательный факт, который лежит в основе ряда космологических экспериментов, таких как WMAP и Planck, состоит в том, что есть непосредственная связь между первичными скалярными возмущениями и свойствами космического микроволнового фона (cosmic microwave background в англоязычной литературе, или сокращенно СМВ). Последний состоит из фотонов, которые отцепились от материи вначале пылевидной эпохи и с тех пор распространялись почти беспрепятственно во Вселенной. На столь ранних временах, соответствующих $t = 350000$ лет, возмущения метрики и вещества

находились в линейном режиме, и, соответственно, моды с импульсами \mathbf{k} развивались независимо друг от друга. Поэтому каждая из них оставила свой неизгладимый след в свойствах реликтовых фотонов, или, точнее, в угловом распределении температурного фона. В координатном пространстве импульсу k соответствуют неоднородности с размером $d \sim k^{-1}$. Реликтовые фотоны приходят к нам с огромных расстояний, сравнимых с современным размером горизонта, $H_0^{-1} \sim 14$ Гпк. Отсюда ясно, что эффект возмущений с импульсами порядка k , состоит в вариации температурного фона реликтовых фотонов на угловых масштабах $\delta\theta \sim dH_0$. Еще в начале 90-х гг. экспериментальные данные привели к обнаружению крупномасштабных температурных флуктуаций на уровне $\delta T(\mathbf{n})/T_0 \sim 10^{-5}$. Это и объясняет сделанную выше оценку для флуктуации плотности энергии в веществе на начальных этапах развития Вселенной.

Фотоны космического микроволнового фона приносят нам ценную информацию о свойствах Вселенной на очень ранних временах, соответствующих радиационно-доминированной эпохе и началу материально-доминированной стадии. Более того, они позволяют заглянуть в более ранние эпохи, предшествовавшие началу горячего Большого Взрыва. Заметим, что необходимость существования столь ранних времен не вызывает сомнений в научном сообществе. Действительно, теория Большого Взрыва, хотя и находится в прекрасном согласии с современными экспериментами, является очевидным образом неполной. Иначе говоря, она существенно опирается на ряд важных предположений о начальных данных, которые весьма трудно назвать естественными. В первую очередь, это затрагивает такие очевидные свойства, как однородность и изотропия Вселенной. Так, в стандартной космологической картине делается неявное предположение о том, что Вселенная, видимая сейчас, произошла от слияния кусков, которые, казалось бы, не были в причинном контакте друг с другом на далеких временах. Однако, как мы уже знаем, температура микроволнового фона изотропна с хорошей точностью. В данном противоречии состоит суть проблемы горизонта.

Также теория горячего Большого Взрыва приводит к выводу о крайне малой пространственной плоскостности на ранних этапах. Вклад кривизны в уравнение Фридмана

дается формулой

$$\Omega_\kappa = -\frac{\kappa}{a^2 H^2} ,$$

где $\kappa = -1, 0, +1$ для замкнутой, плоской и открытой Вселенных. Величина $\Omega_{\kappa\text{CMB}}$ ограничена экспериментом WMAP [3],

$$-0.0178 < \Omega_\kappa < 0.0063 ,$$

на уровне достоверности 95%. Ввиду того, что относительный вклад кривизны рос на радиационно- и материально-доминированной стадиях, мы необходимо заключаем, что Вселенная должна была быть исключительно плоской в планковскую эпоху, $\Omega_\kappa \lesssim 10^{-60}$. Столь малое число приходится закладывать в теорию горячего Большого Взрыва руками, что составляет сущность проблемы плоскостности.

Аналогично, в рамках горячего Большого Взрыва отсутствует естественное объяснение современного значения энтропии. Действительно, на большей части эволюции Вселенная находилась, грубо говоря, в состоянии термодинамического равновесия, а потому ее энтропия не менялась существенным образом. Так, современное значение энтропии видимой части Вселенной оценивается величиной $S_0 \sim 10^{88}$. В теории Большого Взрыва столь огромное число опять же приходится закладывать “руками” в качестве начального условия.

Существование первичных неоднородностей плотности в ранней Вселенной, также является неразрешимой проблемой в рамках стандартной космологической модели. Ситуация несколько “усугубляется” тем, что свойства начальных возмущений далеко не самоочевидны. Например, с хорошей точностью их можно охарактеризовать единственной случайной величиной $\zeta(\mathbf{x})$, постоянной в режиме за горизонтом. Возможность такого описания подразумевает, что мы имеем дело с *адиабатическими* возмущениями. Величина $\zeta(\mathbf{x})$ определена ниже [4, 5, 6],

$$\zeta = \Psi + \frac{\delta\rho}{3(\rho + p)} ,$$

где Ψ скалярное возмущение пространственной части метрики, $\delta\rho$ обозначает флуктуацию плотности энергии доминирующего вещества, а ρ и p его плотность энергии и

давление, соответственно. Можно показать, что величина ζ калибровочно-инвариантна и однозначно определяет пространственную кривизну в системе отсчета, где $\delta\rho = 0$. Выражение, аналогичное ζ , можно написать для каждой компоненты среды на горячей стадии по отдельности. Адиабатические начальные условия тогда можно определить так,

$$\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 \dots = \zeta_n .$$

Отклонение от этого свойства подразумевает небольшую примесь энтропийных возмущений. Такая возможность, однако, сильно ограничено современными экспериментальными данными. В настоящей диссертации мы всегда будем предполагать, что свойство адиабатичности выполнено с хорошей точностью.

Согласно данным экспериментов WMAP и Planck, возмущение $\zeta(\mathbf{x})$ *гауссова* случайная величина. На языке теории поля, это означает, что выполнена теорема Вика. Другими словами, статистические свойства величины ζ определяются ее двухточечной функцией, допускающей представление в виде,

$$\langle \zeta(\mathbf{x})\zeta(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} .$$

Функция $P(\mathbf{k})$, стоящая в правой части, есть спектр мощности первичных скалярных возмущений. Обычно предполагается, что она не зависит от направления вектора \mathbf{k} , или, другими словами, статистически изотропна. Насколько это допущение соответствует реальной картине экспериментальных данных. мы обсудим в Главе 4. В последующем нам будет удобнее использовать другое определение спектра мощности,

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P(k) .$$

В терминах функции $\mathcal{P}(k)$ среднее от квадрата возмущения $\zeta(\mathbf{x})$ принимает вид

$$\langle \zeta^2(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) .$$

Одним из ключевых свойств первичных возмущений является плоскостность их спектра мощности $\mathcal{P}_\zeta(k)$, или, иначе говоря, независимость последнего от величины импульса

k. Важно подчеркнуть приблизительный характер этого свойства. Более того, согласно последним данным Planck [1] (WMAP [2]), в точности плоский спектр мощности исключен на уровнях достоверности более 5σ (2σ).

Отмеченные проблемы явно указывают на то, что горячий Большой Взрыв вряд ли являлся отправной точкой в эволюции Вселенной, и радиационно-доминированной стадии предшествовала какая-то другая стадия. Самым успешным кандидатом на роль теории ранней Вселенной является инфляция [7]. Основная идея инфляции состоит в том, что горячему Большому Взрыву предшествовал период очень быстрого расширения Вселенной. За короткий промежуток времени Вселенная раздулась из области планковских размеров до масштабов, намного превышающих видимую сегодня область Вселенной. Таким образом, проблема горизонта уверенно разрешается. Также инфляция крайне эффективно справляется с проблемой маленькой пространственной плоскостности. В ускоренно расширяющейся Вселенной вклад пространственной кривизны быстро падает со временем и представляет крайне малую величину к началу горячей эпохи.

Наиболее просто инфляция реализована в моделях с одним скалярным полем ϕ , медленно скатывающимся вдоль склона своего потенциала $V(\phi)$. Действие для поля ϕ имеет вид

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right) .$$

При определенных условиях, называемых условиями медленного скатывания, Вселенная, доминируемая *инфлатоном* ϕ , быстро выходит на режим ускоренного расширения, характеризующегося почти постоянным параметром Хаббла. Удобно представить условия медленного скатывания в качестве ограничения на форму потенциала $V(\phi)$,

$$\epsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \ll 1, \quad \eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V_{\phi\phi}}{V} \ll 1 .$$

Выполнение этих условий гарантирует, что на инфляционной стадии Вселенная с хорошей точностью описывается метрикой де Ситтера,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} d\mathbf{x}^2 ,$$

где $H \approx \text{const}$ обозначает параметр Хаббла.

Возмущения инфлатона, эволюционирующие на фоне пространства-времени де Ситтера, служат источником первичных скалярных возмущений [8, 9]. Вкратце механизм состоит в следующем. На очень ранних временах, соответствующих $k/a \gg H$, вакуумные возмущения инфлатона находятся под горизонтом. Гравитационные эффекты пренебрежимо малы в этом режиме, и возмущения инфлатона осциллируют в эффективно плоском пространстве-времени. С течением времени, масштабный фактор быстро растет, а физические импульсы, соответственно, падают. В какой-то момент времени, определяемый из условия $k/a \sim H$, возмущения инфлатона выходят за горизонт. Их осцилляции прекращаются, а амплитуда замораживается на значении $\delta\phi \sim \frac{H}{2\pi}$; при этом характерные длины волн экспоненциально растут за горизонтом. В этом по сути и состоит механизм усиления вакуумных флуктуации скалярного поля во Вселенной де Ситтера. За горизонтом возмущения инфлатона эффективно ведут как классическое поле, которое несколько смещает фоновое значение инфлатонного поля $\phi(t)$. В итоге, поле инфлатона становится слегка неоднородным, что ведет к некоторому сдвигу во времени окончания инфляции в разных областях Вселенной. Те из них, которые вышли из инфляции несколько раньше, имели больше времени для эволюции на горячей стадии, и, соответственно, для остывания. Отсюда, и плотность энергии оказалась в них несколько ниже. Так образовались первичные возмущения плотности энергии.

Наиболее характерными предсказаниями инфляции в режиме медленного скатывания являются небольшой наклон спектра первичных возмущений

$$n_s - 1 = 2\eta - 6\epsilon ,$$

и тензорные возмущения с почти плоским спектром и потенциально большой амплитудой. Первичные возмущения, генерируемые инфляционным механизмом, описываются гауссовой статистикой с высокой степенью точности [10].

Верные в простейших моделях инфляции, эти предсказания удается избежать в более сложных случаях. В частности, это касается негауссовости в спектре первичных возмущений. Пожалуй, наиболее известный пример в этом смысле—модель с легким ска-

лярным полем, минимально связанным с гравитацией в инфляционно раздувающейся Вселенной [11, 12, 13, 14, 15]. Также представляют интерес модели с высшими производными поля инфлатона [16], невакуумными начальными условиями [17, 18, 19, 20, 21], особенностями в потенциале [22, 23] и т.д. В ряде случаев удается получить нетривиальную зависимость от направления спектра первичных скалярных возмущений. Наиболее мотивированные модели такого рода имеют дело с калибровочными полями, нетривиально эволюционирующими в инфляционной Вселенной [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. В данной диссертации мы еще вернемся к обсуждению части из упомянутых возможностей. Здесь же отметим, что современные данные экспериментов WMAP и Planck [2, 32, 34, 35] накладывают сильное ограничение на возможные отклонения от свойств гауссовости и статистической изотропии первичных возмущений.

Как мы уже сказали, инфляция, по крайней мере в ее простейших версиях, находится в прекрасном согласии с имеющимися на данный момент наблюдательными данными. Тем не менее, законен вопрос об альтернативных теориях. Логической (но отнюдь не единственной!) альтернативой является картина сжимающейся Вселенной. Отметим, что интерес к такого рода моделям в научной литературе заметно ниже, чем к инфляции. Объяснить эту тенденцию можно рядом характерных проблем, присущих картине сжимающейся Вселенной. Во-первых, переход со стадии сжатия на привычную стадию расширения представляет собой определенные трудности с точки зрения квантовой теории поля. Дело в том, что параметр Хаббла отрицателен на стадии сжатия и положителен на стадии расширения. Отсюда следует, что производная параметра Хаббла должна быть положительной на временах, соответствующих отскоку. Из уравнения

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p)$$

тогда вытекает, что вещество, дающее наибольший вклад в эволюцию Вселенной, определяется уравнением состояния $p < -\rho$. Выполнение последнего в рамках квантовой теории поля в большинстве случаев приводит к проблеме нестабильности вакуума. Известны, однако, примеры моделей, в которых данную проблему удастся избежать. В первую очередь речь идет о модели “духового конденсата” [36] и сравнительно недавно

разработанных теориях с галилеонами [37]. Таким образом, переход со стадии сжатия на стадию расширения, представляет хоть и трудную, но отнюдь не неразрешимую задачу с точки зрения квантовой теории поля. В частности, в литературе представлен ряд моделей, в которых удастся “сшить” фазу сжатия с фазой расширения без привлечения патологий [38, 39, 40].

Второй проблемой в картине сжимающейся Вселенной является рост хаотических флуктуаций метрики с уменьшением масштабного фактора. Это—результат работы Белинского–Халатникова–Лифшица [41]. Можно показать, что соответствующий вклад в уравнение Фридмана описывается плотностью энергии ρ , изменяющейся как $\rho \sim 1/a^6$ с масштабным фактором a . Ясно, что в сжимающейся Вселенной такой источник начинает доминировать в космологической эволюции, если типы вещества материи подчиняются стандартным уравнениям состояния. В такой ситуации свойства однородности и изотропии Вселенной должны быть сильно нарушены к началу горячего Большого Взрыва. Тем не менее, проблему удастся избежать введением вещества со сверхжестким уравнением состояния, то есть $p \gg \rho$ [42]. Подобное уравнение состояния естественным образом возникает в моделях с экпирозисом [43, 44]. Последние появились в рамках многомерных теорий с двумя бранами. Предполагается, что вещество живет на одной из этих бран, тогда как гравитация может свободно распространяться в многомерном пространстве. Сближение бран в такой картине ассоциируется с фазой сжатия Вселенной. Столкновение, глубоко неупругий процесс, приводит к разогреву, а последующее удаление бран друг от друга соответствует расширению Вселенной.

Замечательно, что модели с экпирозисом допускают эффективное четырехмерное описание вдали от точки столкновения бран. Главный вклад в эволюцию Вселенной в этой картине дает радион, который характеризуется самодействием в виде отрицательного экспоненциального потенциала. Такой выбор потенциала приводит к сверхжесткому уравнению состояния у поля радиона, и проблемы роста нестабильностей удастся избежать. Конкретно, уравнения состояния имеет вид $p = w\rho$, где $w = \text{const} \gg 1$ [44]. Соответствующая ему эволюция плотности энергии с масштабным фактором описыва-

ется уравнением $\rho \propto 1/a^{3(1+w)}$. Ясно, что в сжимающейся Вселенной поле радиона в какой-то момент начинает доминировать над вкладом анизотропии и кривизны в уравнение Фридмана. Последнее, в частности, означает, что проблема плоскостности также находит свое разрешение в моделях экирозиса, по крайней мере если фаза сжатия продолжается в течение достаточно большого времени.

Генерация скалярных возмущений в рамках моделей с экирозисом возможна, но происходит несколько сложнее, чем в инфляции. Во-первых, одного скалярного поля оказывается явно недостаточно, чтобы объяснить имеющиеся экспериментальные данные. Формально, возмущения радионного поля в режиме за горизонтом характеризуются плоским спектром. Сами по себе, однако, они не имеют непосредственного физического смысла, так как не являются калибровочно-инвариантными. В терминах инвариантной величины ζ , включающей возмущения метрики, результат кардинальным образом меняется: предсказываемый спектр первичных возмущений является сильно синим с $n_s - 1 \approx 2$ [45]. Выход из ситуации состоит в добавлении второго скалярного поля, дающего пренебрежимо малый вклад в эволюцию Вселенной. В этом случае, возмущения в системе можно разделить на адиабатическую моду и моду постоянной кривизны, или энтропийную моду. В эволюции последней возмущения метрики не играют существенной роли, и, как было показано в работах [46, 47], они приобретают плоский спектр. Однако, здесь есть одна тонкость. Дело в том, что вывод о плоском спектре существенно зависит от выбора траектории в пространстве адиабатических и энтропийных возмущений. В частности, траектория, которая приводит к правильному виду первичного спектра, опирается на нестабильность, что подразумевает значительную подстройку начальных условий для фазы экирозиса [48]. Данная подстройка, однако, может происходить автоматически в так называемых моделях циклической Вселенной, в которых фазе сжатия предшествует стадия ускоренного расширения, аналогичное тому, которое мы наблюдаем сейчас [49].

Альтернативный способ генерации скалярных возмущений с плоским спектром был предложен в рамках модели конформного скатывания [50]. Строго говоря, последняя не

имеет непосредственного отношения к моделям с экпирозисом. Более того, она не опирается существенно на особенности эволюции Вселенной на временах, предшествовавших горячей эпохе. Главным ингредиентом модели является безмассовое комплексное поле ϕ , конформно связанное с гравитацией. Поле ϕ скатывается вдоль склона отрицательного четверичного потенциала,

$$V(\phi) = -h^2|\phi|^4 .$$

Благодаря конформной связи с гравитацией, в модели существует инвариантность относительно преобразований метрики, дополненных преобразованием скалярного поля $\phi \rightarrow \chi = a\phi$. В итоге динамика поля χ дается эволюцией на фоне пространстве-времени Минковского, независимо от фоновой метрики Вселенной в это время. Однородные решения для поля χ быстро стремятся к динамическому аттрактору

$$\chi_c = \frac{1}{h(\eta_* - \eta)} , \tag{1}$$

который может быть выбран вещественным без ограничения общности. Это—следствие инвариантности модели относительно глобальных преобразований группы $U(1)$. На фоне этого решения, возмущения фазы ведут себя так же, как возмущения инфлатона на фоне метрики де Ситтера. Это гарантирует, что в режиме “за горизонтом” они характеризуются плоским спектром. При достаточно больших значениях поля χ конформная инвариантность явно нарушается. Начиная с этого момента, фаза поля χ ведет себя как самостоятельное поле и его дальнейшая судьба определяется космологической эволюцией Вселенной на этих временах. Так, если космологически интересные моды находятся за горизонтом на момент окончания конформного скатывания, тогда фаза θ остается постоянной (“замораживается”) вплоть до начала горячего Большого Взрыва, когда ее энтропийные возмущения превращаются в адиабатические возмущения радиации. В противном случае, фаза продолжает эволюционировать на так называемой промежуточной стадии, которая длится от момента окончания конформного скатывания и вплоть до начала горячей эпохи. Этот случай будет наиболее интересен для нас в этой диссертации.

Нетривиальные феноменологические следствия модели конформного скатывания вытекают из взаимодействия радиальной части и фазовых возмущений [51, 52, 53]. Характерными предсказаниями этой модели являются негауссовость в четырехточечной корреляционной функции и статистическая анизотропия. Последняя особенно богата по содержанию в версии модели с промежуточной стадией [53]. Более подробно мы будем обсуждать эти вопросы в Главах 3 и 4. Мы увидим, что величина негауссовости и статистической анизотропии определяется константой h , которая, строго говоря, не обязана быть очень малой. С этой точки зрения представляется интересным исследовать свойства космического микроволнового фона на вопрос наличия в них сигнала предсказываемого типа. В частности, в Главе 5 диссертации мы используем карты WMAP для того чтобы ограничить параметр h^2 модели.

У читателя может сложиться впечатление, что конформная инвариантность играет лишь случайную роль в модели с конформным скатыванием. На самом деле это не так. В частности, недавно было разработано обобщение модели конформного скатывания, опирающееся на несколько предположений [54]:

- Эволюция Вселенной описывается метрикой Минковского с хорошей степенью точности.
- Состояние Вселенной в эту эпоху описывается в терминах конформно-инвариантной теории.
- Среди полей теории имеются скаляры с разными конформными весами Δ , причем имеется по крайней мере одно поле с весом $\Delta \neq 0$, так и скаляр с нулевым весом $\Delta = 0$.
- Классическое решение для поля с весом $\Delta \neq 0$ имеет нетривиальную зависимость от времени, аналогичную (1). Данное решение приводит к спонтанному нарушению конформной группы $SO(4, 2)$ до группы де Ситтера $S_0(4, 1)$.
- В теории имеется инвариантность относительно сдвига поля с весом ноль на константу.

При выполнении этих условий, среди которых конформная инвариантность играет ключевую роль, поле с конформным весом $\Delta = 0$ приобретает плоский спектр. Слабое нарушение одного или более из условий приведенных выше приводит к небольшому наклону спектра [54, 56].

Замечательно, что данные условия все еще оставляют богатое поле для фантазий относительно эволюции Вселенной на ранних этапах. Так, модель с отрицательным потенциалом четвертой степени—лишь частный случай в безграничном море других возможностей. Более экзотическая возможность представлена в модели с “генезисом” [55], которая опирается на весьма причудливый лагранжиан с высшими производными конформного скалярного поля, галилеона. В отличие от модели с самодействием четвертого порядка, поле с нулевым конформным весом вводится “руками” в “генезисе”. Другая его особенность состоит в том, что галилеон играет непосредственную роль в эволюции Вселенной. В этом случае первое из условий конформной Вселенной, приведенных выше, выполнено автоматически— метрика Минковского является динамическим аттрактором космологической эволюции на очень ранних временах. Аналогично выполнены другие три условия. В частности, существует классическое решение для галилеона вида (1). Поле с конформным весом ноль эволюционирует на фоне этого решения и приобретает плоский спектр мощности, аналогично фазовому полю модели конформного скатывания. На самом деле, поле ϕ в модели с самодействием четвертого порядка также может играть роль ведущей материи в эволюции Вселенной [54]. Доминируемая полем ϕ , Вселенная испытывает медленное сжатие, или, другими словами, находится в фазе экипророзиса. В дальнейшем мы будем использовать специальное название “модель Хинтербихлера–Кхури” для данной версии конформного скатывания.

Еще одним замечательным фактом является то, что ключевые предсказания моделей конформной Вселенной работают независимо от конкретного вида лагранжиана [52, 58, 57]. Например, форма негауссовости и статической анизотропии совпадают в модели конформного скатывания (версия без промежуточной стадии) и в “генезисе”. Нетривиальная феноменология в этом случае фиксирована соображениями симметрии,

нежели чем деталями микроскопической физики. Заметим, что соответствующие предсказания оказываются мало отличимыми от аналогичных предсказаний ряда инфляционных моделей. В определенном смысле исключением из правил является версия модели конформного скатывания с промежуточной стадией. Наличие нетривиальной эволюции возмущений фазы после окончания конформного скатывания приводит к предсказаниям несколько иного рода. Пожалуй, наиболее перспективным из них является статистическая анизотропия, т.е. зависимость от направления спектра первичных возмущений. Замечательно, что эта зависимость качественно другая, чем в версии без промежуточной стадии, в модели “генезиса”, а также в некоторых расширениях инфляционной теории, предсказывающих статистическую анизотропию квадрупольного вида [51, 58]. Более подробно мы обсудим этот вопрос в Главах 3 и 4.

Прежде чем мы перейдем к основной части диссертации, заметим, что существует ряд других проблем, помимо уже отмеченных выше, которые, возможно, указывают на неполноту теории горячего Большого Взрыва. Речь идет о ряде аномалий космического микроволнового фона, обнаруженных на уровне достоверности $2.6 - 4\sigma$ в эксперименте WMAP [59]–[67]. Среди них стоит отметить сильную корреляцию между квадруполем и октуполем, низкую мощность квадруполья, холодные пятна, “ось зла”, асимметрию между четными и нечетными мультиполями и другие. Подчеркнем, однако, что указанные аномалии являются лишь слабым указанием на неполноту стандартной космологической модели. Такое умозаключение отчасти связано с так называемой космологической неопределенностью, которая особенно ярко проявляется на низких мультиполях. Вторая причина состоит в том, что мультиполи с малыми l сильно загрязнены излучением галактики (наша галактика светится!). В принципе, известны способы “борьбы” с этим излучением. Тем не менее, отнюдь не стоит исключать возможность присутствия неучтенных источников, которые излучают на характерных частотах эксперимента WMAP. В Главе 5 мы подробнее остановимся на этом вопросе. В частности, мы покажем, что сильная корреляция между квадруполем и октуполем и одновременно асимметрия между четными и нечетными мультиполями легко объясняется, если

учесть излучение пояса Койпера.

2 Модель конформного скатывания с промежуточной стадией

Мы приступаем к подробному анализу эволюции космологических возмущений в модели конформного скатывания. Как было отмечено во Введении, существуют две версии модели. В одной версии, возмущения эволюционируют в конформную эпоху, замораживаются в какой-то момент и остаются неизменными вплоть до начала горячего Большого Взрыва. Данная ситуация была рассмотрена в работах [50, 51, 52, 54, 57, 58] Другая возможность состоит в том, что космологические возмущения испытывают нетривиальную эволюцию после окончания конформного скатывания и до начала Большого Взрыва на так называемой промежуточной стадии. Эта ситуация, исследованная в работах [53, 71], будет представлять наибольший интерес для нас в настоящей диссертации.

2.1 Эволюция возмущений фазы в конформную эпоху

В эпоху конформного скатывания Вселенная описывается действием вида

$$S = S_{G+M} + S_\phi ,$$

где S_{G+M} суммарное действие для гравитации и вещества, доминирующего в общей эволюции Вселенной. Действие S_ϕ имеет вид

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{R}{6} \phi^* \phi - V(\phi) \right] \quad (2)$$

где ϕ комплексное скалярное безмассовое поле, $\phi = |\phi| e^{i\theta/\sqrt{2}}$. Несколько необычный фактор $\sqrt{2}$ здесь введен для будущего удобства. Второе слагаемое в скобках описывает конформную связь поля ϕ с гравитацией. Требование конформной инвариантности фиксирует вид самодействия в виде потенциала четвертой степени,

$$V(\phi) = -h^2 |\phi|^4 , \quad (3)$$

где h безразмерная константа; знак минус у потенциала гарантирует нетривиальность динамики поля ϕ . Благодаря конформной связи с гравитацией, действие (2) принимает особенно простой вид в терминах новой переменной $\chi(\eta, \mathbf{x}) = a(\eta)\phi(\eta, \mathbf{x})$,

$$S[\chi] = \int d^3x d\eta [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi^* \partial_\nu \chi + h^2 |\chi|^4] . \quad (4)$$

В дальнейшем мы предполагаем однородность классического решения $\chi_c = \rho e^{i\theta/\sqrt{2}}$, следующего из этого действия. Мы ввели обозначение $\rho = |\chi_c|$. Обсудим вначале уравнение для фазы θ_c . Оно совпадает с законом сохранения нётеровского тока относительно преобразований глобальной группы $U(1)$,

$$\frac{d}{d\eta} (\rho^2 \theta') = 0 ,$$

В частности, из этого уравнения следует, что с ростом радиуса ρ , фаза θ перестает зависеть от времени. Это означает, что классическое поле χ_c эволюционирует в радиальном направлении, по крайней мере на достаточно поздних временах. Ввиду инвариантности относительно группы $U(1)$, постоянную фазу можно положить равной нулю и считать поле χ_c вещественным в дальнейшем. Отсюда, мы имеем право использовать обозначение χ_c вместо ρ в дальнейшем.

Первый интеграл уравнения движения, следующий из действия (4), имеет вид

$$\chi_c'^2 - h^2 \chi_c^4 = \epsilon ,$$

где ϵ константа интегрирования. Решение этого уравнения стремится к динамическому аттрактору, не зависящему от ϵ ,

$$\chi_c = \frac{1}{h(\eta_* - \eta)} , \quad (5)$$

здесь η константа, которую нам будет удобно интерпретировать как время окончания скатывания.

Обсудим теперь эволюцию возмущений фазы на фоне классического решения (5). Ввиду того, что фаза плохо определена на очень ранних временах, представляется более

удобным работать с мнимой частью поля χ , или, точнее, с $\delta\chi_2 = \sqrt{2}\text{Im}\chi$. Возмущение фазы $\delta\theta$ дается отношением

$$\delta\theta = \frac{\delta\chi_2}{\chi_c},$$

с точностью до поправок $\mathcal{O}(\delta\theta^3)$. Линеаризованное уравнение движения для поля $\delta\chi_2$, следующее из действия (4), имеет вид

$$(\delta\chi_2)'' + k^2\delta\chi_2 - \frac{2}{(\eta_* - \eta)^2}\delta\chi_2 = 0. \quad (6)$$

Формально это уравнение совпадает с уравнением для бесмассового скалярного поля, минимально связанного с гравитацией в пространстве-времени де Ситтера. Отсюда следует, что поле $\delta\chi_2$ характеризуется плоским спектром мощности в режиме за “горизонтом”. При этом важно понимать, что речь идет о фиктивном горизонте, длина которого определяется как $\eta_* - \eta$. Так, на ранних временах, когда моды поля $\delta\chi_2$ находятся под “горизонтом”, оно ведет себя как бесмассовое скалярное поле на фоне метрики Минковского,

$$\chi_2^{(-)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k}} e^{ik(\eta_* - \eta)}.$$

Точное решение уравнения (6), стремящееся к такому асимптотическому виду на ранних временах, выражается через функцию Ганкеля,

$$\chi_2^{(-)} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\eta_* - \eta}{2}} \text{H}_{3/2}^{(1)}[k(\eta_* - \eta)] \quad (7)$$

На поздних временах, $k(\eta_* - \eta) \ll 1$, это решение стремится к асимптотическому виду

$$\chi_2^{(-)} = \frac{i}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{k^{3/2}(\eta_* - \eta)}.$$

Такая зависимость от импульса k подразумевает плоский спектр поля $\delta\chi_2$ в режиме за “горизонтом”,

$$\Delta_{\delta\chi_2} = \frac{1}{2\pi(\eta_* - \eta)}.$$

В терминах фазового поля спектр мощности имеет вид [50]

$$\mathcal{P}_{\delta\theta} = \frac{h^2}{(2\pi)^2}$$

Это—основной результат работы [50].

Из приведенного выше обсуждения неявно следует, что конформная эпоха не может происходить во время горячего Большого Взрыва. Действительно, для того, чтобы все космологически интересные возмущения характеризовались плоским спектром, необходимо потребовать существования как очень ранних времен

$$k(\eta_* - \eta) \ll 1, \quad (8)$$

так и достаточно поздних времен

$$k(\eta_* - \eta) \gg 1 \quad (9)$$

для всех интересных конформных импульсов k . Отсюда следует, что длительность конформного скатывания должна превышать k^{-1} . Это и означает, что описанный выше механизм не работает в горячую эпоху, так как величина порядка k^{-1} соответствует, грубо говоря, времени от начала Большого Взрыва и до настоящего момента. Таким образом, мы требуем, чтобы проблема горизонта была решена, по крайней мере формально. Впрочем, схожая ситуация имеет место в большинстве механизмов генерации первичных скалярных возмущений (см., тем не менее, [69]).

При больших полях ϕ , конформная инвариантность явно нарушается. Наиболее простой способ реализовать это нарушение—предположить, что потенциал $V(|\phi|)$ иной при больших значениях поля, чем в Ур. (3), и имеет минимум при $|\phi| = f_0$. Радиальное поле $|\phi|$ осциллирует в окрестности минимума своего потенциала, распадаясь на обычные частицы; при этом его осцилляции быстро затухают и поле принимает постоянное значение f_0 . Одним из предположений модели с конформным скатыванием является то, что вклад поля ϕ в общую эволюцию Вселенной пренебрежимо мал,

$$|\rho_\phi| \sim h^2 f_0^4 \ll \rho_{tot} = \frac{3}{8\pi} M_{Pl}^2 H^2. \quad (10)$$

Здесь ρ_{tot} полная плотность вещества во Вселенной во время конформного скатывания.

В конформную эпоху динамика возмущений фазы $\delta\theta$ определяется единственно её взаимодействием с радиальной частью поля χ ; эволюция масштабного фактора $a(\eta)$

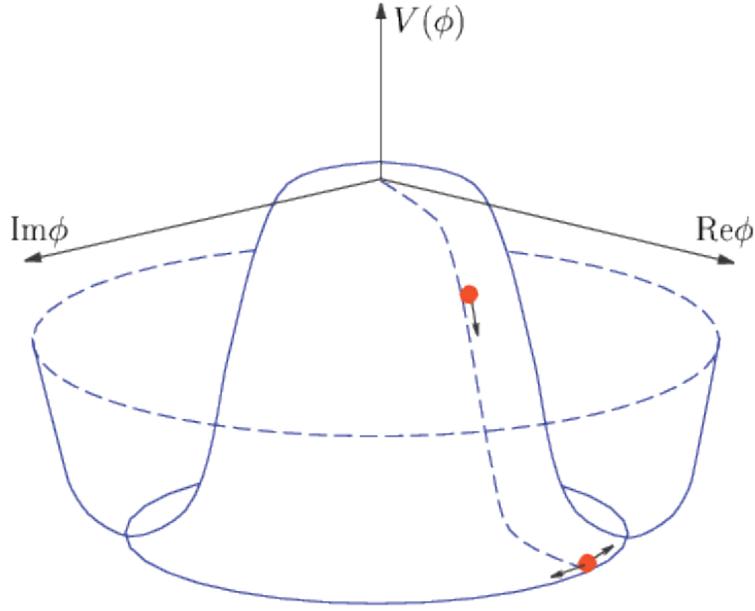


Рис. 1: Эволюция поля ϕ во время конформного скатывания.

не играет при этом никакого значения. После окончания конформного скатывания ситуация в корне другая. Как только радиальное поле $|\phi|$ “свалилось” в минимум своего потенциала, фаза θ ведет себя как безмассовое скалярное поле, минимально связанное с гравитацией (это верно для любого намбу–голдстоуновского поля [70]). С этого момента, эволюция Вселенной начинает играть решающую роль в динамике фазы $\delta\theta$. Есть два реалистичных сценария развития событий, в зависимости от поведения космологически интересных мод по окончании конформного скатывания:

- (а) космологически интересные моды находятся за горизонтом (в обычном смысле слова) к концу конформного скатывания;
- (б) они все еще под горизонтом.

Версия (а) развития событий подробно обсуждалась в работах [51, 52, 54, 57, 58]; в этом случае, возмущения фазы не эволюционируют вплоть до начала горячей эпохи. Поэтому их свойства и, соответственно, свойства первичных скалярных возмущений полностью определяются их динамикой в эпоху конформного скатывания. Нас в этой диссертации будет в первую очередь интересовать вариант (б) развития событий. В этом

случае эволюция возмущений фазы продолжается на промежуточной стадии, начинающейся непосредственно по окончании конформного скатывания и заканчивающейся в момент заморозки фазы.

2.1.1 Возмущения радиальной части конформного поля ϕ

Источником нетривиальных феноменологических свойств модели конформного скатывания является взаимодействие фазы и радиальных возмущений в конформную эпоху [50, 51]. Как мы скоро увидим, эффекты этого взаимодействия накладывают отпечаток на эволюции фазы в промежуточную эпоху, что в конечном итоге приводит к ряду интересных предсказаний: негауссовости, наклону спектра мощности и статистической анизотропии. Поэтому имеет смысл подробнее остановиться на эволюции радиальной части поля ϕ .

В ведущем порядке по константе h , возмущения $\delta\chi_1 = \sqrt{2}\delta|\chi|$ и $\delta\chi_2 = \sqrt{2}\text{Im}\chi$ эволюционируют независимо друг от друга. В этом режиме возмущения радиуса поля χ подчиняются уравнению

$$(\delta\chi_1)'' + p^2 \delta\chi_1 - 6h^2\chi_c^2\delta\chi_1 \equiv (\delta\chi_1)'' + p^2 \delta\chi_1 - \frac{6}{(\eta_*^{(0)} - \eta)^2}\delta\chi_1 = 0, \quad (11)$$

Мы предпочитаем использовать отдельное обозначение \mathbf{p} для импульсов, характеризующих моды $\delta\chi_1$ во избежание недоразумений в дальнейшем. Решение Ур. (11) со стандартным начальным условием приведено ниже

$$\delta\chi_1 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\eta_* - \eta}{2}} H_{5/2}^{(1)}[p(\eta_* - \eta)] \cdot \hat{B}_{\mathbf{p}} + h.c., \quad (12)$$

Здесь $\hat{B}_{\mathbf{p}}, \hat{B}_{\mathbf{p}}^\dagger$ операторы рождения и уничтожения фазового поля, подчиняющиеся стандартному коммутационному соотношению $[\hat{B}_{\mathbf{p}}, \hat{B}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, $H_{5/2}^{(1)}$ функция Ганкеля; мы пренебрегли незначительным фазовым множителем. На поздних временах, определенных по отношению к импульсам p как $p(\eta_* - \eta) \ll 1$, решение стремится к асимптотическому виду

$$\delta\chi_1 = \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{p^{5/2}(\eta_* - \eta)^2} \cdot \hat{B}_{\mathbf{p}} + h.c..$$

Такое поведение радиальных возмущений $\delta\chi_1$ свидетельствует о неприменимости линейного приближения на очень поздних временах. Покажем, тем не менее, что это не приводит к каим-либо катастрофическим последствиям для модели.

Для этого заметим, что “загоризонтные” возмущения $\delta\chi_1$, когда они еще достаточно малы, могут быть включены в переопределение времени окончания скатывания η_* [50], так что полное решение для радиуса, включающее радиальные возмущения, может быть записано в виде [50, 51]

$$\chi_c(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{h[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]} , \quad (13)$$

где

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_* + \delta\eta_*(\mathbf{x})$$

Неоднородный сдвиг $\delta\eta_*(\mathbf{x})$ можно интерпретировать как случайное гауссово поле. Форма этого сдвига определяется из тех соображений, что решение (13) должно воспроизводить результат линейной теории на тех временах, когда это приближение справедливо,

$$\delta\eta_*(\mathbf{x}) = \frac{3h}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int \frac{d^3p}{p^{5/2}} \left(e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \cdot \hat{B}_{\mathbf{p}} + h.c. \right) .$$

Обратим внимание на красный спектр мощности поля $\delta\eta_*(\mathbf{x})$,

$$\mathcal{P}_{\delta\eta_*} = \frac{9h^2}{8\pi^2} \frac{1}{p^2} . \quad (14)$$

Казалось бы, формальная, процедура переопределения времени окончания скатывания имеет, на самом деле более глубокий смысл. Чтобы показать это, выпишем точное решение уравнения для радиуса поля χ ,

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \chi_c - \frac{\chi_c}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \theta - 2h^2 \chi_c^3 = 0 . \quad (15)$$

Для начала пренебрежем обратным действием фазы на эволюцию радиуса. Так как нас в первую очередь будет интересовать вклад длинноволновых радиальных возмущений, можно на время пренебречь пространственной вариацией поля $\eta_*(\mathbf{x})$. Очевидно, в этой ситуации решение (13) удовлетворяет Ур. (15). Это простое рассуждение показывает, что длинноволновые моды радиуса на самом деле безвредны и могут быть

просуммированы и включены в переопределение времени η_* . Ясно, что однородный сдвиг времени окончания скатывания при этом не представляет физического интереса. Интересные эффекты появляются, если мы включим в рассмотрение вариацию полного времени $\eta_*(\mathbf{x})$. Естественно описывать соответствующие эффекты в терминах производных $\eta_*(\mathbf{x})$, Из соображений удобства введем отдельное обозначение для первой производной,

$$v_i = -\partial_i \eta_* , \quad (16)$$

но сохраним стандартное обозначение для второй производной, $\partial_i \partial_j \eta_*$. Заметим, что поля v_i и $\partial_i \partial_j \eta_*$ характеризуются плоским и синим спектрами, соответственно. Поэтому поправка по этим величинам малы и не представляют дальнейшей угрозы для линейной теории. Фактически, поправка линейная по v_i уже включена в Ур. (13). В самом деле, все еще удерживая только очень длинные волны в возмущении радиуса, мы можем разложить время окончания скатывания до линейного слагаемого включительно, $\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_* - v_i x_i$. Подставляя последнее выражение в (13), мы видим, что фоновое решение (13) все еще удовлетворяет Ур. (15). Дальнейшие поправки возникают в порядках v^2 и $\partial_i \partial_j \eta_*/k$, и решение (13) в этом случае немного модифицируется. Из размерных соображений общий вид решения имеет вид

$$\chi_c(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{h(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)} + \frac{\alpha v^2}{h(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)} + \beta \frac{\partial_i \partial_i \eta_*}{h} . \quad (17)$$

Стоящие здесь константы α и β можно определить прямой подстановкой этого анзаца в Ур. (15). Последнее удовлетворяется для $\alpha = -1/2$ и $\beta = 1/6$ [51]. Множитель перед слагаемым, пропорциональным v^2 , не случаен. Его можно интерпретировать как первый член в разложении фактора Лоренца $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Несмотря на то, что мы не имеем права удерживать высшие поправки в разложении фактора Лоренца, все же удобно представить решение для радиуса в виде [51],

$$\chi_c(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{h\gamma(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)} + \frac{\partial_i \partial_i \eta_*}{6h} , \quad (18)$$

где подразумевается линеаризация по v^2 . Ввиду последующих результатов, заметим, что интересные импульсы, характеризующие радиальные возмущения $\delta\chi_1$, очень малы

по сравнению с характерными космологическими импульсами, $p \ll k$. В частности, это означает, что на космологически интересных масштабах верно градиентное разложение времени окончания скатывания,

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_*^{(0)} - v_i x_i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \eta_* x_i x_j .$$

Обсудим, наконец, потенциальный вклад фазы в эволюцию возмущений радиуса. Сразу отметим, что вклад возмущений фазы “подгоризонтных” мод пренебрежимо мал ввиду быстрых осцилляций фазы. С другой стороны, вклад “загоризонтных” мод оценивается как

$$\chi_c \langle \partial_i \theta \partial_i \theta \rangle \sim \frac{h k_{max}^2}{\eta_* - \eta} ,$$

где импульс самой коротковолновой моды в режиме “за горизонтом” оценивается из $k_{max}(\eta_* - \eta) \sim 1$. С другой стороны, линейная по v^2 поправка оценивается как $\frac{h \ln \Lambda}{(\eta_* - \eta)^3}$, где Λ имеет смысл масштаба инфракрасного обрезания. Благодаря имеющему место логарифмическому усилению, мы имеем право удерживать поправку от v^2 на фоне поправок от обратного действия фазы. Последние также меньше, чем вторая поправка в правой части Ур. (18), если выполнено неравенство

$$h \ll p_{max}(\eta_* - \eta) .$$

Заметим, что данное неравенство нарушается, если константа h не очень мала и/или конформное скатывание продолжается вплоть до очень поздних времен. В этой ситуации, мы не имеем право удерживать вторую поправку в выражении (18). Тем не менее, это не накладывает никакого ограничения на наши последующие умозаключения, поскольку соответствующая поправка не приводит ни к каким физически наблюдаемым явлениям ни в одной из версий модели конформного скатывания.

2.1.2 Поправки к фазовым возмущениям

Обсудим теперь поправки к возмущениям мнимой части поля χ за счет их взаимодействия с радиальными возмущениями. Как следует из предыдущего Раздела, интересные

с точки зрения физических приложений возмущения времени окончания скатывания $\delta\eta_*$, характеризуются длинноволновыми модами, так что с хорошей точностью выполнено неравенство $p \ll k$. На практике это обстоятельство означает, что мы можем использовать выражение (18), верное в режиме $p(\eta_* - \eta) \ll 1$, в качестве классического решения для радиального поля при анализе возмущений фазы $\delta\chi_2$. Для начала рассмотрим эффекты, возникающие в линейном порядке по “скорости” v . Уравнение движения для возмущений мнимой части имеет вид

$$(\delta\chi_2)'' - \partial_i \partial_i \delta\chi_2 - 2h^2(\chi_c^2(\eta, \mathbf{x}))^2 \cdot \delta\chi_2 \equiv (\delta\chi_2)'' - \partial_i \partial_i \delta\chi_2 - \frac{2}{[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]^2} \delta\chi_2 = 0. \quad (19)$$

На ранних временах, определяемых по отношению к космологически интересным импульсам $k(\eta_* - \eta) \gg 1$, мы имеем дело с уравнением для безмассового поля на фоне метрики Минковского. На всех временах решение Ур. (19) имеет вид

$$\delta\chi_2(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left(\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) \hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c. \right),$$

где $\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta)$ стремится к $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta}$ в асимптотическом прошлом $\eta \rightarrow -\infty$; $\hat{A}_{\mathbf{k}}$, $\hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger$ другой набор операторов рождения и уничтожения. Решение уравнения с такими начальными условиями на всех временах дается выражением:

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = -e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x}) - i\mathbf{k}\mathbf{v}(\eta_* - \eta)} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} q[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]} H_{3/2}^{(1)}[q(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)], \quad (20)$$

где $q = k + \mathbf{k}\mathbf{v}$. На поздних временах $\eta_*(\mathbf{x}) - \eta$ мнимая часть ведет себя как $\delta\chi_2 \propto [\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]^{-1}$, что совпадает по форме с (13). Таким образом, возмущение фазы замораживается на значении [51]:

$$\delta\theta(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\delta\chi_2(\mathbf{x}, \eta)}{\text{Re } \chi(\mathbf{x}, \eta)} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \frac{h}{4\pi^{3/2}(k + \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})} \hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c., \quad (21)$$

где мы опустили неважный общий фазовый множитель.

Для вычисления наклона спектра первичных возмущений в модели с промежуточной стадией нам также понадобится выражение для возмущений фазы в порядке v^2 . Используя аналогию с лоренцевым бустом, выпишем выражение для мнимой части поля χ с учетом поправок порядка v^2 [51],

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{iq_{||}\gamma(x_{||} + v\eta) + i\mathbf{q}^T \mathbf{x}^T - iq\gamma\eta_*(0)} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \gamma q[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]} H_{3/2}^{(1)}[\gamma q(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)],$$

где индексы \parallel и T относятся к компонентам нового импульса \mathbf{q} , параллельным и нормальным к \mathbf{v} , соответственно. Новые импульсы выражаются через старые следующим образом

$$q_{\parallel} = \gamma(k_{\parallel} + kv), \quad \mathbf{q}^T = \mathbf{k}^T, \quad q = \gamma(k + k_{\parallel}v).$$

Не составляет никакого труда получить отсюда выражение для фазы на поздних временах, то есть в пределе $q(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta) \rightarrow 0$. Выпишем его с учетом поправок порядка $\partial\eta_*/k$ [51],

$$\delta\theta(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \frac{h}{4\pi^{3/2}\gamma(k + \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})} \left(1 - \frac{\pi}{2k} \frac{k_i k_j}{k^2} \partial_i \partial_j \eta_* + \frac{\pi}{6k} \partial_i \partial_j \eta_* \right) \hat{A}_{\mathbf{k}} + h.c. . \quad (22)$$

Эта формула содержит в себе всю необходимую информацию о статистической анизотропии в версии (а) модели с конформным скатыванием (без промежуточной стадии). В этом случае возмущения фазы замораживаются на значении (22) вплоть до начала горячей эпохи, когда происходит их превращение в привычные адиабатические возмущения горячей компоненты среды. В модели с промежуточной стадией, возмущения фазы продолжают эволюционировать, поскольку они все еще находятся под горизонтом по окончании конформного скатывания. В этом случае значение (22) служит начальным условием для эволюции фазы на промежуточной стадии.

2.2 Особенности эволюции на промежуточной стадии

Приступим, наконец, к подробному исследованию возмущений фазы в версии модели с промежуточной стадией [53]. Напомним, что в этом случае моды, характеризующие фазу, находятся под горизонтом по окончании скатывания. С этого момента её эволюция неотделима от общей эволюции Вселенной вплоть до момента заморозки. При этом масштабный фактор не может быть выбран произвольным образом. Действительно, возмущения фазы характеризуются плоским спектром к концу конформного скатывания, и эволюция на промежуточной стадии должна сохранить это свойство вплоть до момента заморозки первичных возмущений. Единственный способ, как это можно

осуществить—это предположить, что эволюция Вселенной описывается с хорошей степенью точности метрикой Минковского на этих временах.

На первый взгляд, это требование накладывает суровое ограничение на возможную космологическую эволюцию Вселенной. Тем не менее, существует целый ряд моделей ранней Вселенной, в которых это требование удовлетворено. Например, в моделях сжимающейся Вселенной, заполненной веществом с очень жестким уравнением состояния $p \gg \rho$. Как мы отмечали во Введении, присутствие вещества с таким необычным свойством обосновано из чисто теоретических соображений. В этом случае удастся подавить вклад анизотропий, быстро растущий в сжимающейся Вселенной [42, 44]. Вещество, характеризующееся жестким уравнением состояния, естественным образом возникает в моделях скалярного поля с отрицательным экспоненциальным потенциалом [43].

Хорошо известно, что в моделях с очень жестким уравнением состояния, спектр мощности возмущений в ведущей компоненте среды синий, то есть $\mathcal{P}(k) \propto k^2$ [45]. В частности, отсюда следует, что космологические возмущения (фаза в нашем случае) эффективно эволюционируют на фоне метрики Минковского. Предполагается, что космологические возмущения замораживаются на стадии сжатия и затем остаются неизменными вплоть до эпохи горячего Большого Взрыва, где они распадаются на ультра-релятивистские частицы тем или иным способом [12, 13].

Примечательно, что метрика Минковского естественным образом возникает также в классе моделей конформной Вселенной [54]. Мы уже кратко обсуждали основную идею такой картины Вселенной. В частности, мы указали на два частных примера реализации этой идеи: модель с “генезисом” [55] и модель Хинтербихлера–Кхури [54]. Последняя по сути не что иное как модель конформного скатывания, обобщенная на случай динамического поля ϕ . Космологическая эволюция, получающаяся в этом случае, схожа с описанной во Введении картиной сжимающейся Вселенной, заполненной веществом с очень жестким уравнением состояния. Отличие заключается в том, что отношение давления и плотности в этом случае быстро меняется со временем, а не постоянное, как в модели с отрицательным экспоненциальным потенциалом [44]. Альтернативой сжатию

в моделях конформной Вселенной является медленное расширение. Это—случай модели с “генезисом”. Более точно, Вселенная в этой модели статичная и плоская в асимптотическом прошлом, достаточно долго пребывает в этом состоянии, затем начинает быстро расширяться и в какой-то момент наступает горячая эпоха. Если эпоха конформного скатывания закончилась задолго до начала быстрого расширения Вселенной в модели с “генезисом”, тогда эволюция фазы опять протекает на фоне метрики Минковского вплоть до момента “заморозки”.

Самосогласованность модели с промежуточной стадией требует, чтобы константа f_0 была достаточно мала по сравнению с массой Планка. Мы обсудим подробнее этот вопрос в Разделе 2.3. Таким образом, мы можем исследовать эволюцию фазы на фоне метрики Минковского в промежутке $\eta_* - \epsilon < \eta < \eta_1$, где η_1 время заморозки возмущений, а $(\eta_* - \epsilon)$ время, когда радиальное поле “оседает” в точке минимума потенциала $V(|\phi|)$ в конце конформного скатывания. Для простоты мы полагаем, что $\epsilon = 0$. Поле $\delta\theta(\mathbf{x}, \eta_*)$, включая поправки от радиальных возмущений, служит начальным условием для дальнейшей эволюции на промежуточной стадии, начиная с момента времени η_* и заканчивая η_1 . Не желая иметь дело с тонкой подстройкой параметров, мы в дальнейшем предполагаем, что промежуточная стадия очень длинная,

$$k(\eta_1 - \eta_*) \gg 1 .$$

В противном случае, мы эффективно имеем дело с версией модели конформного скатывания, в которой промежуточная стадия отсутствует. Наша цель состоит в том, чтобы понять свойства фазы на момент их заморозки $\eta = \eta_1$.

В ведущем порядке по константе h , предсказания нашей модели тривиальны: возмущения фазы в момент времени $\eta = \eta_1$ гауссовы и характеризуются плоским спектром. В следующих порядках становятся существенными эффекты от взаимодействия фазы с радиальным полем во время конформного скатывания. Напомним, что длинноволновые возмущения радиуса можно включить в переопределение времени окончания скатывания, η_* . В итоге, оно становится слегка неоднородным. Такая интерпретация наиболее удобна для нас, поскольку в этом случае все феноменологические следствия модели

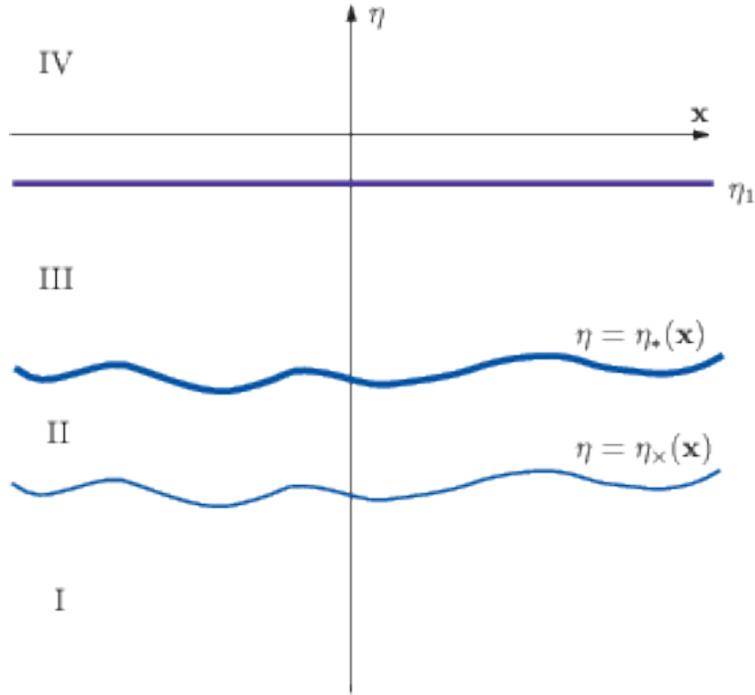


Рис. 2: Благодаря возмущениям радиального поля на конформной стадии, начальные условия для фазы задаются на искривленной гиперповерхности. Возмущения $\delta\theta$ осциллируют во времени на ранних этапах (область I), замораживаются в момент $\eta = \eta_x(\mathbf{x})$ и остаются постоянными (область II) вплоть до окончания конформного скатывания, имеющего место $\eta = \eta_*(\mathbf{x})$. Затем их эволюция возобновляется на промежуточной стадии (область III) вплоть до момента заморозки η_1 . С этих пор (область IV), возмущения $\delta\theta$ остаются постоянными вплоть до начала горячего Большого Взрыва.

с промежуточной стадией удается описать в терминах одной величины: производной времени окончания скатывания, или “скорости”.

В такой картине, нетривиальность эволюции фазы на промежуточной стадии обусловлена тем, что начальные условия для нее задаются на искривленной гиперповерхности, см. Рис. 2. В итоге, фаза $\delta\theta(\mathbf{x})$ к моменту η_1 является комбинацией двух гауссовых полей: собственно, θ и радиального поля $|\chi|$, соответственно. Это приводит к нескольким потенциально наблюдаемым эффектам, как то статистическая анизотро-

пия, негауссовость в 4-точечной функции, небольшой отрицательный наклон спектра скалярных возмущений.

2.3 Масштаб нарушения конформной инвариантности в модели с промежуточной стадией

Прежде чем переходить к детальному исследованию эволюции фазы на промежуточной стадии, конкретизируем характерные масштабы энергий нарушения конформной инвариантности, для которых возможно непротиворечивое описание в нашей модели. Конформная стадия заканчивается, когда поле ϕ принимает постоянное значение f_0 . Соответствующее этому время η_f можно оценить из

$$\frac{1}{a(\eta_f)h(\eta_f - \eta_*^{(0)})} \sim f_0 .$$

Отсюда следует, что импульсы самых коротковолновых мод, измеренные сегодня, оцениваются как

$$\frac{k_{\max}}{a_0} \sim hf_0 \cdot \frac{a(\eta_f)}{a_h} \cdot \frac{a_h}{a_0} ,$$

где a_0 современное значение масштабного фактора, тогда как a_h его значение в начале горячей эпохи. С другой стороны, согласно основному предположению модели с промежуточной стадией, космологически интересные длины волн находится под горизонтом по окончании конформного скатывания. Иначе говоря, в момент времени η_f должно выполняться условие

$$\frac{k}{a(\eta_f)} > H(\eta_f) . \quad (23)$$

Здесь $H(\eta_f)$ параметр Хаббла на момент окончания скатывания. Отсюда мы находим условие для длинноволновых возмущений

$$\frac{k}{a_0} > \frac{k_{\min}}{a_0} \sim \frac{hf_0^2}{M_{\text{PL}}} \cdot \frac{a(\eta_f)}{a_h} \cdot \frac{a_h}{a_0} . \quad (24)$$

Видно, что область импульсов, для которых возможно непротиворечивое описание, вообще говоря ограничена,

$$\frac{f_0}{M_{\text{PL}}} \cdot k_{\max} < k < k_{\max} .$$

Для того, чтобы это неравенство выполнялось для всех космологически интересных импульсов, необходимо потребовать, чтобы масштаб f_0 был достаточно мал по сравнению с массой Планка. Отношение импульсов, характеризующих самую короткую и самую длинную из космологически интересных возмущений оценивается как $k_{\max}/k_{\min} \sim (10\text{крс})^{-1}/(10\text{Гпрс})^{-1}$. Поэтому непротиворечивая картина эволюция космологически интересных возмущений в модели с промежуточной стадией предполагает сильное ограничение сверху на масштаб нарушения конформной инвариантности, $f_0 < 10^{-6} M_{\text{PL}}$.

Соответствующее ограничение может оказаться намного сильнее для конкретных случаев космологической эволюции Вселенной на промежуточной стадии. Действительно, случай сжимающейся Вселенной предполагает отношение $a(\eta_f)/a_h > 1$. Отсюда следует ограничение на масштаб f_0 вида

$$\sqrt{h} \cdot f_0 < M_{\text{PL}} \left(\frac{H_0}{T_0} \right)^{1/2} \sim 10^{-15} M_{\text{PL}} . \quad (25)$$

Даже для достаточно малых значений константы связи $h \sim 10^{-4}$ это приводит к серьёзному ограничению $f_0 < 10^6$ ГэВ. Примечательно, что оно полностью совместно с характерным масштабом энергий экспериментов на коллайдере ЛНС, $f_0 \sim 1$ ТэВ.

Напротив, отношение $a(\eta_f)/a_h$ может оказаться очень большой величиной в модели “генезиса” [55]. Поэтому приведенная выше оценка не обязана выполняться в этом случае.

2.4 Эволюция возмущений фазы на промежуточной стадии

2.4.1 Случай $v = \text{const}$

Нетривиальные феноменологические следствия модели с промежуточной стадией обязаны своим происхождением взаимодействию фазы и радиальной части поля ϕ во время конформного скатывания. Динамика эволюции фазы в конформную эпоху оставляет неизгладимый отпечаток на всей последующей эволюции космологически интересных

возмущений. В частности, форма фазовых возмущений, сложившаяся к концу конформной эпохи, служит начальным условием для эволюции на промежуточной стадии.

Начнем наше исследование с нереалистичного случая, когда весь эффект от взаимодействия с радиальными возмущениями может быть описан в терминах постоянной “скорости” \mathbf{v} . Последнее буквально означает, что можно ограничиться линейным членом в разложении времени окончания конформного скатывания,

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_*(0) - \mathbf{v}\mathbf{x}$$

В частности, это означает, что гиперповерхность Коши, на которой определены начальные условия, плоская, но слегка наклонена в системе координат (η, \mathbf{x}) . Наша задача состоит в том, чтобы найти решение уравнения Д’Аламбера в этом случае,

$$\square\delta\theta(\eta, \mathbf{x}) \equiv \partial_\eta^2\delta\theta - \partial_i\partial_i\delta\theta. \quad (26)$$

Возмущения фазы в линейном порядке по постоянной скорости \mathbf{v} (см. (21)) даются выражением

$$\delta\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta_*(\mathbf{x})) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})}, \quad \partial_N\delta\theta_{\mathbf{k}} = 0.$$

Решение имеет вид

$$\delta\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = e^{i(\mathbf{k} + k\mathbf{v})[\mathbf{x} + \mathbf{v}(\eta - \eta_*(0))] - ik\eta_*(0)} \cos[(k + k\mathbf{v})(\eta + \mathbf{v}\mathbf{x} - \eta_*(0))].$$

Его можно записать в эквивалентном виде

$$\delta\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{2} [e^{i(\mathbf{k} + 2k\mathbf{v})\mathbf{x} + i(k + 2k\mathbf{v})\eta - 2i(k + k\mathbf{v})\eta_*(0)} + e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta}]. \quad (27)$$

Первый урок, который отсюда следует, состоит в том, что решение представимо в виде суммы двух волн, распространяющихся в направлениях \mathbf{k} и в (почти) противоположном направлении; как мы увидим в дальнейшем, эта ситуация общая. Далее, если эволюция на промежуточной достаточно долгая, то есть характерные времена η удовлетворяют $(\eta - \eta_*) \gg k^{-1}$, тогда фазы двух слагаемых в Ур.(27) в точках \mathbf{x} существенно различные. Поэтому эффекты интерференционного члена от этих двух слагаемых пренебрежимо мал. Второй урок состоит в том, что волна, движущаяся в направлении \mathbf{k} ,

характеризуется импульсом \mathbf{k} , в то время как волна, движущаяся в противоположном направлении, несет импульс $(\mathbf{k} + 2k\mathbf{v})$. Эту “асимметрию” в свойствах двух, казалось бы, эквивалентных волн можно интерпретировать как доплеровский сдвиг. Понять причину появления последнего можно следующим образом. Перейдем в систему отсчета с координатами (τ, \mathbf{y}) , которая движется со скоростью \mathbf{v} по отношению к прежней системе координат,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{v}\tau, \quad \eta = \tau - \mathbf{v}\mathbf{y}$$

(напомним, что мы работаем в линейном порядке по “скорости” v). Гиперповерхность Коши $\eta = \eta_*(\mathbf{x})$ соответствует $\tau = \eta_*(0) = \text{const}$, а фаза на этой гиперповерхности определена как

$$\delta\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})} = e^{i(\mathbf{k}+k\mathbf{v})\mathbf{y}} \cdot e^{-i(k+k\mathbf{v})\eta_*(0)}.$$

Последний множитель в этой формуле—постоянный фазовый множитель, в то время как первый описывает волну с импульсом $(\mathbf{k} + k\mathbf{v})$ в новой системе отсчета. В космической системе, этот импульс смещается на $-k\mathbf{v}$ и $k\mathbf{v}$ в случае волн, движущихся в направлении \mathbf{k} и в противоположном направлении \mathbf{k} , соответственно. Отсюда и следует результат, полученный выше. Скоро мы увидим, что эта ситуация общая: в первом нетривиальном порядке по константе h , главный эффект промежуточной стадии состоит в небольшом доплеровском сдвиге и в отсутствии интерференции между волнами, распространяющимися в направлениях \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$.

2.4.2 Общая формула и вычисление методом перевала

Общее решение проблемы Коши, сформулированной в Ур. (26), приведено ниже

$$\delta\theta(x) = \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} \left\{ D^{ret}(x, y) \partial_{\mu} \delta\theta(y) - \left[\frac{\partial}{\partial y^{\mu}} D^{ret}(x, y) \right] \delta\theta(y) \right\}. \quad (28)$$

Поясним подробнее использованные в этой формуле обозначения. Интеграл здесь берется по четырехмерной гиперповерхности Σ , на которой определены начальные условия для фазы; $D^{ret}(x, y)$ суть запаздывающая функция Грина для задачи (26). Наконец,

$x = (\eta, \mathbf{x})$ координата, описывающая четырехмерное пространство, а нормаль к гиперповерхности направлена в будущее. В нашем случае первое слагаемое в интеграле отсутствует в силу условия равенства нулю производной возмущений фазы на гиперповерхности $\eta = \eta_*(\mathbf{x})$. Для запаздывающей функции Грина верно представление (применимое в интересном для нас случае $x_0 > y_0$)

$$D^{ret}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \delta[(x - y)^2]. \quad (29)$$

Проинтегрируем далее выражение (28) по радиусу компоненте и получим для случая больших $(\eta_1 - \eta_*)$

$$\delta\theta(x) = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} \frac{1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}} r \partial_r \delta\theta, \quad (30)$$

Детали этого вычисления приведены в Приложении А. Напомним, что мы все еще используем обозначение v_i для производной времени окончания скатывания, $v_i = -\partial_i \eta_*$. В формуле (30) \mathbf{n} обозначает единичный радиус-вектор, определяющий положение на единичной сфере, по которой ведется интегрирование; $r = r(\mathbf{n})$ равно расстоянию, которое свет проделывает за время эволюции на промежуточной стадии, то есть с момента $\eta = \eta_*(\mathbf{y})$ до момента заморозки фазовых возмущений, η_1 . Оно равно

$$r = \eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{n}r). \quad (31)$$

Функция $\delta\theta = \delta\theta(r, \mathbf{n})$ в правой части Ур. (30) представляет собой значение поля на гиперповерхности Коши,

$$\delta\theta(r, \mathbf{n}) = \delta\theta(\mathbf{y}, \eta_*(\mathbf{y}))$$

где

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}r.$$

Отметим, что формула (30) точная для огромных значений r .

Используя (21), получаем

$$\delta\theta(\mathbf{x}, \eta_1) = \frac{h}{4\pi^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_{\mathbf{k}} \cdot I + h.c., \quad (32)$$

где I обозначает интеграл по единичной сфере,

$$I = i \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} e^{i\psi(\mathbf{n})} \cdot r \cdot \frac{(\mathbf{k} + k\mathbf{v})\mathbf{n}}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})(k + k\mathbf{v})} \quad (33)$$

где фаза $\Psi(\mathbf{n})$ определена выражением

$$\psi = \mathbf{k}\mathbf{n}r - k\eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{n}r) = \mathbf{k}\mathbf{n}\eta_1 - (\mathbf{k}\mathbf{n} + k)\eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{n}r) . \quad (34)$$

Все величины в подынтегральном выражении в формуле (33) (включая \mathbf{v}) вычисляются в точке $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}r$. Поправки при этом оказываются порядка v^2 и $\partial v/k$.

Экспоненциальный множитель $e^{i\psi(\mathbf{n})}$ в Ур. (33) являются быстро осциллирующей функцией направления \mathbf{n} , так как ψ пропорционально огромному числу kr . Поэтому, интеграл (33) разумно вычислять методом перевала. При этом необходимо иметь ввиду следующее обстоятельство. Несмотря на то, что мы имеем дело с достаточно мягкими импульсами p , характеризующими моды $\delta\eta_*(\mathbf{x})$ (напомним, что $p \ll k$), слагаемое $k\eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{n}r)$ в фазе ψ также приводит к быстрым осцилляциям опять же в силу того, что величина r , по предположению, огромная. Поэтому мы не можем пренебрегать вторыми производными времени окончания скатывания, $\partial^2\eta_*$, в фазе ψ .

Седловые точки суть точки экстремума функции $\psi(\mathbf{n})$, где \mathbf{n} *единичный вектор*. Чтобы найти их, предположим на время, что \mathbf{n} произвольный вектор. Тогда экстремум на единичной сфере определяется как точка, где производная $\partial\psi/\partial\mathbf{n}$ параллельна вектору \mathbf{n} , то есть

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \lambda kr\mathbf{n} , \quad (35)$$

где λ число, которое мы определим позже (множитель kr в правой части введен для удобства; по сути, λkr не что иное, как множитель Лагранжа). С помощью Ур. (31) мы находим, что в линейном порядке по v ,

$$\frac{\partial r}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{v}r$$

и поэтому

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = [\mathbf{k} + (\mathbf{k}\mathbf{n} + k)\mathbf{v}] r . \quad (36)$$

Из последнего видно, что речь идет о двух седловых “точках”: одна лежит в направлении, близком к $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$, а другая в противоположном направлении ($-\hat{\mathbf{k}}$). Эти седловые точки соответствуют волнам, движущимся от поверхности Коши в направлении, противоположном \mathbf{k} и вдоль \mathbf{k} , соответственно, в полном согласии с обсуждением в Главе 2.4.1.

Вклад двух седловых точек в интеграл (33) вычислен в Приложении Б в первом порядке по величинам v и ∂v . В сумме они дают

$$I = \frac{1}{2k} \left\{ e^{i\psi_+} \left[1 - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})} + r(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)\partial_i v_j^{(+\hat{\mathbf{k}})} \right] + e^{i\psi_-} \left(1 - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}^{(-\hat{\mathbf{k}})} \right) \right\}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \psi_+(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = k\eta_1 - 2k\eta_*(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r), \\ \psi_- &= -k\eta_1, \end{aligned}$$

индексы $(+\hat{\mathbf{k}})$ и $(-\hat{\mathbf{k}})$ указывают на то, что соответствующие величины вычислены в точках

$$\mathbf{y}^{(+)} = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r \quad (38a)$$

и

$$\mathbf{y}^{(-)} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{k}}r, \quad (38b)$$

соответственно. Слагаемые в (37), помеченные “+” and “-” соответствуют седловым точкам $\mathbf{n} \approx \hat{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{n} \approx -\hat{\mathbf{k}}$; аналогичные слагаемые имеются в формуле (27) (по сравнению Ур. (21), приведенное выражение учитывает предэкспоненциальный фактор $(k + \mathbf{k}\mathbf{v})^{-1} = k^{-1}(1 - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{v})$). Заметим, что оба вклада не симметричны друг относительно друга; технически это произошло потому, что вклад $\delta\eta_*$ отсутствует в фазе (34) в случае седловой точки $\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{k}}$, но имеется для другой седловой точки $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{k}}$. Кроме того, фаза ψ_+ зависит от пространственной координаты \mathbf{x} уже в линейном порядке по константе \hbar , в то время как аналогичная зависимость отсутствует в фазе ψ_- . Мы уже обращали внимание на это обстоятельство в Главе 2.4.1: импульс, характеризующий возмущение в Ур. (37), $\mathbf{k} + \partial\psi_+/\partial\mathbf{x} = \mathbf{k} + 2k\mathbf{v}$, такой же, как и в первом слагаемом в

(27). Подчеркнем, что ввиду большой величины $kr \gg 1$ мы имеем право пренебречь поправкой порядка $\partial^2 \eta_*/k = \partial v/k$, указанной в Ур. (21), все еще удерживая поправку порядка $r\partial v$ в Ур. (37).

В завершение этого раздела обсудим область применимости метода перевала к вычислению фазовых возмущений. Как следует из Ур. (34), угловой размер области около каждой из седловых точек, который дает вклад в интеграл (33), оценивается как $\Delta\vartheta \sim (kr)^{-1/2}$. Метод перевала применим, если величина $\eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{n}r)$ не меняется существенно на этом масштабе. Отсюда следует, что мы имеем право ограничиться рассмотрением тех мод $\delta\eta_*$, чьи характерные импульсы p не превышают $pr\Delta\vartheta \lesssim 1$, т.е.

$$p \lesssim \sqrt{\frac{k}{r}}. \quad (39)$$

Это неравенство хорошо выполняется для импульсов, дающих вклад в статистическую анизотропию, см. Раздел 3.1, но накладывает ограничение на область угловых масштабов, которые дают вклад в негауссовы свойства четырехточечной функции. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся в Разделе 3.2.

3 Феноменологические следствия модели с промежуточной стадией

3.1 Статистическая анизотропия в модели с промежуточной стадией

Как видно из формул (32) и (37), возмущения фазы $\delta\theta(\mathbf{x}, \eta_1)$ на момент заморозки содержат в себе информацию о динамике в эпоху конформного скатывания. Она зашифрована в возмущении времени окончания скатывания $\delta\eta_*(\mathbf{x})$. Обсудим двухточечную корреляционную функцию $\delta\theta(\mathbf{x})\delta\theta(\mathbf{x}')$, усредненную по бесконечному набору реализаций операторов $A_{\mathbf{k}}$ и $A_{\mathbf{k}}^\dagger$, но для *фиксированной реализации* возмущения $\delta\eta_*$. Насколько такой подход оправдан, мы обсудим в конце этого Раздела. Согласно обсуждению в

конец Раздела 2.4.2, мы имеем право пренебречь интерференцией между слагаемыми с фазовыми множителями $e^{i\psi_+}$ и $e^{i\psi_-}$. Отсюда следует, что двухточечная корреляционная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \delta\theta(\mathbf{x})\delta\theta(\mathbf{x}') \rangle = & \frac{h^2}{16\pi^3} \left\{ \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{k^3} e^{i(\mathbf{k}+2k\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})})(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \cdot \left[1 - 2\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})} + 2r(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)\partial_i v_j^{(+\hat{\mathbf{k}})} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{k^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \cdot \left(1 - 2\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}^{(-\hat{\mathbf{k}})} \right) \right\} , \end{aligned} \quad (40)$$

где мы использовали тот факт, что в линейном порядке по v , верно

$$\psi_+(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) - \psi_+(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{k}}) = 2k\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') .$$

Мы ограничиваемся рассмотрением длинноволновой компоненту поля \mathbf{v} , то есть предполагаем, что выполнено неравенство $p \ll k$. В этом случае, мы можем пренебречь вариацией пространственных координат двух возмущений, поскольку оно появляется всюду в комбинации $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cdot \partial v$. В частности, мы не различаем величины $\mathbf{v}(\mathbf{x}' + \hat{\mathbf{k}}r)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r)$ в правой части Ур. (40).

Явно видно, что реальный импульс, соответствующий первому слагаемому в Ур. (40), равняется $\mathbf{k} + 2k\mathbf{v}$, тогда как импульс во втором подынтегральном выражении равен \mathbf{k} . Для того чтобы получить разложение Фурье в обычной форме, сделаем замену переменных $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + 2k\mathbf{v}$ в первом интеграле. В линейном порядке по константе h , якобиан, соответствующий этой замене переменных, дается выражением

$$\left(\det \frac{\partial \tilde{k}_i}{\partial k_j} \right)^{-1} = 1 - 2\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})} - 2k \frac{\partial v_i^{(+\hat{\mathbf{k}})}}{\partial k_i} = 1 - 2\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})} - 2\partial_j v_i^{(+\hat{\mathbf{k}})} \cdot r(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j) ,$$

где мы использовали тот факт, что ‘‘скорость’’ \mathbf{v} в действительности зависит от пространственной координаты \mathbf{x} , то есть $\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r)$. Заметим, что последнее слагаемое в якобиане сокращается с последним слагаемым в формуле (40). Окончательное выражение для спектра мощности фазовых возмущений с учетом линейной поправки по константе h имеет вид

$$\mathcal{P}_{\delta\theta}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_0 \left[1 + \hat{k}_i \left(v_i^{(+\hat{\mathbf{k}})} - v_i^{(-\hat{\mathbf{k}})} \right) \right] \equiv \mathcal{P}_0 \left[1 + Q(\hat{\mathbf{k}}) \right] , \quad (41)$$

где

$$\mathcal{P}_0 = \frac{h^2}{8\pi^2}$$

спектр мощности в ведущем порядке по константе h . Отметим, что он в два раза меньше, чем спектр мощности фазовых возмущений по окончании конформного скатывания; отличие объясняется тем, что вклад от двух седловых точек не интерферирует на временах $\eta = \eta_1$. Нетривиальное слагаемое в скобках выражения (41) зависит от *направления* импульса \mathbf{k} . При этом спектр мощности (41) симметричен относительно замены $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. В координатном пространстве это утверждение равносильно тому, что двухточечная функция (40) инвариантна относительно замены $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, как и должно быть. В определенном смысле, это можно рассматривать как проверку наших вычислений методом перевала. Длинноволновые возмущения поля $\mathbf{v}^{(\pm\hat{\mathbf{k}})}$ принимают определенные значения в наблюдаемой части Вселенной. В этом смысле они ведут себя как классическое поле и приводят к появлению статистической анизотропии.

Отметим, что правая часть уравнения (41) содержит все четные мультиполи в разложении по сферическим гармоникам,

$$Q(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{LM} q_{LM} Y_{LM}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (42)$$

где Y_{LM} сферические гармоники. Из определения $\mathbf{v}^{(\pm\hat{\mathbf{k}})} = \mathbf{v}(\mathbf{y}^{(\pm)})$, где $\mathbf{y}^{(\pm)}$ даются (38), мы находим, что в случае $L \neq 0$ коэффициенты мультипольного разложения определяются формулой

$$q_{LM} = -i \int d^3p \delta\eta_*(\mathbf{p}) \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{p}\hat{\mathbf{k}} \left(e^{ir\mathbf{p}\hat{\mathbf{k}}} - e^{-ir\mathbf{p}\hat{\mathbf{k}}} \right), \quad (43)$$

где мы пренебрегли не зависящей от $\hat{\mathbf{k}}$ фазой. Полезно заметить, что для низших мультиполей область интегрирования по \mathbf{p} оценивается как $p \sim r^{-1}$: при больших p подынтегральное выражение быстро осциллирует, а при меньших p , внутренний интеграл в (43) подавлен как p^2 . При больших L значимая область интегрирования сосредоточена вблизи $p \sim Lr^{-1}$. Поэтому приближение $p \ll (k/r)^{1/2}$ оправдано по крайней мере для не очень высоких мультиполей.

Вычисление ковариации величин q_{LM} в значительной степени повторяет вычисление ковариации температурных коэффициентов a_{lm} космического микроволнового фона (см., например, [6]). Это вычисление представлено в Приложении В. Окончательный результат приведен ниже,

$$\langle q_{LM} q_{L'M'}^* \rangle = \frac{3h^2}{\pi} \frac{1}{(L-1)(L+2)} \delta_{LL'} \delta_{MM'} , \quad \text{четные } L \neq 0 . \quad (44)$$

Мы еще вернемся к данному предсказанию модели с промежуточной стадией в Главе 4. В частности, мы его используем для того, чтобы ограничить параметр h^2 из ненаблюдения статистической анизотропии в данных космического микроволнового фона. Важно также отметить, что форма статистической анизотропии, следующая из модели с промежуточной стадией, сильно отличается от аналогичных предсказаний версии (а) модели конформного скатывания (без промежуточной стадии), а также анизотропных моделей инфляции.

3.1.1 Сравнение с моделью конформного скатывания без промежуточной стадии

В модели конформного скатывания без промежуточной стадии, вид спектра первичных возмущений следует непосредственно из Ур. (22). По причине, которая станет ясна из дальнейшего изложения, выпишем его вплоть до квадратичного порядка по параметру h ,

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_\zeta(k) [1 + Q_1(\mathbf{k}) + Q_2(\mathbf{k})] . \quad (45)$$

Здесь $Q_1(\mathbf{k})$ вклад линейный по константе h [51, 58],

$$Q_1(\mathbf{k}) = -\frac{\pi}{k} \hat{k}_i \hat{k}_j \partial_i \partial_j t_* . \quad (46)$$

Представленная здесь зависимость от направления импульса \mathbf{k} соответствует статистической анизотропии общего вида. Третье слагаемое в квадратных скобках в Ур. (45) дается выражением [51, 58]

$$Q_2(\mathbf{k}) = -\frac{3}{2} v_i v_j \hat{k}_i \hat{k}_j . \quad (47)$$

Представленная здесь зависимость от направления соответствует статистической анизотропии специального квадрупольного вида. Обратим внимание на квадратичную зависимость (47) от скорости v , что подразумевает дополнительное подавление степенью параметра h (46). Это, однако, не означает, что мы можем пренебречь вкладом квадрупольного специального вида при анализе данных. Более того, если константа h не очень мала, слагаемое (47) эффективно оставляет более сильный отпечаток на свойствах космического микроволнового фона, чем квадруполь общего вида, который характеризуется падающей амплитудой k^{-1} . На уровне космологических измерений, последнее означает подавление мультипольным номером $l \propto H_0^{-1}k$. Как следствие, в нашем распоряжении имеется совсем немного мультиполей, ”полезных“ в смысле анализа данных. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в Разделе 4, когда будем говорить об экспериментальном поиске (ограничении) статистической анизотропии в данных космического микроволнового фона.

Разложим зависимость от направления в Ур. (46) в ряд по сферическим гармоникам,

$$Q_1(\mathbf{k}) = a(k) \sum_M q_{2M} Y_{2M}(\hat{\mathbf{k}}) . \quad (48)$$

Как и в версии конформного скатывания с промежуточной стадии, коэффициенты q_{2M} случайные гауссовы величины с нулевыми средними и дисперсиями

$$\langle q_{2M} q_{2M'}^* \rangle = \frac{\pi h^2}{25} \delta_{MM'} ; \quad (49)$$

не зависящая от направления амплитуда $a(k)$ определена формулой

$$a(k) = H_0 k^{-1} . \quad (50)$$

С другой стороны, амплитуда квадрупольного специального вида характеризуется плоским спектром,

$$g_* = -\frac{3}{2} v^2 , \quad (51)$$

тогда как направление нарушения статистической изотропии (единственное в данном случае) соответствует $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v$.

3.1.2 Сравнение с моделями анизотропной инфляции

Обсудим кратко модели инфляции, приводящие к статистической анизотропии. Мы ограничимся рассмотрением частного класса моделей, включающие векторные поля, инвариантные относительно калибровочной группы $U(1)$. Статическая анизотропия в такого рода моделях достигается, если потребовать неминуальной связи между стандартным максвелловским слагаемым и полем инфлатона [25, 28]

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \cdot f^2(\phi) \cdot F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} .$$

Здесь $f(\phi)$ некоторая функция инфлатона ϕ , тогда как $F_{\mu\nu}$ тензор электромагнитного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Главное утверждение работы [25] состоит в том, что для достаточно широкого класса функций $f(\phi)$ удается добиться анизотропного расширения Вселенной. Другими словами, пространственно-временная метрика стремится к решению вида

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} [e^{-4\Sigma t} dx^2 + e^{2\Sigma t} (dy^2 + dz^2)] , \quad (52)$$

где величина Σ параметр, отвечающий за отклонение от вращательной инвариантности. Эволюция возмущений инфлатона в анизотропном пространстве (52) приводит к статистической анизотропии специального квадрупольного вида первичного спектра мощности. Выпишем соответствующий спектр мощности в общепринятом виде

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}(k) (1 + g_* \cos^2 \theta) , \quad (53)$$

где θ угол между волновым вектором \mathbf{k} и направлением $\hat{\mathbf{E}}_{cl}$ электрического поля \mathbf{E}_{cl} , которое генерируется во время инфляционной стадии. Амплитуда g_* определяется квадратом электрического поля, $g_* \sim E_{cl}^2$; точная зависимость будет приведена ниже. Заметим для дальнейшего, что спектр мощности (53) можно переписать в форме стандартного разложения по сферическим гармоникам, если воспользоваться соотношениями

$$q_{2M} = \frac{8\pi g_*}{15} Y_{2M}^*(\hat{\mathbf{E}}) , \quad g_*^2 = \frac{45}{16\pi} \sum_M |q_{2M}|^2 , \quad (54)$$

верными в приближении мыльных $g_* \ll 1$. Для того чтобы избежать недоразумений в дальнейшем, сделаем одно полезное замечание. Несмотря на то, что мы используем

понятия “электрическое” и “магнитное”, используемые определения соответствующих полей несколько отличаются от общепринятых [31],

$$E_i = -\frac{\langle f \rangle}{a^2} A'_i, \quad B_i = \frac{\langle f \rangle}{a^2} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k,$$

где $\langle f \rangle$ обозначает вакуумное ожидание функции $f(\phi)$, а черта сверху обозначает производную по конформному времени. Удобство введенных обозначений состоит в том, что электромагнитная энергия дается стандартным выражением $\rho_A = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}$ на всех временах.

Обсудим кратко условия, накладываемые на функцию $f(\phi)$, для генерации ненулевой статистической анизотропии. В ситуации со стандартным максвелловским слагаемым, то есть при условии, что $\langle f \rangle = 1$, электрическое и магнитное поля, а значит и плотность энергии электромагнитного поля, ρ_A , быстро падают со временем, $\rho_A \propto a^{-4}$. Избежать это стандартное предсказание удастся в ситуации, когда функция $f(\phi)$ имеет нетривиальную структуру. Например, постоянное электрическое поле генерируется для функции $f(\phi)$, определенной ниже [25]

$$f(\phi) = e^{\frac{16c\pi}{M_{Pl}^2} \int \frac{V}{V_\phi} d\phi}, \quad c > 1,$$

где $V(\phi)$ потенциал инфлатона. В работе [25], утверждается, что случай $c = 1$ критический, то есть при $c < 1$ расширение Вселенной происходит в изотропном режиме. С другой стороны, для $c > 1$ существует нетривиальное решение для пространственно-временной метрики вида (52). При этом отклонение от изотропного случая определяется непосредственно параметром c [25]

$$\frac{\Sigma}{H} = \frac{1}{3} \frac{c-1}{c} \epsilon. \quad (55)$$

где ϵ параметр медленного скатывания. Амплитуда статистической анизотропии непосредственно связана с параметром нарушения вращательной инвариантности, $g_* \propto \Sigma/H$.

На самом деле, ненулевая статистическая анизотропия генерируется даже в случае $c = 1$ [31]. Источником статистической анизотропии при этом служат инфракрасные квантовые флуктуации электрического поля, которые эффективно ведут себя как

классическое поле после выхода за горизонт. Следовательно, моды, которые выходят за горизонт до момента $N_{CMB} \approx 60$ в терминах числа e -фолдингов, создают дополнительный анизотропный фон для флуктуаций инфлатона. Для того чтобы учесть этот новый источник, указанный в работе [31], необходимо исследовать эволюцию возмущений инфлатона в полном электрическом поле,

$$\mathbf{E}_{cl} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{IR} .$$

Здесь \mathbf{E}_0 следует из классических уравнений движения, тогда как \mathbf{E}_{IR} происходит из вакуумных квантовых флуктуаций, которые классикализуются и усиливаются до момента N_{CMB} , соответствующего выходу возмущений инфлатона за горизонт. Отсюда, обозначение “IR”. Отметим, что \mathbf{E}_{IR} случайное гауссово поле, характеризующееся нулевым средним и дисперсией [31]

$$\langle \mathbf{E}_{IR}^2 \rangle = \frac{9H^4}{2\pi^2} N ; \quad (56)$$

N обозначает число e -фолдингов от начала инфляции и до момента N_{CMB} , т.е. $N = N_{tot} - N_{CMB}$, где N_{tot} полное число e -фолдингов во время инфляции.

Принимая во внимание оба источника статистической анизотропии, классический и квантовый, выражение для амплитуды g_* имеет вид [31],

$$g_* = -\frac{24}{\epsilon} \cdot \frac{E_{cl}^2}{V(\phi)} \cdot N_{CMB}^2 . \quad (57)$$

Весьма нетривиальным обстоятельством, следующим из этой формулы, является большая величина генерируемой статистической анизотропии [25, 31]. Так, амплитуда $g_* = \mathcal{O}(1)$ получается уже для отношения ρ_A/V порядка $\mathcal{O}(10^{-5})$. Вообще говоря, естественный выбор параметров модели предполагает значительно большее значение электромагнитной энергии ρ_A . Первое, что обращает на себя внимание,—фактор N в Ур. (56), который предполагается очень большим числом в общепринятых инфляционных моделях в режиме медленного скатывания [7, 6]. Однако, как мы увидим в Разделе 4, амплитуда g_* сильно ограничена экспериментальными данными, что предполагает тонкую подстройку длительности инфляционной стадии $N_{tot} \sim N_{CMB}$. Далее, классическое

поле \mathbf{E}_0 непосредственно связано с потенциалом инфлатона $V(\phi)$,

$$E_0^2 = \frac{c-1}{c} V(\phi) \epsilon. \quad (58)$$

Подставляя это соотношение в Ур. (57), мы заключаем, что параметр c также нуждается в тонкой подстройке. Так, амплитуда g_* порядка единицы получается уже для значений $c-1 \sim 10^{-5}$.

Как следует из обсуждения в этом Разделе, в случае если классическое электрическое поле играет непосредственную роль для генерации статистической анизотропии, существует непосредственная связь между параметрами модели и амплитудой g_* . С другой стороны, такая связь отсутствует, если ненулевая амплитуда g_* обязана своим происхождением квантовым флуктуациям электрического поля \mathbf{E}_{IR} . Игнорируя ситуации с тонкой подстройкой полей \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_{IR} , мы рассмотрим два случая, **I**) $E_0 \gg E_{IR}$, и, следовательно, $E_{cl} \rightarrow E_0$, который получается в пределе $N_{tot} \rightarrow N_{CMB}$.

В этом случае, подставляя Ур. (58) в Ур. (57), мы получаем для амплитуды статистической анизотропии

$$g_* = -24 \cdot \frac{c-1}{c} \cdot N_{CMB}^2. \quad (59)$$

II) $E_0 \ll E_{IR}$, и, следовательно, $E_{cl} \rightarrow E_{IR}$. Этот случай имеет место при $c \rightarrow 1$.

Выражение для амплитуды в этом случае имеет вид,

$$g_* = -\mathbf{a}^2, \quad \mathbf{a} = 24 \cdot \Delta_\zeta \cdot N_{CMB} \cdot \frac{\mathbf{E}_{IR}}{\sqrt{2\langle E_{IR}^2 \rangle_1}}, \quad (60)$$

где мы использовали хорошо известные соотношения, верные в режиме медленного скатывания,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} V(\phi), \quad \Delta_\zeta \equiv \sqrt{\mathcal{P}_\zeta} = \sqrt{\frac{H^4}{4\pi^2 \dot{\phi}^2}}, \quad \frac{\dot{\phi}^2}{2V} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Индекс '1' обозначает, что величина $\langle \mathbf{E}_{IR}^2 \rangle$ вычислена в формальном пределе, когда полное число e -фолдингов равно $N_{tot} = N_{CMB} + 1$. Удобство вектора \mathbf{a} , введенного в Ур. (60), состоит в том, что его компоненты a_i подчиняются гауссовой статистике (в отличие от амплитуды g_*) с нулевыми средними и дисперсиями,

$$\langle \mathbf{a}_i^2 \rangle = 96 \cdot \mathcal{P}_\zeta \cdot N_{CMB}^2 \cdot N. \quad (61)$$

Замечательно, что в случае **II** статистическая анизотропия, следующая из инфляции, аналогична предсказанию версии модели конформного скатывания, рассмотренного в предыдущем Разделе. Это верно с точностью до присутствия квадрупольного общего вида, вклад которого в свойства космического микроволнового фона в любом случае пренебрежимо мал. Формально приравнивая вакуумные средние амплитуд (60) и (51), мы заключаем, что “дуальность” между инфляцией и моделью конформного скатывания имеет место с точностью до замены

$$h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda} \leftrightarrow \frac{512\pi^2}{3} \mathcal{P}_\zeta N_{CMB}^2 N. \quad (62)$$

Мы воспользуемся этим простым наблюдением в Разделе 4 для того, чтобы ограничить длительность анизотропной инфляции.

3.2 Негауссовость

Вернемся к модели конформного скатывания с промежуточной стадией. Вариация величины $\mathbf{v}^{(\pm\hat{\mathbf{k}})}$ на *больших* угловых масштабах приводит к статистической анизотропии. С другой стороны, вариация $\mathbf{v}^{(\pm\hat{\mathbf{k}})}$ на меньших угловых масштабах приводит к негауссовости в четырехточечной функции. Различие этих двух режимов состоит в том, что на малых угловых масштабах начинают проявляться квантовые свойства величины $\mathbf{v}^{(\pm\hat{\mathbf{k}})}$. В этом случае мы имеем дело с большим количеством ее реализаций в части Вселенной с конформным размером k^{-1} . Целесообразно провести усреднение по этим реализациям.

Заметим, что при фиксированном $\Delta\vartheta$, область импульсов, задействованных в вычислении методом перевала, оценивается как $p \sim (r\Delta\vartheta)^{-1}$. Поэтому наше приближение $p \ll (k/r)^{1/2}$ верно при условии, что угловой масштаб $\Delta\vartheta$ не очень мал. Мы еще вернемся к обсуждению этого вопроса в конце Раздела.

Перейдем к непосредственному вычислению высших корреляционных функций величины $\delta\theta(\mathbf{x})$ (как и прежде, мы не выписываем аргумент η_1 для удобства). Ясно, что трехточечная функция поля, имеющего структуру (32), где I не содержит операторов $A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}}^\dagger$, равна нулю. Нетривиальный результат получается на уровне четырехточечной

функции. Это—общее следствие моделей конформного скатывания. Чтобы вычислить четырехточечную функцию, используем формулу (37). Повторяя во многом рассуждения в начале Раздела 3.1, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \delta\theta(\mathbf{k})\delta\theta(\tilde{\mathbf{k}})\delta\theta(\mathbf{k}')\delta\theta(\tilde{\mathbf{k}}') \rangle &= \frac{1}{4\pi k^3} \frac{1}{4\pi k'^3} \mathcal{P}_0^2 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}})\delta(\mathbf{k}' + \tilde{\mathbf{k}}') \\ &\times \left[1 + G_{NG}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') + G_{NG}(-\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') + G_{NG}(\hat{\mathbf{k}}, -\hat{\mathbf{k}}') + G_{NG}(-\hat{\mathbf{k}}, -\hat{\mathbf{k}}') \right] \\ &\quad + (\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}') + (\tilde{\mathbf{k}} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}') , \end{aligned} \quad (63)$$

Негауссовы свойства описываются функциями G_{NG} . В частности,

$$G_{NG}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') = \langle \hat{k}_i \left(v_i^{(+\hat{\mathbf{k}})} - v_i^{(-\hat{\mathbf{k}})} \right) \cdot \hat{k}'_l \left(v_l^{(+\hat{\mathbf{k}}')} - v_l^{(-\hat{\mathbf{k}}')} \right) \rangle . \quad (64)$$

Аналогичные выражения с точностью до очевидной замены переменных верны для остальных функций G_{NG} . Флуктуации величин $\mathbf{v}^{(\pm\hat{\mathbf{k}})}$ на малых угловых масштабах проявляются, когда импульсы \mathbf{k} и \mathbf{k}' либо параллельны друг другу, либо антипараллельны. Последний случай на самом деле идентичен первому, ввиду инвариантности четырехточечной функции относительно замены $\mathbf{k} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай почти параллельных \mathbf{k} и \mathbf{k}' , то есть

$$|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'| \ll 1 .$$

Ввиду того, что спектр мощности случайного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ плоский, ведущий вклад в негауссовость логарифмически усилен. Выражение (64) включает комбинацию

$$\mathbf{v}^{(+\hat{\mathbf{k}})} - \mathbf{v}^{(-\hat{\mathbf{k}})} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r) - \mathbf{v}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{k}}r) .$$

Поэтому интеграл по импульсам, характеризующим поле \mathbf{v} обрзан при значениях $p \sim r^{-1}$. В любом случае, у нас нет возможности количественно охарактеризовать вклад от мод с такими длинными волнами в силу космологической неопределенности. Поэтому впредь мы рассматриваем только вклад от возмущений с импульсами $p > r^{-1}$. Вспомогательная выражение (14) для спектра мощности $\delta\eta_*$, мы пишем

$$G_{NG} = 2 \langle \hat{k}_i v_i^{(+\hat{\mathbf{k}})} \cdot \hat{k}'_j v_j^{(+\hat{\mathbf{k}}')} \rangle_{p \gtrsim r^{-1}} = 2 \cdot \frac{9h^2}{8\pi^2} \int_{p \gtrsim r^{-1}} \frac{d^3p}{4\pi p^5} \hat{k}_i \hat{k}'_j p_i p_j e^{i\mathbf{p}(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')r} .$$

Не представляет особого труда взять интеграл по направлениям вектора \mathbf{p} . Далее, используя очевидное равенство $\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') = O((\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')^2)$, мы получаем

$$G_{NG} = -\frac{9h^2}{4\pi^2} \int_{x \gtrsim |\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'|} \frac{dx}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)',$$

где $x = rp|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'|$. В лидирующем логарифмическом порядке, мы имеем

$$G_{NG} = \frac{3h^2}{4\pi^2} \log \frac{\text{const}}{|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'|}.$$

Константа в этом выражении порядка 1; она не может быть надежно вычислена в силу все той же космологической неопределенности. Наконец, заметим, что правая часть формулы (64) симметрична относительно замены $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, так что все четыре слагаемых в (63) дают одинаковый вклад. Поэтому, четырехточечная функция в режиме $|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'| \ll 1$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle \delta\theta(\mathbf{k})\delta\theta(\tilde{\mathbf{k}})\delta\theta(\mathbf{k}')\delta\theta(\tilde{\mathbf{k}}') \rangle &= \frac{1}{4\pi k^3} \frac{1}{4\pi k'^3} \mathcal{P}_0^2 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}})\delta(\mathbf{k}' + \tilde{\mathbf{k}}') \cdot \left[1 + F_{NG}(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') \right] \\ &\quad + (\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}') + (\tilde{\mathbf{k}} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}'), \end{aligned}$$

где

$$F_{NG}(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') = \frac{3h^2}{\pi^2} \log \frac{\text{const}}{|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'|}. \quad (65)$$

Сделаем одно замечание в завершение этого Раздела. Представленное выше вычисление, верно постольку, поскольку верна оценка $x \equiv rp|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'| \sim 1$ всюду в области применимости метода перевала, то есть в режиме $p \ll (k/r)^{-1/2}$, см. (39). Поэтому логарифмическое приближение (65) остается в силе в области $|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'| \gtrsim (kr)^{-1/2}$. При меньших углах между $\hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{k}}'$, функция $F_{NG}(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')$ скорее всего сглаживается. Логарифмическое усиление определено отсутствует в режиме $|\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'| \lesssim (kr)^{-1}$, так как моды с импульсами p , большими космологически интересных импульсов k , не дают вклад в эффект. Эти наблюдения оставляют надежду, что величина r потенциально измерима в экспериментах.

3.3 Наклон спектра скалярных возмущений

Покажем, что взаимодействие возмущений фазы с радиальными возмущениями также приводит к небольшому наклону спектра мощности первичных возмущений. С этой целью вернемся к обсуждению двухточечной корреляционной функции $\langle \delta\theta(\mathbf{x})\delta\theta(\mathbf{x}') \rangle$. Несмотря на то, что интеграл (30) насыщается вблизи $\mathbf{n} = \pm \hat{\mathbf{k}}$, вычисление методом перевала больше не работает. Причина состоит в том, что для вычисления наклона спектра важны моды поля $\delta\eta_*$ с импульсами $p \ll k$, которые не обязательно соответствуют очень длинным волнам (39). Тем не менее, эта проблема не столь острая ввиду того, что нас в первую очередь будет интересовать логарифмический эффект. Попробуем понять на качественном уровне, что является наиболее важным для вычисления величины $\langle \delta\theta(\mathbf{x})\delta\theta(\mathbf{x}') \rangle$ в данном случае. Для этого разложим полное выражение (30) в ряд по величине $\delta\eta_*$. В принципе, вакуумные средние типа $\langle \delta\eta_* \cdot \partial_i \partial_j \delta\eta_* \rangle$ могут привести к появлению больших логарифмов. Напомним, тем не менее, что сдвиг по времени сам по себе не имеет физического смысла, поэтому слагаемые такого типа нигде не появляются явно (по схожей причине, не дают вклад корреляции поля $\delta\eta_*$ с самой собой и со "скоростью" \mathbf{v} , которые потенциально могли бы привести к степенной зависимости спектра мощности). Поэтому законно пренебречь поправками вида $\partial_i \partial_j \delta\eta_*$ в Ур. (22). Отсюда следует, что мы имеем право рассматривать величину \mathbf{v} в Ур. (22) как константу, не зависящую от пространственных координат. В частности, это подразумевает, что начальные условия для фаз эффективно определены на гиперповерхностях $\eta_* = \eta_*(\mathbf{y}_\pm) - \mathbf{v}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\pm)$, где $\mathbf{y}_\pm = \mathbf{x} \pm \hat{\mathbf{k}}r$. "Скорости" при этом вычисляются в точках $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\pm$, поэтому $\mathbf{v}(\mathbf{y}_\pm)$ является нелинейной функцией $\delta\eta_*$. Действительно, согласно Ур. (31), координаты точек \mathbf{y}_\pm зависят от $\delta\eta_*$ через r . Это обстоятельство будем иметь "роковое" значение в смысле вычисления наклона спектра мощности. Договоримся накладывать ограничение $p < k$ на импульсы p мод, характеризующих поле $\delta\eta_*$ при вычислении спектра мощности $\mathcal{P}_{\delta\theta}(k)$

Поскольку мы имеем право держать "скорость" \mathbf{v} постоянной в пространстве, решение задачи Коши можно получить явно, аналогично тому, как мы это делали в Раз-

деле 2.4.1. Отличие состоит в том, что нам понадобятся поправки второго порядка по v . Начальные условия для эволюции на фоне метрики Минковского даются формулой (22). В дальнейшем представляется удобным работать в терминах переменных \mathbf{z} и τ :

$$z_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} + v\eta) , \quad \mathbf{z}_T = \mathbf{x}_T , \quad \tau = \gamma(\eta + vx_{\parallel}) ,$$

где \parallel и T обозначают компоненты, параллельные и ортогональные скорости, соответственно. В новых координатах начальные данные определяются на временах $\tau = \tau_{\pm} = \text{const}$, и $\partial_{\tau}\delta\theta = 0$ на этой гиперповерхности. Выразим старые переменные \mathbf{x} и η в терминах \mathbf{z} и τ , а затем подставим их обратно в Ур. (22). Опуская при этом общий, не зависящий от \mathbf{z} , фазовый множитель, который в любом случае выпадает при вычислении двухточечной функции, мы получаем начальные условия следующего вида

$$\delta\theta(\mathbf{z}, \tau_{\pm}) \propto \int \frac{1}{\gamma(k + \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}} A_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} + h.c. , \quad \partial_{\tau}\delta\theta = 0 , \quad (66)$$

где

$$q_{\parallel} = \gamma(k_{\parallel} + kv) , \quad \mathbf{q}_T = \mathbf{k}_T .$$

Решение уравнения для безмассового скалярного поля с такими начальными данными в пространстве Минковского приведено ниже

$$\delta\theta \propto \int \frac{1}{\gamma(k + \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}} \cos [q(\tau - \tau_{\pm})] A_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} + h.c. , \quad (67)$$

где $q = \gamma(k + k_{\parallel}v)$. Вновь это решение описывает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях и не интерферирующих при $\eta = \eta_1$. Рассмотрим каждую из волн по отдельности.

Для волны, движущейся в направлении, противоположном \mathbf{k} , выполнено

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{z} + iq\tau} = e^{i\gamma^2(k_{\parallel} + 2kv + k_{\parallel}v^2)x_{\parallel} + i\mathbf{k}_T\mathbf{x}_T + i\varphi} , \quad (68)$$

где φ фаза, опять же несущественная в смысле вычисления двухточечной функции $\delta\theta$. Реальный же импульс, характеризующий волну, как обычно несколько отличается от \mathbf{k} , и дается выражением

$$\tilde{k}_{\parallel} = \gamma^2(k_{\parallel} + 2kv + k_{\parallel}v^2) , \quad \tilde{\mathbf{k}}_T = \mathbf{k}_T .$$

Заметим, что вплоть до поправок порядка v^2 , выполнено $\tilde{k}_{||} = \gamma_{2v}(k_{||} + 2kv)$, где $\gamma_{2v} = (1 - 4v^2)^{-1/2}$ стандартный лоренцевский фактор, соответствующий скорости $2v$. Заметим, что величина $A_{\mathbf{k}} d^3k / \sqrt{2\tilde{k}}$ инвариантна относительно преобразований Лоренца, мы получаем вклад первой волны в возмущение фазы в точке \mathbf{x} (мы вновь опускаем неважный фазовый множитель)

$$\delta\theta(\mathbf{x}) \propto \int \frac{1}{\gamma(k + \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i\tilde{\mathbf{k}}\mathbf{x}} A_{\tilde{\mathbf{k}}} \frac{d^3\tilde{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\tilde{k}}} + h.c. ,$$

где $k_{||} = \gamma_{2v}(\tilde{k}_{||} - 2\tilde{k}v)$, и, соответственно, $k = \gamma_{2v}(\tilde{k} - 2\tilde{k}_{||}v)$. Раскладывая далее это выражение вплоть до второго порядка по \mathbf{v} , мы получаем вклад волны, движущейся в направлении, противоположном \mathbf{k} , в спектр мощности

$$\mathcal{P}_{\delta\theta}(\tilde{k}) \propto 1 + 2 \left(\frac{\tilde{k}_i}{\tilde{k}} \langle v_i \rangle + \frac{\tilde{k}_i \tilde{k}_j}{\tilde{k}^2} \langle v_i v_j \rangle - \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle \right) + \frac{\tilde{k}_i \tilde{k}_j}{\tilde{k}^2} \langle v_i v_j \rangle .$$

Слагаемое в скобках по сути корреляционная функция фазовых возмущений в лидирующем порядке по константе h , то есть $\delta\theta^{(0)}$, и поправки $\delta\theta^{(1)}$, включающей линейный и квадратичный слагаемые по v , в то время как последнее слагаемое определяется исключительно корреляцией между поправками, $\langle \delta\theta^{(1)} \delta\theta^{(1)} \rangle$. Мы видим, что квадратичные член полностью сокращаются (в этом случае можно положить $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$), и спектр мощности определяется только средним "скорости",

$$\mathcal{P}_{\delta\theta} \propto 1 + 2\hat{k}_i \langle v_i \rangle .$$

Напомним, что "скорость" должна быть вычислена в точке $\mathbf{y}_+ = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r$, где $r = \eta_1 - \eta_*^{(0)} - \delta\eta_*(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r)$, так что

$$v_i(\mathbf{y}_+) = v_i[\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}(\eta_1 - \eta_*^{(0)})] - \partial_j v_i \cdot \hat{k}_j \delta\eta_* .$$

Вакуумное среднее от первого слагаемого в правой части равно нулю, в то время как второе слагаемое дает

$$\langle v_i(\mathbf{y}_+) \rangle = -\hat{k}_j \int \frac{d^3p}{4\pi p^3} p_i p_j \mathcal{P}_{\delta\eta_*}(p) = -\hat{k}_i \cdot \frac{3h^2}{8\pi^2} \log(kr) ,$$

Здесь мы учли, что интересная область импульсов p варьируется в пределах $r^{-1} \ll p \ll k$. Таким образом, вклад от первой волны в спектр мощности окончательно дается выражением

$$\mathcal{P}_{\delta\theta} \propto 1 - \frac{3h^2}{4\pi^2} \log(kr) . \quad (69)$$

Рассмотрим теперь волну, которая движется в направлении \mathbf{k} . На временах η_1 мы можем записать фазу этой волны в виде

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{y} - ip\tau} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\varphi} . \quad (70)$$

Видно, что реальный импульс, характеризующий вторую волну, совпадает с \mathbf{k} . Отсюда, ее вклад в возмущение фазы дается выражением

$$\delta\theta(\mathbf{x}) \propto \int \frac{1}{\gamma(k + \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{z}} A_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} + h.c. .$$

Действуя как и прежде, мы получаем вклад от второй волны в спектр мощности в виде

$$\mathcal{P}_{\delta\theta} \propto 1 - 2\hat{k}_i \langle v_i \rangle ,$$

где "скорость" вычисляется в точке $\mathbf{y}_- = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{k}}r$, а $r = \eta_1 - \eta_*^{(0)} - \delta\eta_*(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{k}}r)$. Мы заключаем, что вклад второй волны в спектр мощности в точности имеет вид (69).

Результат (69) показывает, что спектр фазовых возмущений $\delta\theta$, а значит и спектр мощности адиабатических возмущений слегка наклонен. Если это единственный источник наклона спектра в модели, тогда спектральный индекс равен $n_s = 1 - \frac{3h^2}{4\pi^2}$. Тем не менее, как было указано в Разделе 1, возможны другие источники наклона спектра мощности.

3.4 3-точечная функция

3.4.1 Предварительные замечания

Как мы неоднократно упоминали, 3-точечная функция равна нулю в оригинальной версии модели конформного скатывания. Это следует из инвариантности относительно

преобразования фазового поля $\theta \leftrightarrow -\theta$, которая в свою очередь обязана инвариантности модели относительно преобразований глобальной группы $U(1)$. Однако, данное предположение не есть необходимое. В частности, инвариантность относительно группы $U(1)$ может быть явно нарушена ненулевым потенциалом поля θ . Заметим, что такая ситуация хорошо мотивирована из соображений ненулевого наклона спектра первичных возмущений. Действительно, небольшой наклон спектра, который генерируется за счет взаимодействия между фазовыми и радиальными возмущениями, слишком мал, чтобы объяснить наблюдаемое значение. С другой стороны, предположение о ненулевом потенциале поля θ позволяет избежать противоречия с экспериментальными данными [54]. Далее, если потенциал $V(\theta)$ включает в себя самодействие третьего и более высокого порядка по полю θ , мы приходим к ненулевой 3-точечной функции как необходимому следствию модели.

Вычисление 3-точечной функции в рамках модели с промежуточной стадией можно естественным образом разбить на два этапа: 1) вычисление 3-точечной функции, генерируемой во время конформной фазы [57]; 2) учет эффектов, связанных с эволюцией на промежуточной стадии. Замечательно, что последние независимы от частных деталей эволюции на более ранних временах. Это наблюдение, сделанное в работе [71], позволяет существенным образом обобщить изложение данного раздела на более широкий класс моделей. В свете этого замечания, мы предпочитаем не привязывать наше дальнейшее обсуждение, вплоть до конца этой Главы, к модели конформного скатывания.

Предположим, что возмущения поля θ эволюционирует согласно качественной картинке, представленной на Рис. 3.4.1. Для простоты, допустим также, что возмущения $\delta\theta$ безмассовые в Минковскую эпоху и не взаимодействуют с другими полями. Сделанные предположения фиксируют эволюцию возмущений $\delta\theta$ с точностью до масштабной инвариантной амплитуды $\delta\theta(\mathbf{k}, \eta_*)$, определяемой начальными условиями,

$$\delta\theta(\mathbf{k}, \eta) = \delta\theta(\mathbf{k}, \eta_*) \cos k(\eta_* - \eta) .$$

Здесь \mathbf{k} обозначает импульс частной космологической моды в пространстве Фурье; η конформное время, пробегающее значения от η_* и до момента выхода за горизонт η_{ex} . В

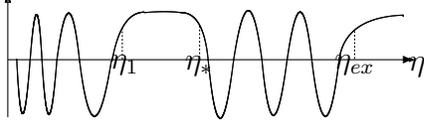


Рис. 3: Качественная картина поведения скалярных возмущений. I. Эпоха генерации: $\eta < \eta_*$. К концу данной эпохи, возмущения замораживаются (времена $\eta \sim \eta_1$) и приобретают почти плоский спектр мощности. II. Промежуточная стадия: $\eta_* < \eta < \eta_{ex}$. Возмущения осциллируют на фоне почти плоского пространства-времени. III. Поздняя стадия: $\eta > \eta_{ex}$. Возмущения вновь замораживаются в момент времени $\eta = \eta_{ex}$. После η_{ex} эволюция возмущений стандартная и на картинке не представлена. Горячая стадия космологической эволюции начинается в какой-то момент после η_{ex} .

дальнейшем, мы положим время η_{ex} равным нулю, без ограничения общности, $\eta_{ex} = 0$.

Аналогично, форма первичного биспектра определена с точностью до функции $A(k_1, k_2, k_3)$, генерируемой до начала длинной Минковской эволюции. Ниже представлено соответствующее выражение в терминах первичного Ньютоновского потенциала $\Phi(\mathbf{k})$,

$$\langle \Phi(\mathbf{k}_1)\Phi(\mathbf{k}_2)\Phi(\mathbf{k}_3) \rangle = \left(\frac{\pi \mathcal{P}_\Phi}{2} \right)^{3/2} A(k_1, k_2, k_3) \delta \left(\sum_i \mathbf{k}_i \right) \cos(k_1 \eta_*) \cos(k_2 \eta_*) \cos(k_3 \eta_*) . \quad (71)$$

Здесь \mathcal{P}_Φ обозначает спектр мощности, ассоциированный со скалярным возмущением $\Phi(\mathbf{k})$ (в дальнейшем, мы пренебрегаем небольшим спектральным наклоном); дельта-функция отвечает за сохранение импульса; нестандартный нормировочный префактор выбран из соображений дальнейшего удобства. В нашем последующем обсуждении мы не конкретизируем вид функции $A(k_1, k_2, k_3)$, которую мы единственно предполагаем достаточно гладкой функцией своих аргументов.

Эффекты Минковской эволюции особенно хорошо видны на уровне температурных флуктуаций космического микроволнового фона. Один эффект состоит в подавлении 3-точечной функции температурных флуктуаций с длиной (квадратом длины) промежуточной стадией, по сравнению с ситуацией, где длина промежуточной стадии равна

нулю. В частности, биспектр стремится к нулю в пределе бесконечной длительности промежуточной стадии. С другой стороны, величина биспектра может оказаться достаточно большой при достаточно короткой промежуточной стадии. Другое интересное проявление эволюции на промежуточной стадии—осцилляции биспектра, характеризующиеся грубо постоянной амплитудой. Данное обстоятельство замечательно в том смысле, что оно позволяет отличить биспектр генерируемый в моделях с промежуточной стадии от аналогичных предсказаний инфляционных моделей, имеющих дело с невакуумными начальными условиями [17, 18, 19, 20, 21]. В последних осцилляции биспектра характеризуются амплитудой, усиленной в так называемом пределе сплющенного треугольника и быстро убывающей вдали от последнего.

В гармоническом представлении, температурные флуктуации микроволнового фона определены формулой

$$\Theta_{lm} = \int d\mathbf{n} \delta T(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) ,$$

где $\delta T(\mathbf{n})$ температурная флуктуация в реальном пространстве, и \mathbf{n} обозначает направление на небесной сфере. Коэффициенты a_{lm} связаны с первичным Ньютоновым потенциалом $\Phi(\mathbf{k})$ формулой

$$\Theta_{lm} = 4\pi i^l \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \Delta_l(k\eta_0) \Phi(\mathbf{k}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) ,$$

где $\Delta_l(k\eta_0)$ стандартные функции перехода; $\hat{\mathbf{k}}$ направлением, ассоциированное с импульсом \mathbf{k} космологической моды. Используя Ур. (71) и интегрируя по импульсу \mathbf{k}_3 , мы получаем общее выражение для биспектра микроволнового фона

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle &= i^{l_1+l_2+l_3} \mathcal{P}_\Phi^{3/2} \int d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(|\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2|) \times \\ &\times Y_{l_1 m_1}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2 m_2}^*(\theta_2, \phi_2) Y_{l_3 m_3}^*(\theta_3, \phi_3) \times \\ &\times \cos(y_1 z) \cos(y_2 z) \cos(|\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2| z) \times \\ &\times A(y_1, y_2, |\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2|) + (l_1, l_2 \leftrightarrow l_3) . \end{aligned} \quad (72)$$

Мы ввели здесь обозначения

$$\mathbf{y}_i \equiv \mathbf{k}_i \eta_0, \quad z \equiv -\frac{\eta_*}{\eta_0} ,$$

и

$$A(y_1, y_2, y_3) \equiv \frac{A(k_1, k_2, k_3)}{\eta_0^6}.$$

Для конкретности, в дальнейшем мы держим мультипольные номера l_1 и l_3 в качестве наименьшего и наибольшего, соответственно. Другими словами, мы предполагаем, без ограничения общности, что мультипольные номера иерархически упорядочены $l_1 < l_2 < l_3$. И еще один комментарий, перед тем как входить в детали вычислений. Введенный параметр z по предположению большой, раз мы заинтересованы в длительной промежуточной стадии, $z \gg 1$. Тем не менее, игнорируя проблемы тонкой подстройки, параметр z вполне может оказаться порядка единицы, $z \gtrsim 1$. При еще меньших значениях параметра z , тем не менее, мы рискуем войти в противоречия со свойствами первичного спектра скалярных возмущений¹.

Несмотря на достаточно сложную структуру биспектра, интеграл по углам θ_i и ϕ_i удастся взять аналитически. С этой целью, мы представляем произведение трех быстро осциллирующих косинусов как сумму

$$\begin{aligned} \cos(y_1 z) \cos(y_2 z) \cos(y_3 z) = \frac{1}{4} [& \cos\{(y_1 + y_2 + y_3)z\} + \cos\{(y_1 + y_2 - y_3)z\} + \\ & + \cos\{(y_1 - y_2 - y_3)z\} + \cos\{(y_2 - y_1 - y_3)z\}]. \end{aligned} \quad (73)$$

Вклад первого косинуса сильно подавлен, и мы его опускаем в дальнейшем изложении. Причина состоит в том, что он быстро осциллирует для достаточно больших значений параметра z и мультипольных номеров l . Аналогичная ситуация имеет место с вкладом от других косинусов в правой части, за исключением узких областей, в которых соответствующие осцилляции подавлены. Для конкретности, рассмотрим второй косинус в правой части Ур. (73). Раскладывая его аргумент вплоть до квадратичного порядка по

¹Более подробно, эволюция на промежуточной стадии приводит к модификации первичного спектра мощности космологических возмущений, сгенерированных на более ранних временах, $\mathcal{P}_\Phi \propto \cos^2 yz$. С точки зрения наблюдений, последнее подразумевает поправку $1/(lz)$ к угловому спектру мощности C_l . Для промежуточной стадии с длиной $z > 1$, поправка лежит в пределах ошибки $\sim 1/\sqrt{2l+1}$, связанной с космологической неопределенностью. Для меньших z , тем не менее, поправка может оказаться ощутимо большой в смысле малых мультиполей космического микроволнового фона.

$\delta\theta_1 \equiv \theta_1 - \theta_2$ и $\delta\phi_1 \equiv \phi_1 - \phi_2$, мы получаем

$$y_1 + y_2 - |\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2| \approx \frac{y_1 y_2}{2(y_1 + y_2)} \{(\theta_2 - \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_2 (\phi_2 - \phi_1)^2\}. \quad (74)$$

Как следует из последнего выражения, осцилляции подавлены в области

$$|\delta\theta_1| \lesssim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{and} \quad |\delta\phi_1| \lesssim \frac{1}{\sin \theta_2 \sqrt{N}}, \quad (75)$$

где N достаточно большой параметр

$$N = \frac{y_1 y_2 z}{2(y_1 + y_2)}. \quad (76)$$

Для того чтобы взять интеграл в (72), мы вновь воспользуемся методом перевала. В зависимости от длительности промежуточной стадии, мы различаем две ситуации. Так, в случае больших значений параметра z , мы пренебрегаем вариациями всех функций в Ур. (72) за исключением быстро осциллирующего косинуса. Для достаточно короткой промежуточной стадии, вариации волновых функций могут стать существенными и ими пренебрегать нельзя. Критическое значение параметра z оценивается как $z \sim l_1$. В самом деле, мы можем проинтегрировать по углам θ_1 и ϕ_1 , ассоциированным с наименьшим мультипольным номером l_1 вначале. В этом случае вариации $Y_{l_2 m_2}$ не имеют значения. Вариация сферической гармоники, ассоциированной с наибольшим мультипольным номером l_3 оценивается как $|\delta Y| \sim |l_3 Y_{l_3 m_3} \delta\theta_3| \sim |l_1 Y_{l_3 m_3} \delta\theta_1|$. Последняя оценка здесь следует из соотношения треугольника $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$. См. также Ур. (165) и (166) в Приложении Г. Мы заключаем, что вариация сферической гармоники $Y_{l_3 m_3}$ незначительна в области (75) при условии, что длительность промежуточной стадии больше, чем l_1 .

3.4.2 Вычисление методом перевала

Рассмотрим вначале случай длинной промежуточной стадии. В этой ситуации, вариации сферических гармоник пренебрежимо малы и седловые точки определяются из Ур. (74): $\delta\bar{\theta}_1 = 0$ и $\delta\bar{\phi}_1 = 0$, в терминах переменных $\delta\theta_1$ и $\delta\phi_1$. Интегрируя в окрестности седловых точек, мы раскладываем биспектр (72) в ряд по степеням маленькой величины $1/z$.

На первый взгляд, первое слагаемое в данном разложении порядка $1/z = -\eta_0/\eta_*$. В действительности, подавление сильнее. Для того чтобы показать это явно, рассмотрим интеграл по углам θ_1 и ϕ_1 в Ур. (72). Мы представляем произведение трех косинусов как сумму, и оставляем только второй косинус в правой части (73) для конкретности. Используя далее Ур. (74), мы получаем

$$\begin{aligned} & \int d\theta_1 d\phi_1 \cos \left[\frac{y_1 y_2 z}{2(y_1 + y_2)} \left((\theta_1 - \theta_2)^2 + \sin^2 \theta_2 (\phi_1 - \phi_2)^2 \right) \right] = \\ & = \frac{2(y_1 + y_2)}{y_1 y_2 z \sin \theta_2} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} du \cos u^2 \right)^2 - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} du \sin u^2 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Данное выражение равно нулю, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du .$$

Отсюда следует, что ведущий вклад в биспектр порядка $1/z^2$. Для того чтобы вычислить биспектр в этом порядке, разложим все медленно меняющиеся функции углов θ_1 и ϕ_1 в Ур. (78) вплоть до квадратичных слагаемых по $\delta\theta_1$ и $\delta\phi_1$. В то же время, аргумент быстро осциллирующего косинуса должен быть разложен вплоть до порядков $N(\delta\theta_1)^4$, $N(\delta\phi_1)^4$ и $N(\delta\theta_1)^2(\delta\phi_1)^2$. Соответствующие формулы представлены в Приложении Г. При этом удобно представить 3-точечную функцию как сумму двух вкладов

$$\langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle = \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle_0 + \delta \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle . \quad (77)$$

Первое слагаемое в правой части приходит от вариаций всех функций, кроме $A(y_1, y_2, y_3)$ и $\Delta_{l_3}(y_3)$. Подпись '0', подразумевает, что данное слагаемое содержит ведущий вклад в 3-точечную функцию. Второе слагаемое в правой части приходит от вариаций функций $A(y_1, y_2, y_3)$ и $\Delta_{l_3}(y_3)$. Данный вклад подавлен мультипольным номером l , как мы увидим это вскоре. Точное выражение для ведущего вклада в порядке $1/z^2$ дается формулой

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle_0 &= i^{l_1 + l_2 + l_3} \cdot \frac{\pi \mathcal{P}_\Phi^{3/2}}{4z^2} \cdot \int dy_1 dy_2 \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(y_1 + y_2) \times \\ &\times A(y_1, y_2, y_1 + y_2) \cdot B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} \cdot \left\{ y_2^2 l_1 (l_1 + 1) + y_1^2 l_2 (l_2 + 1) - \right. \\ &\left. - 2y_1 y_2 \sqrt{l_1 (l_1 + 1)} \sqrt{l_2 (l_2 + 1)} B_{l_2, -1; l_3, 0}^{l_1, 1} \left(B_{l_2 0; l_3 0}^{l_1 0} \right)^{-1} + 2y_1 y_2 \right\} ; \end{aligned} \quad (78)$$

Детали вычислений представлены в Приложении Г. Коэффициенты $B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1}$ определены как

$$B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} = \int d\phi d\theta \sin \theta Y_{l_1, m_1}^*(\theta, \phi) Y_{l_2, m_2}^*(\theta, \phi) Y_{l_3, m_3}^*(\pi - \theta, \pi + \phi). \quad (79)$$

Они могут выражены через $3j$ -символы Вигнера,

$$B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} = (-1)^{l_3} \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_3 + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Заметим, что выражение для биспектра явным образом симметрично относительно замены мультипольных номеров l_1 и l_2 . Далее, выражение (78) соответствует статистически изотропному биспектру, как это следует из свойств коэффициентов $B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1}$. Эти два наблюдения служат проверкой верности вычислений.

Поправка к биспектру за счет вариаций функций $A(y_1, y_2, y_3)$ и $\Delta_{l_3}(y_3)$ дается формулой

$$\begin{aligned} \delta \langle \Theta_{l_1, m_1} \Theta_{l_2, m_2} \Theta_{l_3, m_3} \rangle &= i^{l_1 + l_2 + l_3} \cdot \frac{\pi \mathcal{P}_\Phi^{3/2}}{2z^2} \cdot \int y_1 dy_1 y_2 dy_2 \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(y_1 + y_2) \times \\ &\times A(y_1, y_2, y_1 + y_2) \cdot B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} \times \\ &\times \left(\frac{\partial \ln A(y_1, y_2, y_3)}{\partial \ln y_3} + \frac{d \ln \Delta_{l_3}(y_3)}{d \ln y_3} \right) + (l_1, l_2 \leftrightarrow l_3), \end{aligned} \quad (81)$$

Мы предполагаем, что $A(y_1, y_2, y_3)$ медленно меняющаяся функция своих аргументов. Отсюда следует оценка для соответствующего слагаемого $\partial \ln A / \partial \ln y_3 \sim 1$. Оценка для второго слагаемого в круглых скобках Ур. (81) приведена ниже,

$$\frac{\partial \ln \Delta_{l_3}(y_3)}{\partial \ln y_3} \sim y_3 \cdot \frac{|\Delta_{l_3-1}(y_3) - \Delta_{l_3+1}(y_3)|}{|\Delta_{l_3}(y_3)|} \lesssim y_3.$$

Данная оценка следует из известного выражения для производной сферической функции Бесселя. Мы заключаем, что вклад (81) подавлен по сравнению с лидирующим вкладом (78) по крайней мере фактором $\sim l_1^{-1}$.

Ур-я (78) и (81) дают точное выражение для 3-точечной функции температурных флуктуаций микроволнового фона в порядке $1/z^2$.

В случае не очень длинной промежуточной стадии, характеризуемой сравнительно малыми значениями параметра z , то есть $z \lesssim l_1 = \min\{l_1, l_2, l_3\}$, мы не можем пренебрегать осцилляциями сферических гармоник. Следовательно, результаты предыдущего раздела, в частности, Ур. (78), не применимы в данном режиме. Все же мы можем воспользоваться методом перевала. Теперь седловые точки определяются по отношению к произведению сферических гармоник и быстро осциллирующего косинуса. Для того чтобы упростить проблему, мы используем приближенное выражение для сферических гармоник, верное в пределе больших мультипольных номеров $l_i \gg 1$,

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta}} \cos\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\right] e^{im\phi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right). \quad (82)$$

Отметим, что приближение не работает в окрестности полюсов $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Следовательно, вычисления возможны только в ведущем порядке по мультипольным номерам l_i . Детальные вычисления приведены в Приложении Г. Главное техническое отличие от случая с длинной промежуточной стадией состоит в том, что седловые точки по отношению к переменной $\delta\theta_1$ смещаются к значениям $\delta\bar{\theta}_1 \sim \frac{1}{z}$. Последние стремятся к нулю в пределе $z \rightarrow \infty$, и мы самосогласованно возвращаемся к результатам предыдущего Раздела. Ниже мы приводим окончательное выражение для биспектра

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle &= i^{l_1+l_2+l_3} \cdot \frac{\pi \mathcal{P}_\Phi^{3/2}}{4} \cdot B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} \times \\ &\times \int dy_1 dy_2 \cdot y_1^2 \cdot y_2^2 \cdot \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(y_1 + y_2) \cdot A(y_1, y_2, y_1 + y_2) \times \\ &\times \frac{1}{N} \cdot \sin\left\{\frac{1}{4N} \left(l_1^2 + \frac{y_1^2 l_3^2}{(y_1 + y_2)^2}\right)\right\} \cdot \cos\left\{\frac{1}{2N} \cdot \frac{y_1 l_1 l_3}{y_1 + y_2}\right\} \times \\ &\times \left[1 - \text{ctg}\left\{\frac{1}{4N} \left(l_1^2 + \frac{y_1^2 l_3^2}{(y_1 + y_2)^2}\right)\right\}\right] \cdot \text{tg}\left\{\frac{1}{2N} \cdot \frac{y_1 l_1 l_3}{y_1 + y_2}\right\} \times \\ &\times \left(\frac{l_1}{l_3} + \frac{l_2}{l_3} \cdot B_{l_2, -1; l_3 0}^{l_1, 1} (B_{l_2 0; l_3 0}^{l_1 0})^{-1}\right) + (l_1, l_2 \leftrightarrow l_3). \end{aligned} \quad (83)$$

где параметр N дается Ур. (76). Прокомментируем полученное выражение. Несложно видеть, что в пределе больших $z \gg l_1 \gg 1$, мы возвращаемся к выражению (78), как и должно быть. Это простая проверка наших вычислений. Во-вторых, отметим, что

в случае с короткой промежуточной стадией подавление биспектра мягче. Фактор подавления оценивается величиной $1/N \sim 1/(l_1 z)$. Другими словами, степень подавления параметром $1/z$ замещается фактором $1/l_1$.

3.4.3 В коллинеарном пределе

Форма 3-точечной функции, заданная Ур-ми (78) и (83), подразумевает нетривиальные следствия в смысле предсказаний космического микроволнового фона.

Наше первое наблюдение касается поведения биспектра в коллинеарном пределе, или для конфигураций, удовлетворяющих соотношению $l_i + l_j \approx l_s$. Для определенности мы рассмотрим случай долгой эволюции на промежуточной стадии. В приближении больших мультипольных номеров l выражение в круглых скобках Ур. (78) принимает вид

$$l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot \left(\frac{y_1}{l_1} - \frac{y_2}{l_2} \right)^2 + 2y_1 y_2 \cdot l_1 l_2 \cdot \left[1 - B_{l_2, -1; l_3, 0}^{l_1, 1} (B_{l_2 0; l_3 0}^{l_1 0})^{-1} \right]. \quad (84)$$

Заемствуя результаты следующего Раздела, обратим внимание, что первое слагаемое подавлено в силу соотношения $\frac{y_1}{l_1} = \frac{y_2}{l_2}$, которое выполняется в коллинеарном пределе с точностью до поправок порядка $1/\sqrt{l_1}$. В том же пределе имеет место сокращение во втором слагаемом, что следует из соотношения

$$B_{l_2, -1; l_3 0}^{l_1, 1} = \frac{\sqrt{l_1(l_1 + 1)} \sqrt{l_2(l_2 + 1)}}{(l_1 + 1)(l_2 + 1)} B_{l_2 0; l_3 0}^{l_1 0},$$

которое в свою очередь следует из аналогичного соотношения для $3j$ -символов Вигнера. Глядя на Ур. (84), мы заключаем, что биспектр подавлен фактором порядка $\sim 1/l_1$ для конфигураций, удовлетворяющих $l_1 + l_2 \approx l_3$.

На самом деле, данное утверждение не совсем верное. Тонкость состоит в том, что есть другая тенденция биспектра, буквально противоположная изложенной выше. Речь идет о подавлении вдали от коллинеарного предела. Источником подавления служит интеграл по трем функциям перехода,

$$\int dy_1 dy_2 \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(y_1 + y_2) \dots$$

Мы представим детальный анализ этого интеграла в Разделе 3. Здесь же ограничимся качественным (и не вполне заслуживающим доверия) аргументом. Интеграл по переменным y_i насыщается, грубо говоря, вблизи $y_i \sim l_i$. Положим поэтому аргументы функций перехода равными l_1 , l_2 и $l_1 + l_2$. Следовательно, вариация биспектра в зависимости от мультипольных номеров l_i описывается произведением $\Delta_{l_1}(l_1)\Delta_{l_2}(l_2)\Delta_{l_3}(l_1+l_2)$. Данный наивный аргумент показывает, что биспектр должен испытывать осцилляции с амплитудой, падающей вдали от конфигурации $l_3 = l_1 + l_2$. Численные оценки следующего Раздела хорошо согласуются с этими ожиданиями. Действительно, мы увидим, что биспектр испытывает быстрые осцилляции, непосредственно связанные с осцилляциями функций перехода. Оговоримся, тем не менее, что амплитуда скорее постоянная, нежели падающая. Причина состоит в сокращении в коллинеарном пределе, упомянутом выше.

3.4.4 Оценки и наблюдательные следствия

К настоящему моменту, мы обратили внимание на некоторые эффекты, представляющие потенциальный интерес с точки зрения космологических экспериментов: осцилляции биспектра, подавление в коллинеарном пределе и вдали от последнего. Представляется интересным посмотреть, как эти эффекты накладываются друг на друга, хотя бы на качественном уровне. Другая цель данного Раздела состоит в том, чтобы найти область параметра z , для которой 3-точечная функция потенциально измерима в космологических экспериментах. Для конкретности мы предположим, что негауссовость, генерируемая до начала промежуточной стадии, имеет стандартный локальный вид

$$A(k_1, k_2, k_3) = C \frac{\sum_i y_i^3}{\prod_i y_i^3}. \quad (85)$$

Здесь константа C представляет собой комбинацию параметров модели, описывающей поведение космологических возмущений в ранней Вселенной до начала промежуточной стадии. В частности, негауссовость стандартного локального вида предсказывается моделью конформного скатывания [57].

Ввиду статистически изотропной формы Ур-й (78) и (83), представляется удобным ввести так называемый усеченный биспектр $b_{l_1 l_2 l_3}$, определяемый из

$$\langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle = (-1)^{l_3} B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} b_{l_1 l_2 l_3} .$$

Для простоты мы предполагаем следующие упрощения в дальнейшем. Во-первых, мы игнорируем поправку в Ур. (77) и ограничиваемся рассмотрением ведущего вклада (78). Во-вторых, мы пренебрегаем слагаемыми, пермутирующими мультипольные номера l_i , в Ур. (78). Для простоты, мы также замечаем медленно меняющиеся функции $g_l^T(y) = \frac{\Delta_l(y)}{j_l(y)}$ постоянными значениями,

$$g_l^T(y) \rightarrow g_{SW}^T \approx 1/3 . \quad (86)$$

Строго говоря, это приближение работает только для малых мультипольных номеров из плато Сакса–Вольфе углового спектра космического микроволнового фона. Тем не менее, оно вполне подходит для оценок, которые будут приведены ниже. Наконец, отличным приближением для сферических функций Бесселя в режиме $y > l + 1/2$ является выражение

$$j_l(u) = \frac{1}{(l + \frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{[u^2 - 1]^{1/4}} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) f(u) - \frac{\pi}{4} \right] , \quad (87)$$

где

$$u = \frac{y}{l + 1/2}$$

и

$$f(u) = \sqrt{u^2 - 1} - \arccos \left(\frac{1}{u} \right) .$$

В области $y < l + 1/2$, то есть для $u < 1$, функция Бесселя экспоненциально подавлена и мы пренебрегаем вкладом этой области.

Вначале возьмем интеграл по переменной u_2 . С этой целью, мы вновь воспользуемся методом перевала. Это оправданно ввиду наличия большого фактора l в аргументе косинуса в Ур. (87). Мы пишем произведение функций Бесселя в виде

$$j_{l_2}(u_2) j_{l_3}(u_3) \approx \frac{1}{2l_2 l_3 [u_2^2 \cdot u_3^2 \cdot (u_2^2 - 1) \cdot (u_3^2 - 1)]^{1/4}} \cos [l_2 f(u_2) - l_3 f(u_3)] , \quad (88)$$

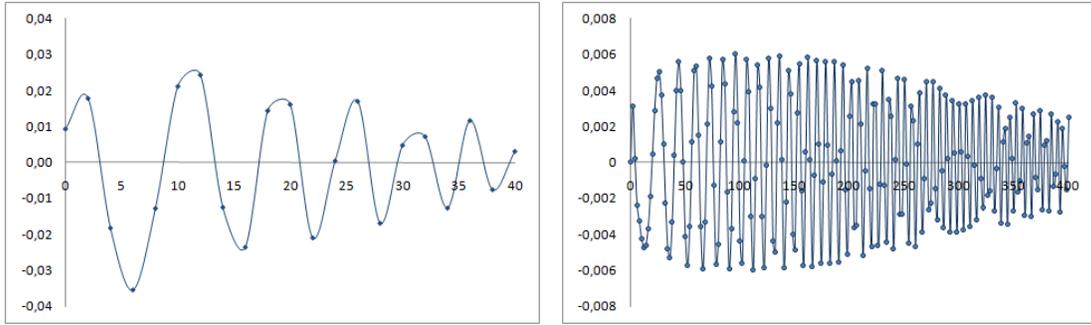


Рис. 4: Структурные коэффициенты $c_{l_1 l_2 l_3}$, определяемые из Ур. (90), изображены в зависимости от числа $\Delta l \equiv l_1 + l_2 - l_3$. Мультипольный номер l_2 выбран равным $l_2 = 600$, тогда как мультипольный номер $l_1 = 50$ (график слева) и $l_1 = 600$ (график справа).

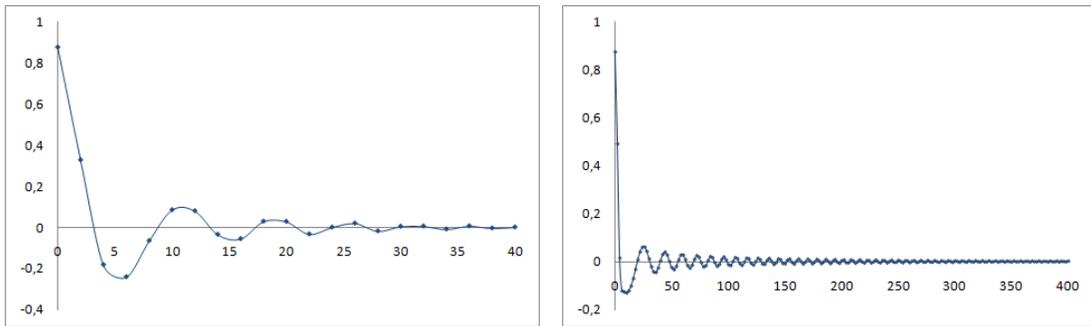


Рис. 5: Величина $f(l_1, \Delta l)$, определенная Ур. (91), изображена как функция разности $\Delta l \equiv l_1 + l_2 - l_3$. Мультипольный номер l_1 выбран равным $l_1 = 50$ (график слева) и $l_1 = 600$ (график справа).

где

$$u_3 = \frac{l_1}{l_3} u_1 + \frac{l_2}{l_3} u_2 .$$

и мы опустили вклад со вторым косинусом, аргумент которого быстро осциллирует для всех значений переменной u_2 . Седловая точка Ур. (88) расположена при

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = \frac{l_1}{l_3 - l_2} u_1 .$$

Мы раскладываем аргумент косинуса в Ур. (88) вплоть до квадратичного слагаемого

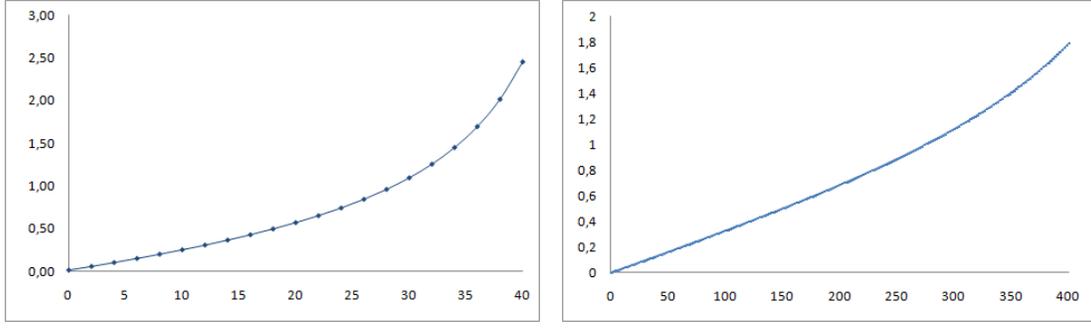


Рис. 6: Отношение $c_{l_1 l_2 l_3} / f(l_1, \Delta l)$ изображено как функция разности $\Delta l \equiv l_1 + l_2 - l_3$. Мультипольный номер l_2 выбран равным $l_2 = 600$, тогда как мультипольный номер $l_1 = 50$ (график слева) и $l_1 = 600$ (график справа).

по $\Delta u_2 \equiv u_2 - \bar{u}_2$

$$[l_2 f(u_2) - l_3 f(u_3)] = [l_2 f(\bar{u}_2) - l_3 f(\bar{u}_3)] + \frac{l_2 (l_3 - l_2)^4}{l_1^3 l_3 u_1^2 \sqrt{u_1^2 - \frac{(l_3 - l_2)^2}{l_1^2}}} \frac{\Delta u_2^2}{2}.$$

Интеграл по переменной u_2 теперь берется непосредственно. Окончательные оценки представлены в смысле оставшегося интеграла по переменной u_1 . Результаты несколько различаются для случаев длинной и достаточно короткой промежуточной стадий, соответственно.

Мы начинаем со случая длинной промежуточной стадии, характеризуемой параметром $z \gg l_1$. Используя Ур. (78) и следуя всем шагам, описанным выше, мы получаем следующую оценку для усеченного биспектра,

$$|b_{l_1 l_2 l_3}| \sim \frac{C}{30} \cdot \frac{\mathcal{P}_\Phi^{3/2}}{z^2} \frac{|c_{l_1 l_2 l_3}|}{l_1^{3/2} \cdot l_2^{3/2} \sqrt{l_3}}, \quad (89)$$

где величины $c_{l_1 l_2 l_3}$ определены как

$$c_{l_1 l_2 l_3} = \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta l^2 / l_1^2}{1 - \Delta l / l_1} - \frac{B_{l_1, 1; l_2, -1}^{l_3 0}}{B_{l_1, 0; l_2, 0}^{l_3 0}} \right] f(l_1, \Delta l). \quad (90)$$

Мы ввели обозначение $\Delta l \equiv l_1 + l_2 - l_3$. Функция $f(l_1, \Delta l)$ в Ур. (89) содержит оставшийся

интеграл по переменной u_1 ,

$$f(l_1, \Delta l) = \left(1 - \frac{\Delta l}{l_1}\right)^2 \int_1^\infty \frac{du_1}{u_1^{9/2} [u_1^2 - 1]^{1/4} \left[u_1^2 - \left(1 - \frac{\Delta l}{l_1}\right)^2\right]^{1/4}} \times \left[\cos \left\{ l_1 f(u_1) - (l_1 - \Delta l) f(\bar{u}_2) \right\} - \sin \left\{ l_1 f(u_1) - (l_1 - \Delta l) f(\bar{u}_2) \right\} \right]. \quad (91)$$

Мы предполагаем функцию $A(y_1, y_2, y_3)$ локального вида (85) здесь. Наиболее нетривиальная часть биспектра зашифрована в коэффициентах $c_{l_1 l_2 l_3}$. Они представлены на Рис. 4 в зависимости от разности $\Delta l = l_1 + l_2 - l_3$. Мы предполагаем мультипольные номера l_1 и l_2 фиксированными частным значениям и исследуем вариации биспектра в зависимости от наибольшего мультипольного номера l_3 , а, следовательно, от величины $\Delta l = l_1 + l_2 - l_3$. Мы наблюдаем осцилляции с периодом, оцениваемом как $l^{1/3} \sim 10$, в хорошем согласии с ожиданиями Раздела 3.4.4. Для того, чтобы сделать поведение коэффициентов $c_{l_1 l_2 l_3}$ совсем очевидным, мы представляем графики зависимости величины $f(l_1, \Delta l)$ и отношения $c_{l_1 l_2 l_3} / f(l_1, \Delta l)$ на Рис. 5 и 6, соответственно. Явно видно, что Рис. 5 демонстрирует убывание амплитуды осцилляций вдали от коллинеарного предела, то есть для больших Δl , тогда как Рис. 6 выявляет буквально противоположную тенденцию. Две тенденции компенсируют друг друга, что проявляется в сглаживании амплитуды. Связанный эффект, видный из Рис. 4 состоит в "скручивании" биспектра, или в подавлении меньшим мультипольным номером, $1/\sqrt{l_1}$, по сравнению с ситуацией, где промежуточная стадия отсутствует. Действительно, коэффициенты $c_{l_1 l_2 l_3}$ могут быть оценены, грубо говоря, как $c_{l_1 l_2 l_3} \sim l_1^{-1}$. Отсюда, биспектр (89) ведет себя как $b_{l_1 l_2 l_3} \propto l_1^{-5/2}$ в зависимости от меньшего мультипольного номера l_1 . Для сравнения напомним здесь оценку для локального биспектра: $b_{l_1 l_2 l_3}^{loc} \sim l_1^{-2}$.

Наконец, обсудим вопрос чувствительности данных Planck по отношению к нашему предсказанию 3-точечной функции. Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим матрицу Фишера [15]

$$F^{ij} \equiv \sum_{2 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3} \frac{\langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle^i \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle^j}{\sigma_{l_1 l_2 l_3}^2}. \quad (92)$$

Здесь $\sigma_{l_1 l_2 l_3}^2$ дано $\sigma_{l_1 l_2 l_3}^2 = C_{l_1} C_{l_2} C_{l_3} \Delta_{l_1 l_2 l_3}$ где $\Delta_{l_1 l_2 l_3}$ принимает значения 1, 2 или 6, когда

все мультипольные номера l различные, два из них одинаковые, все три одинаковые, соответственно. Верхние индексы i соответствуют частным источникам негауссовости, как то нелинейности в ранней Вселенной, точечные источники, слабое лензирование, излучение Сюняева–Зельдовича и т.д. В последующем, мы пренебрегаем всеми источниками, кроме первичной физики, так что матрица Фишера сводится к единственному элементу. Все же мы предпочитаем использовать стандартное наименование “матрица” в дальнейшем изложении.

Для того чтобы взять суммы по числам m_i в Ур. (92), воспользуемся хорошо известным соотношением для $3j$ символов Вигнера,

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^2 = 1 .$$

В качестве оценки для углового спектра мощности мы используем $C_l \sim 6 \cdot 10^{-10}/l^2$, а для оценки $3j$ -символов Вигнера

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2}} .$$

Далее, используя Ур. (89) и суммируя по мультипольным номерам l_1 , l_2 и l_3 , мы получаем оценку для матрицы Фишера

$$F \sim \frac{C^2}{1000 \cdot z^4} \cdot \frac{\bar{l}^2}{l_0} . \quad (93)$$

Здесь \bar{l} и l_0 соответствуют максимальному и минимальному мультипольным номерам, использованным в анализе. Мы фиксируем их значения равными $\bar{l} = 2000$ и $l_0 = 10$. Наблюдение биспектра в данных Planck возможно, если матрица удовлетворяет неравенству $F \gtrsim 1$. Из Ур. (93) мы получаем феноменологически интересное окно для параметра z

$$l_1 \lesssim z \lesssim 5\sqrt{|C|} .$$

Выписывая неравенство слева, мы напоминаем, что метод перевала, использованный для вывода (78) применим только для достаточно больших z , удовлетворяющих $z \gg$

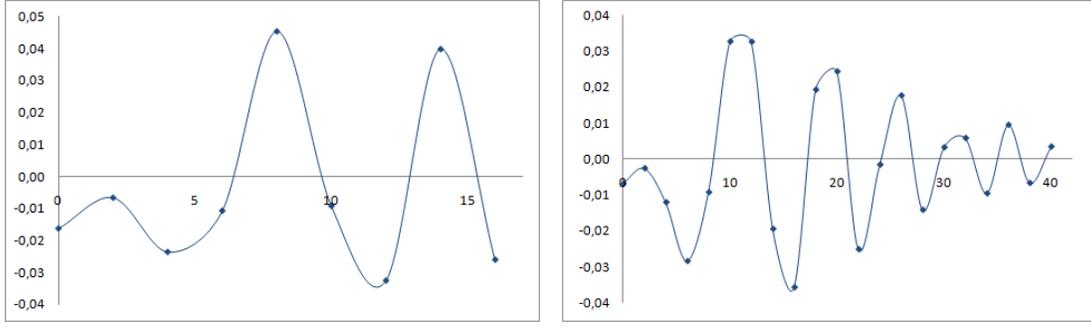


Рис. 7: Коэффициенты $c_{l_1 l_2 l_3}$ для случая короткой промежуточной стадии изображены в зависимости от разности $\Delta l = l_1 + l_2 - l_3$. Мультипольный номер l_2 выбран быть равным $l_2 = 600$, в то время как мультипольный номер $l_1 = 20$ (рисунок слева) и $l_1 = 50$ (рисунок справа). Значение параметра z выбрано равным $z = 10$.

$l_{min} \sim l_0 \sim 10$. Отсюда следует, что окно интересных значений параметра z , для которых одновременно верны вычисления и биспектр находится на уровне чувствительности экспериментальных данных, соответствует большим значениям параметра C , т.е. $|C| \gtrsim 100$.

В случае если длительность промежуточной стадии короче l_1 , оценка (89) для усеченного биспектра должна быть замещена следующей

$$|b_{l_1 l_2 l_3}| \sim \frac{C}{30} \cdot \frac{\mathcal{P}_\Phi^{3/2}}{|z|} \frac{\sqrt{l_3}}{l_1^{5/2} \cdot l_2^{5/2}} |c_{l_1 l_2 l_3}|, \quad (94)$$

Выражение для коэффициентов $c_{l_1 l_2 l_3}$ аналогично представленному в Ур. (90), но значительно сложнее. Мы предпочитаем его здесь не выписывать. Важно, что качественное поведение коэффициентов $c_{l_1 l_2 l_3}$ остается неизменным. Это явно видно из Рис. 7. Вновь мы наблюдаем быстрые осцилляции с амплитудой порядка $1/l_1$. Глядя на оценку (94), мы заключаем, что биспектр имеет более яркую особенность в пределе маленьких мультипольных номеров l_1 , чем в случае длинной промежуточной стадии.

Соответственно, несколько меняется оценка для матрицы Фишера

$$F \sim \frac{1}{1000 \cdot z^2} \cdot \frac{\bar{l}^2}{l_0^3} \quad (95)$$

Подставляя $\bar{l} = 2000$ и $l_0 = 10$, мы получаем окно значений параметра z , интересное с феноменологической точки зрения,

$$1 \lesssim z \lesssim |C|. \quad (96)$$

Напомним, что данная оценка работает для неслишком больших значений параметра z , то есть $1 \lesssim z \lesssim l_{min} \sim 10$. Отсюда следует, что мы можем доверять феноменологическому интервалу, представленному в Ур. (96) только для значений C меньших чем $|C| \lesssim 10$, что, конечно, более приемлемо с точки зрения микроскопической физики. Для еще меньших значений $|C| \lesssim 1$, однако, биспектр может оказаться ненаблюдаемым. Наивно, мы можем ослабить это утверждение, распространив анализ на случай мультипольных номеров порядка $l_0 = 2$. В этом случае феноменологически интересное окно значений параметра C может быть расширено на один порядок. Напомним, однако, что результаты настоящего Раздела верны только в приближении больших l . В частности, для значений l_0 порядка 2, поведение матрицы Фишера может существенно отличаться от представленного в Ур. (95).

4 Экспериментальный поиск статистической анизотропии в космическом микроволновом фоне

В этой Части мы обсуждаем важный вопрос статистической анизотропии в данных WMAP. Напомним, что одним из важнейших следствий модели с конформным скатыванием является зависимость спектра первичных возмущений от направления импульса, характеризующего космологические моды. Строго говоря, это предсказание верно в обеих версиях модели, и в обоих случаях сила статистической анизотропии определяется единственным параметром, константой связи h . В этом смысле, нет нужды ограничивать себя рамками модели с промежуточной стадией, когда мы можем на равных основаниях обслужить версию модели, в которой промежуточная стадия отсутствует. Другое дело, что ограничение, получающееся в последнем случае, оказывается значи-

тельно слабее и, скорее всего, не представляет теоретического интереса. Замечательно также, что процедуру ограничения статистической анизотропии, о которой мы будем говорить ниже, можно без труда распространить на случай предсказаний анизотропных моделей инфляции, обсуждавшихся в Разделе 3.1.2. В контексте инфляции наиболее интересными параметрами являются амплитуда квадрупольного специального вида g_* и полное число e -фолдингов N_{tot} .

Удобно описывать свойства космического микроволнового фона в гармоническом пространстве. Другими словами, данному распределению температуры $\delta T(\mathbf{n})$ на небе ставится в соответствие набор коэффициентов Θ_{lm} , которые поределаются следующим образом,

$$\Theta_{lm} = \int d\Omega \delta T(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) . \quad (97)$$

В предположении статистической изотропии, теоретическая матрица ковариации $S_{lm;l'm'} = \langle \Theta_{lm} \Theta_{l'm'}^* \rangle$, диагональна в гармоническом представлении,

$$S_{lm;l'm'} = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (98)$$

где набор C_l представляет собой стандартный спектр мощности реликтовых фотонов. Подчеркнем, что речь в данном случае идет о чистом сигнале микроволнового фона, который следует отличать от настоящего, детектируемого в экспериментах. Мы его обозначаем в дальнейшем $\hat{\Theta}_{lm}$. Реальный сигнал включает инструментальный шум, неизбежный артефакт экспериментов. В итоге, настоящая матрица ковариации несколько отличается от теоретической

$$\mathbf{C}_{lm;l'm'} \equiv \langle \hat{\Theta}_{lm} \hat{\Theta}_{l'm'}^* \rangle = \mathbf{S}_{lm;l'm'} + \mathbf{N}_{lm;l'm'} , \quad (99)$$

где $\mathbf{N}_{lm;l'm'}$ матрица ковариации инструментального шума. Обратим внимание на то, что в пиксельном пространстве матрица ковариации шума диагональна

$$\mathbf{N}_{ij} \equiv \langle n_i n_j \rangle = \frac{\sigma_0^2}{N_{obs}(i)} \delta_{ij} . \quad (100)$$

Здесь величина σ_0 имеет смысл среднеквадратичного отклонения шума в случае единичного наблюдения, тогда как $N_{obs}(i)$ обозначает число наблюдений, приходящихся на

пиксель с номером i . Вообще говоря, шум характеризуется неоднородным распределением на карте микроволнового фона. Отсюда, в частности, следует, что его матрица ковариации недиагональна в гармоническом представлении. Тем не менее, как среднеквадратичное отклонение σ_0 , так и число наблюдений, приходящихся на пиксель $N_{obs}(i)$ хорошо установленные величины. Поэтому эффекты шума могут быть учтены надлежащим образом при анализе данных.

4.1 Статистическая анизотропия и модели ранней Вселенной

Напомним, что спектр мощности в однородной, но статистически анизотропной Вселенной имеет в общем случае вид,

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_0(k) \left[1 + a(k) \sum_{LM} q_{LM} Y_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) \right], \quad (101)$$

где $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. Коэффициенты q_{LM} параметризуют зависимость от направления, которую удобно представить как разложение по сферическим гармоникам $Y_{LM}(\hat{\mathbf{k}})$. В отличие от аналогичного выражения, представленного в работе [?], мы предполагаем, что зависимость от волнового числа k может быть охарактеризована единственной функцией $a(k)$. Коммутативность классического поля $\zeta(\mathbf{x})$ предполагает далее, что $\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_\zeta(-\mathbf{k})$, а отсюда $q_{LM} = 0$ для нечетных L .

Как мы указывали во Введении, статистическая изотропия, или, в наших обозначениях, спектр мощности с $a(k) = 0$, является общим предсказанием моделей инфляции. Существуют, однако, исключения. Так, анизотропного расширения Вселенной удастся добиться в ряде расширений инфляции в терминах векторных полей [24, 25, 26, 27, 28]. Несколько более экзотичные примеры нарушения статистической изотропии возможны в моделях, предполагающих некоммутативное пространство-время [72, 73]. Во всех перечисленных случаях речь идет о статистической анизотропии специального квадрупольного вида (другими словами, можно выбрать такую систему координат на небесной сфере, что единственным ненулевым коэффициентом разложения спектра мощности по

сферическим гармоникам является q_{20}). Тем не менее, инфляция может в принципе приводить к появлению мультиполей q_{LM} с $L > 2$ (см., например [74]).

В поисках статистической анизотропии специального квадрупольного вида, впервые предсказанного в работе [24], Гроенебум и Эриксен [77] исследовали данные WMAP пятого года и обнаружили ненулевой сигнал на высоком уровне достоверности. Тем не менее, вектор, характеризующий сигнал оказался почти сонаправленным с линией соединяющей, полюса эклиптической плоскости. Дальнейшее исследование этого вопроса связано с работой Хансона и Льюиса [78]. Им удалось распространить анализ на случай высших мультиполей статистической анизотропии. Они учли существенный фазовый множитель, по ошибке опущенный в работах [24] и [77]. Тем не менее, результат [77] остался в силе. Более того, обнаруженный сигнал квадрупольной статистической анизотропии специального вида оказался в этом случае буквально сонаправленным с полюсами эклиптики. Наиболее сильное указание на нарушение статистической изотропии на уровне достоверности 9σ было вскоре обнаружено в картах WMAP, соответствующих самым высоким частотам [79]. Эти результаты нашли подтверждение в данных седьмого года, проведенных непосредственно командой WMAP [65]. Возможное объяснение столь странного поведения квадрупольной статистической анизотропии коренится скорее всего в неизвестной систематической ошибке, нежели в нетривиальном отклонении от стандартной космологической теории. Впредь мы будем придерживаться этой точки зрения.

Как обсуждается в работе [80], аномальный квадруполь может быть объяснен неучтенными эффектами при фильтрации исходного сигнала микроволнового фона. В частности, более корректная процедура, учитывающая асимметрии функции сглаживания пучка, приводит к исчезновению аномалии. Данные результаты нашли подтверждение в данных WMAP девятого года. В настоящей Главе мы используем данные WMAP седьмого и девятого годов для того, чтобы ограничить параметр h^2 модели конформного скатывания.

Для удобства будущих ссылок приведем ниже соотношения для коэффициентов q_{LM} ,

предсказываемых в различных анизотропных моделях ранней Вселенной. В первую очередь нас будет интересовать модель с конформным скатыванием. Характерно, что в последней параметры q_{LM} случайные величины. В случае модели с промежуточной стадией, коэффициенты q_{LM} подчиняются гауссовой статистике, их средние значения равны нулю, а дисперсии определяются выражением

$$\langle q_{LM} q_{L'M'}^* \rangle = \frac{3h^2}{\pi(L-1)(L+2)}, \quad a(k) = 1. \quad (102)$$

В версии (а) модели конформного скатывания (без промежуточной стадии), статистическая анизотропия задается двумя наборами величин $\{q_{2M}\}$ and $\{q'_{2M}\}$. Первый из них описывает статистическую анизотропию общего квадрупольного типа. В этом случае, коэффициенты q_{2M} гауссовы случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями

$$\langle q_{2M} q_{2M'}^* \rangle = \frac{\pi h^2}{25} \delta_{MM'}, \quad a(k) = H_0 k^{-1}. \quad (103)$$

Набор q'_{2M} соответствует статистической анизотропии специального квадрупольного вида. Коэффициенты q'_{2M} , которые в этом случае негауссовы, выражаются нелинейным образом через гауссову случайную величину \mathbf{v} :

$$q_{2M} = -\frac{4\pi v^2}{5} Y_{2M}^*(\hat{\mathbf{v}}). \quad (104)$$

Замечательно, что техника ограничения статистической анизотропии, которую мы подробно обсуждаем в следующих Разделах, универсальна в том смысле, что она может быть использована для ограничения параметров других анизотропных моделей ранней Вселенной, в частности инфляции с неминимальным взаимодействием между калибровочным полем и полем инфлатона. Природа статистической анизотропии в этом случае двойственная (см. Раздел 3.1.2). В одном случае амплитуда квадрупольного вида обязана происхождением чисто классическому электрическому полю. Соответственно, существует непосредственная связь между амплитудой g_* и параметром модели, c ,

$$g_* = -24 \frac{c-1}{c} \cdot N_{CMB}^2.$$

Напомним также связь между коэффициентами q_{2M} и амплитудой g_* ,

$$q_{2M} = \frac{8\pi g_*}{15} Y_{2M}^*(\hat{\mathbf{E}}), \quad g_*^2 = \frac{45}{16\pi} \sum_M |q_{2M}|^2, \quad (105)$$

Источником ненулевой амплитуды g_* могут являться вакуумные квантовые флуктуации поля \mathbf{E}_{IR} , характеризующиеся большими длинами волн по сравнению с космологическими модами. В этом случае предсказание модели аналогично статистической анизотропии, которая следует из версии модели конформного скатывания без промежуточной стадии, с точностью до присутствия квадрупольного слагаемого общего вида в последней, который в любом случае оставляет пренебрежимо малый отпечаток на свойствах микроволнового фона. Напомним соотношение “дуальности” между параметрами двух моделей

$$h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda} \leftrightarrow \frac{512\pi^2}{3} \mathcal{P}_\zeta N_{CMB}^2 N. \quad (106)$$

В дальнейшем это соотношение позволит нам получить ограничение на параметр N непосредственно из ограничения на эффективный параметр $h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda}$ модели конформного скатывания (без промежуточной стадии).

4.2 Эстиматоры статистической анизотропии

4.2.1 Модельно-независимый анализ

Для начала сконструируем эстиматоры для коэффициентов q_{LM} , параметризующих зависимость от направления спектра мощности (101). В частности, это позволит нам провести независимый анализ данных WMAP седьмого и девятого годов на вопрос наличия в них статистической анизотропии. Используемый нами подход для построения эстиматоров основан на методе максимума квадратичной функции, предложенного в работе [78]. Напомним, что коэффициенты q_{LM} сами по себе не представляют для нас непосредственного интереса, так как они не являются независимыми параметрами ни в одной из версий модели конформным скатыванием.. Тем не менее, они представляются полезными в смысле модельно-независимого анализа статистической анизотропии

в данных микроволнового фона. Более того, эстиматор для параметра h^2 модели конформного скатывания выражается через эстиматоры для параметров q_{LM} .

В последующем, мы предпочитаем работать в гармоническом представлении для описания анизотропии температуры микроволнового фона, если не оговорено обратное. Логарифм функции правдоподобия от $\hat{\Theta}$ дается выражением

$$-\mathcal{L}(\hat{\Theta}|\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\hat{\Theta}^\dagger \mathbf{C}^{-1}\hat{\Theta} + \frac{1}{2}\ln \det \mathbf{C} , \quad (107)$$

где \mathbf{q} вектор с компонентами q_{LM} ; ковариационная матрица \mathbf{C} включает как "чистый сигнал", так и инструментальный шум, $\mathbf{C} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$. Теоретическая ковариационная матрица, соответствующая чистому сигналу, определяется выражением

$$S_{lm;l'm'} = \langle \Theta_{lm}\Theta_{l'm'}^* \rangle = i^{l-l'} \frac{2}{\pi} \int d\mathbf{k} \Delta_l(k) \Delta_{l'}(k) P_\zeta(\mathbf{k}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) .$$

Здесь Θ_{lm} флуктуации температуры микроволнового фона в гармоническом представлении,

$$\Theta_{lm} = \int d\Omega \delta T(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) ,$$

а $P_\zeta(\mathbf{k})$ спектр мощности первичных возмущений; $\Delta_l(k)$ так называемые функции перехода. В предположении космологической статистической анизотропии, теоретическая ковариационная матрица может быть представлена в общем виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^i + \delta\mathbf{S} ,$$

где \mathbf{S}^i соответствует изотропному сигналу; эффекты нарушения статистической изотропии включены $\delta\mathbf{S}$. Матрица \mathbf{S}^i диагональна в гармоническом представлении,

$$S_{lm;l'm'}^i = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (108)$$

где коэффициенты C_l описывают стандартный спектр мощности СМВ. Матрица $\delta\mathbf{S}$ описывается

$$\delta S_{lm;l'm'} = i^{l-l'} C_{ll'} \sum_{LM} q_{LM} \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) , \quad (109)$$

где

$$C_{ll'} = 4\pi \int d \ln k \Delta_l(k) \Delta_{l'}(k) a(k) \mathcal{P}_\zeta(k) . \quad (110)$$

Интеграл от трех сферических гармоник имеет вид

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) = (-1)^{m'} G_{ll'}^L C_{lm;l'-m'}^{LM} , \quad (111)$$

где $C_{lm;l'-m'}^{LM}$ $3j$ -символы Вигнера,

$$G_{ll'}^L \equiv \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{l0l'0}^{L0} .$$

Формально, эстиматоры для параметров q_{LM} можно определить простым приравнением производной от логарифма функции правдоподобия к нулю,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} = 0 .$$

Тем не менее, такой формальный подход очень затруднителен с вычислительной точки зрения. Причина состоит в том, что ковариационная матрица \mathbf{C} имеет недиагональные элементы, источником которых служит как вклад от инструментального шума, так и предполагаемая статистическая анизотропия. Поэтому в дальнейшем мы предпочитаем работать в приближении слабой статистической анизотропии, или малых параметров q_{LM} . В этой ситуации целесообразно разложить функцию правдоподобия (точнее, ее логарифм) вплоть до квадратичного члена по \mathbf{q} ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger \partial \mathbf{q}} \right|_0 \mathbf{q} . \quad (112)$$

Заменим вторую производную логарифма функции правдоподобия ее средним по гипотетическому ансамблю Вселенных [78],

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^\dagger} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} \right\rangle = -\mathbf{F} , \quad (113)$$

где \mathbf{F} матрица Фишера. Первое равенство в Ур. (113) следует из нормировочного условия

$$\int \exp(\mathcal{L}) d\hat{\Theta} = 1 .$$

В последующем мы будем предполагать, что все производные логарифма функции правдоподобия вычислены в предположении статистической изотропии, если не оговорено обратное, и опускать индекс “0”. Первая производная логарифма функции правдоподобия определяется выражением

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} = \frac{1}{2} \hat{\Theta}^\dagger (\mathbf{C}^i)^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} (\mathbf{C}^i)^{-1} \hat{\Theta} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\mathbf{C}^i)^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} \right),$$

где \mathbf{C}^i ковариационная матрица статистически изотропного сигнала, $\mathbf{C}^i = \mathbf{S}^i + \mathbf{N}$. Второе слагаемое в правой части это уравнения является средним от первого слагаемого по ансамблю реализаций микроволнового фона. Это следует из тождества $\text{Tr} \mathbf{A} = \langle \bar{\mathbf{x}}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \rangle$, где \mathbf{A} произвольная матрица, а \mathbf{x} вектор, составленный из коэффициентов анизотропии температуры с ковариационной матрицей \mathbf{C} . Отсюда, верно следующее представление

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} = \mathbf{h} - \langle \mathbf{h} \rangle, \quad (114)$$

где

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \bar{\Theta}^\dagger \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} \bar{\Theta}, \quad (115)$$

а величины $\bar{\Theta}$ коэффициенты анизотропии микроволнового фона после процедуры обратной фильтрации,

$$\bar{\Theta} = (\mathbf{S}^i + \mathbf{N})^{-1} \hat{\Theta}. \quad (116)$$

Подставляя далее Ур-я (113) и (114) в Ур. (112) и приравнивая результат к нулю, мы получаем желаемый эстиматор,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{F})^{-1} (\mathbf{h} - \langle \mathbf{h} \rangle). \quad (117)$$

В последующем мы предпочитаем работать с матрицей Фишера, вычисленной в приближениях полного неба и однородного шума [78]. В этом случае она состоит только из диагональных членов, которые не зависят от M ,

$$F_{LM;L'M'} = \delta_{LL'} \delta_{MM'} w \sum_{l,l'} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{8\pi} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \frac{C_{ll'}^2}{C_l^{\text{tot}} C_{l'}^{\text{tot}}}, \quad (118)$$

где C_l^{tot} сумма стандартного спектра мощности СМВ C_l и спектра мощности шума N_l . Константа w обозначает часть неба, которая остается после наложения маски. Мы включаем этот множитель для того, чтобы добиться лучшего соответствия между приближенной матрицей Фишера и точной, определяемой как среднее по реализациям микроволнового фона, симулированных из карт Монте–Карло.

4.2.2 Случай статистической анизотропии специального квадрупольного вида

Для того чтобы ограничить статистическую анизотропию специального квадрупольного вида, мы несколько изменяем описанную выше процедуру. Построим сначала эстиматор для амплитуды g_* при заданном направлении квадруполья \mathbf{d} . Для этой цели рассмотрим логарифм функции сходства в зависимости от единственного параметра, g_* . Мы повторяем процедуру, изложенную в предыдущем разделе, но определяем максимум функции сходства по отношению к параметру g_* . Ниже приведен результат

$$g_* = \frac{3}{2} \cdot \text{Re} \left(\sum_M q_{2M} Y_{2M}(\mathbf{d}) \right) . \quad (119)$$

Замечательно, что оценка для амплитуды g_* воспроизводится непосредственно из оценки коэффициентов q_{2M} . Отметим, что эстиматор (119) несмещенный и характеризуется минимальной дисперсией.

Напомним, тем не менее, что модели ранней Вселенной не предсказывают направления статистической анизотропии. Поэтому представляется более интересным оценить амплитуду g_* независимо от направления. Для этого используем второе из Ур. (105),

$$g_*^2 = \frac{45}{16\pi} \sum_M |q_{2M}|^2 \equiv \frac{225}{16\pi} C_2^q . \quad (120)$$

Несмотря на то, что данный эстиматор имеет интуитивно понятную форму, он нечувствителен по отношению к знаку амплитуды g_* . Также эстиматор (120) не позволяет различить между сигналами специального и общего квадрупольного вида. Следовательно, мы ожидаем более слабое ограничение на амплитуду g_* , чем в ситуации с заданным направлением нарушения статистической изотропии \mathbf{d} .

4.2.3 Случай статистической анизотропии, характеризуемой случайными величинами q_{2M}

Чтобы построить эстиматор для параметра h^2 , воспользуемся опять же методом максимума квадратичной функции сходства. Нашим основным предположением при этом будет гауссовость параметров q_{LM} . Эта гипотеза хорошо работает в случае модели с промежуточной стадией, тогда как в версии конформного скатывания без промежуточной стадии статистическая анизотропия специального квадрупольного вида характеризуется негауссовыми коэффициентами q_{2M} ; мы обслужим этот случай чуть позже.

Плотность вероятности частной реализации коэффициентов q_{LM} для фиксированного значения h^2 дается выражением

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}|h^2) \sim \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{Q}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{q}^\dagger \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q}\right).$$

Здесь \mathbf{Q} ковариационная матрица параметров статистической анизотропии, $Q_{LM;L'M'} \equiv \langle q_{LM} q_{L'M'}^* \rangle$. Для того чтобы определить функцию сходства частной реализации анизотропии СВВ для фиксированного h^2 , проинтегрируем произведение плотности вероятности, определенной выше, и экспоненты от логарифма функции правдоподобия для фиксированного набора параметров статистической анизотропии q_{LM} по коэффициентам q_{LM} ,

$$\mathcal{W}(\hat{\Theta}|h^2) = \int \mathcal{W}(\hat{\Theta}|\mathbf{q}) \mathcal{W}(\mathbf{q}|h^2) d\mathbf{q}, \quad (121)$$

здесь $\mathcal{W}(\hat{\Theta}, \mathbf{q}) = \exp[\mathcal{L}(\hat{\Theta}, \mathbf{q})]$, тогда как \mathcal{L} логарифм функции правдоподобия, рассмотренный в предыдущем Разделе (107). Далее воспользуемся основной идеей метода максимума квадратичной функции правдоподобия и разложим последнюю вплоть до квадратичного члена по \mathbf{q} ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{q},$$

где мы вновь заменили вторую производную логарифма функции правдоподобия ее средним. Теперь интеграл в Ур. (121) принимает простую форму и может быть проин-

тегрирован непосредственно,

$$\mathcal{W} \sim \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{FQ} + \mathbf{I})}} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} (\mathbf{F} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (122)$$

Приравнивая к нулю производную по константе связи выражения (122),

$$\frac{\partial \ln \mathcal{W}(\hat{\Theta}|h^2)}{\partial h^2} = 0,$$

мы получаем уравнение для эstimатора h^2 ,

$$\text{Tr} \left((\mathbf{FQ} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h^2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^\dagger} (\mathbf{FQ} + \mathbf{I})^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h^2} (\mathbf{FQ} + \mathbf{I})^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}.$$

В приближении полного неба и однородного шума, матрица Фишера (118) диагональна,

$$F_{LM;L'M'} = F_L \delta_{LL'} \delta_{MM'}.$$

Матрица Q удовлетворяет тому же свойству,

$$Q_{LM;L'M'} = \tilde{Q}_L h^2 \delta_{LL'} \delta_{MM'},$$

для дальнейшего удобства мы ввели коэффициенты \tilde{Q}_L , не зависящие от константы связи h^2 . Уравнение для эstimатора h^2 принимает тогда простой вид

$$h^2 \sum_L \frac{(2L+1) F_L^2 \tilde{Q}_L^2}{(1 + F_L \tilde{Q}_L h^2)^2} = \sum_L \frac{(2L+1) F_L \tilde{Q}_L}{(1 + F_L \tilde{Q}_L h^2)^2} (F_L C_L^q - 1); \quad (123)$$

отметим, что мы использовали одно и то же обозначение для эstimатора параметра h^2 , что и для константы связи в модели. Величины C_L^q в Ур. (123) определены как

$$C_L^q = \frac{1}{2L+1} \sum_M |q_{LM}|^2, \quad (124)$$

где коэффициенты q_{LM} даются Ур. (117).

Ур. (123) принимает особенно простой вид в случае статистической анизотропии общего квадрупольного вида с гауссовыми величинами q_{2M} , предсказываемой в версии конформного скатывания без промежуточной стадии,

$$h^2 = Q_2^{-1} (C_2^q - F_2).$$

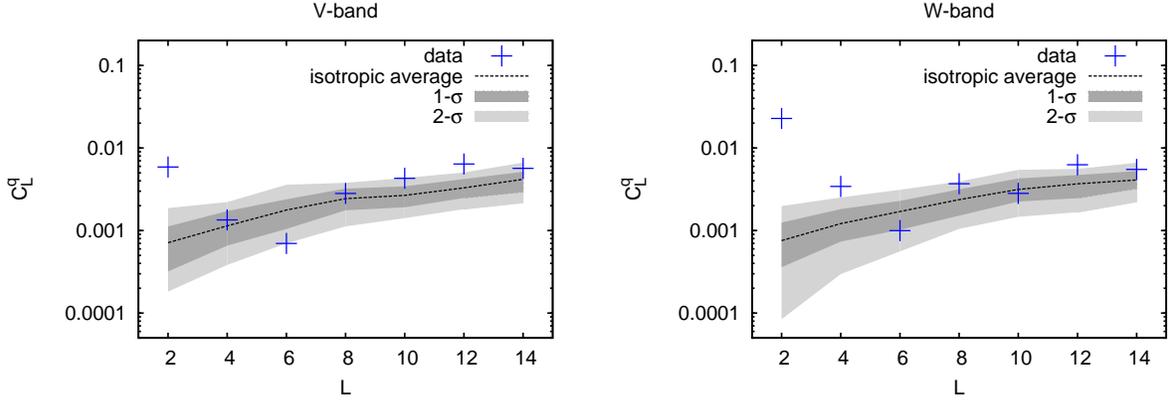


Рис. 8: Спектр мощности статистической анизотропии C_L^q , восстановленный из V (слева) и W (справа) частотных полос данных WMAP седьмого года. Амплитуда статистической анизотропии предполагается постоянной, то есть $a(k) = 1$ в Ур. (101). Интервалы достоверности 1σ (темно-серая полоса) и 2σ (светло-серая полоса) вычислены с использованием статистически изотропных карт, вычисленных методом Монте-Карло. В данном анализе использована стандартная температурная маска WMAP. Максимальный мультиполь, использованный в анализе, соответствует $l_{max} = 400$.

Заметим, что версия модели без промежуточной стадии также предсказывает анизотропию специального квадрупольного типа, характеризуемой негауссовыми величинами q_{2M} . Строго говоря, обсуждение выше неприменимо для этого случая. Ценой оптимальности, однако, мы предпочитаем работать с простыми эстиматорами, построенными из коэффициентов q_{2M} ,

$$h^4 \ln^2 \frac{H_0}{\Lambda} \simeq C_2^q.$$

4.3 Анализ данных

Для исследования статистической анизотропии мы используем данные эксперимента WMAP седьмого [3, 81] и девятого годов [2]. Мы ограничиваемся анализом V и W полос, соответствующие частотам 61 и 94 ГГц. Первый, и вычислительно наиболее емкий этап в работе состоит в применении процедуры обратной фильтрации, см. Ур. (116). Для

этого перепишем последнее в форме, наиболее удобной с точки зрения вычисления методом сопряженных градиентов,

$$[(\mathbf{S}^i)^{-1} + \tilde{\mathbf{Y}}^\dagger \mathbf{N}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}] \mathbf{S}^i \bar{\Theta} = \tilde{\mathbf{Y}}^\dagger \mathbf{N}^{-1} \hat{\Theta} . \quad (125)$$

Обратим внимание на то, что мы использовали пиксельное представление для записи ковариации шума \mathbf{N} здесь и температурных флуктуаций микроволнового фона $\hat{\Theta}$ в правой части. Матрица $\tilde{\mathbf{Y}}$ при этом осуществляет связь между гармоническим и пиксельным представлениями,

$$\tilde{Y}_{i,lm} = B_l Y_{lm}(\vartheta_i, \varphi_i) ,$$

где B_l функции сглаживания, а индекс i служит для нумерации пикселей. Мы берем данные WMAP в полосах частот V и W [89], пикселизация которых представлена в формате HEALPIX [90], а разрешение максимальное и соответствует $N_{side} = 512$. Мы используем модель нескоррелированного шума, причем мы берем σ_0^2/n_{obs} , где σ_0 равно 3.137 мК и 6.549 мК в случае полос V и W , соответственно. Величина n_{obs} есть число наблюдений, приходящееся на пиксель. Для того, чтобы устранить галактическое излучение, мы накладываем маску, которая устраняет $w = 78\%$ неба. Мы полагаем формально, что шум бесконечно большой в маскированных пикселях.

Для того чтобы определить уровень достоверности, описанную выше процедуру обратной фильтрации необходимо повторить для большого количества карт, симулированных методом Монте–Карло. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы обработка одной карты не занимала много времени. Это, вообще говоря, очень нетривиальная задача. К счастью, она была решена в работе [92]. Там было предложено использовать так называемый multigrid preconditioner, который позволяет решить систему уравнений в течение 10 минут для области мультиполей вплоть до $l_{max} = 1000$.

Далее мы вычисляем величины h_{LM} , определенные в Ур. (115). При этом их удобно переписать следующим образом,

$$h_{LM} = \frac{1}{2} \sum_{lm;l'm'} (-1)^{m'} i'^{l-l'} \bar{\Theta}_{lm}^* \bar{\Theta}_{l'm'} C_{l'l}^L G_{ll'}^L C_{lm;l'-m'}^{LM} , \quad (126)$$

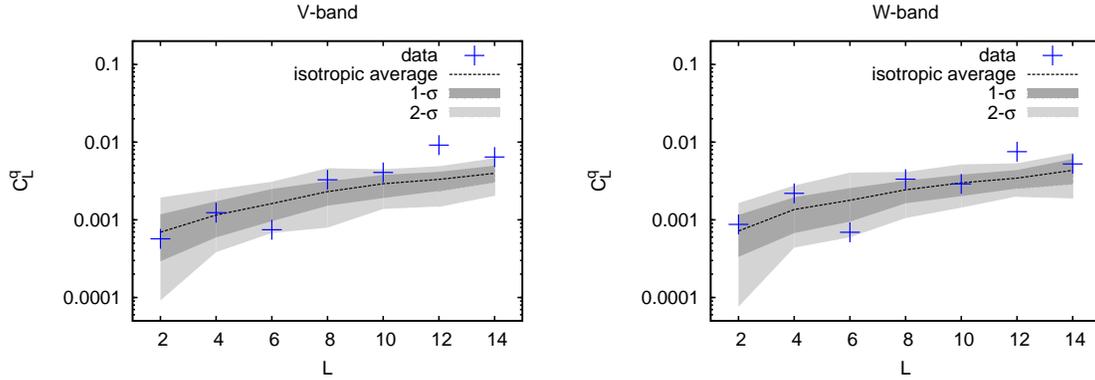


Рис. 9: Спектр мощности статистической анизотропии C_L^q , восстановленный из V (слева) и W (справа) частотных полос данных WMAP седьмого года. Амплитуда статистической анизотропии предполагается постоянной, то есть $a(k) = 1$ в Ур. (101). Интервалы достоверности 1σ (темно-серая полоса) и 2σ (светло-серая полоса) вычислены с использованием статистически изотропных карт, вычисленных методом Монте-Карло. В данном анализе использована стандартная температурная маска WMAP. Максимальный мультиполь, использованный в анализе, соответствует $l_{max} = 400$.

где мы использовали Ур-я (109) и (111). Вычисление $3j$ -символов Вигнера не составляет особенного труда, если обратиться к библиотекам GSL [93] и Slatec [94]. Суммирование в Ур-х (118) и (126) представлено вплоть до $l_{max} = 400$. Для вычисления величин $C_{ll'}$ был использован публично доступный код SAMB [95]. Мы проделали указанную процедуру как для существующих карт WMAP, так и для большого количества статистически изотропных карт, сгенерированных методом Монте-Карло.

Теперь мы в состоянии проверить, насколько наблюдательные данные WMAP совместны с гипотезой о статистической изотропии. Для этого нам пригодятся результаты модельно-независимого анализа, представленные в разделе 4.2.1. Мы восстановили коэффициенты C_L^q , определенные Ур. (124), исходя из данных WMAP седьмого и девятого годов, а также из карт, сгенерированных методом Монте-Карло. Результаты представлены на Рис. 8 для данных седьмого года и на Рис.9 для данных девятого года. Первые находятся в хорошем согласии с результатами Хансона и Льюиса [78] для данных

WMAP пятого года. В частности, мы подтверждаем результат большой квадрупольной анизотропии в V и W частотных полосах. Как обсуждалось в работах [77]–[79], квадруполь имеет выделенное направление, лежащее очень близко к полюсам эклиптики. Ярко выражена частотная зависимость сигнала: он виден в W полосе на большем уровне достоверности, чем в V полосе. Эти два обстоятельства указывают на систематическую природу аномального квадруполя. Действительно, аномальный сигнал пропадает при учете асимметрии функции сглаживания пучка. Это хорошо видно из Рис. 9, построенного для данных WMAP девятого года. Последние совместны с гипотезой о статистической изотропии космического микроволнового фона. Соответственно, они приводят к значительно более сильным ограничениям на параметры моделей ранней Вселенной, предсказывающие статистическую анизотропию.

4.3.1 Ограничения на модели конформного скатывания

Обсудим ограничение на параметр h^2 в модели с конформным скатыванием. Для начала рассмотрим версию модели с промежуточной стадией. Статистическая анизотропия в этом случае полностью описывается уравнениями (102). Имея набор коэффициентов C_L^q , восстановленных из наблюдений микроволнового фона, мы решаем Ур. (123) и оцениваем значение параметра h^2 . Мы провели анализ для мультиполей статистической анизотропии, начиная с $L_{min} = 2$ и вплоть до $L_{max} = 2 - 14$, для данных седьмого и девятого годов. Результаты представлены на Рис. 10 и Рис. 11, соответственно. Для того чтобы вычислить статистические ошибки, мы использовали сто изотропных карт, сгенерированных методом Монте-Карло. Из рисунка 10 явно видно, что в случае данных седьмого года изотропная модель исключена на уровне достоверности более 3σ даже в V полосе. Тем не менее, большое значение h^2 соответствует большой квадрупольной статистической анизотропии, которую мы считаем некосмологической. Действительно, как видно из Рис. 11, где использованы данные девятого года, учет асимметрии функции сглаживания пучка приводит к исчезновению аномального сигнала.

Для того чтобы ограничить параметр h^2 , необходимо сгенерировать большое количе-

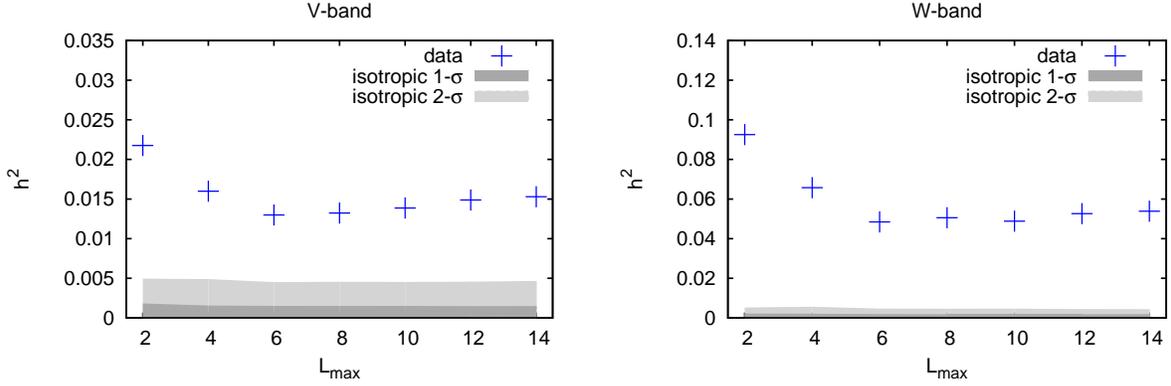


Рис. 10: Эстиматор для параметра h^2 в модели с промежуточной стадией, восстановленный из V (слева) и W (справа) частотных полос данных WMAP седьмого года. Уровни достоверности 1σ (темно-серая полоса) и 2σ (светло-серая полоса) получены с использованием статистически изотропных карт, сгенерированных методом Монте-Карло.

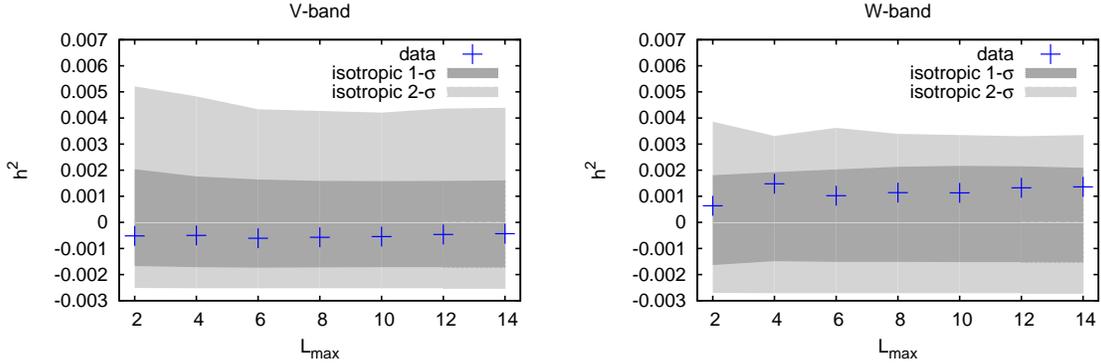


Рис. 11: Эстиматор для параметра h^2 в модели с промежуточной стадией, восстановленный из V (слева) и W (справа) частотных полос данных WMAP девятого года. Уровни достоверности 1σ (темно-серая полоса) и 2σ (светло-серая полоса) получены с использованием статистически изотропных карт, сгенерированных методом Монте-Карло.

ство анизотропных карт для каждого значения этого параметра. При этом мы следуем процедуре, изложенной в работе [78]. Для начала сгенерируем карту Θ^i с диагональной ковариацией \mathbf{S}^i , см. Ур. (108). Затем мы генерируем набор коэффициентов $\{q_{LM}\}$, исхо-

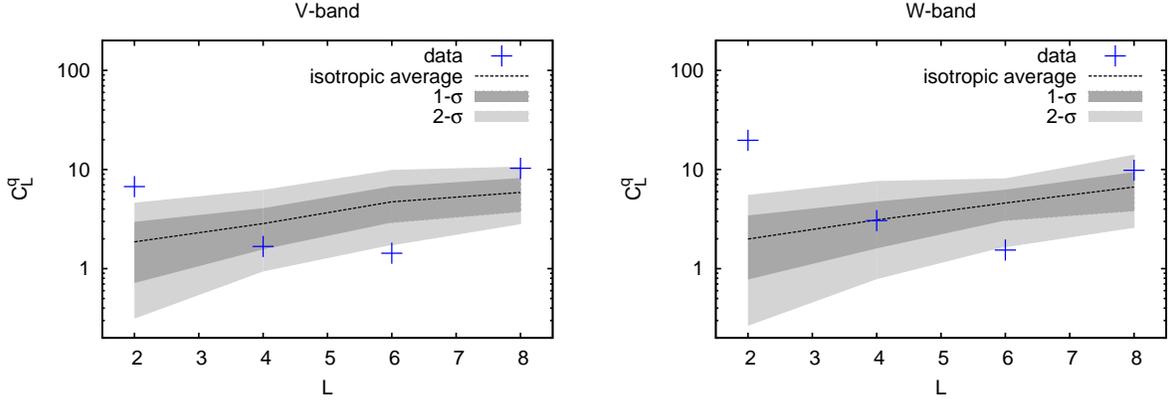


Рис. 12: Спектр мощности статистической анизотропии C_L^q , восстановленный из V (слева) и W (справа) частотных полос данных WMAP седьмого года. Исследован случай статистической анизотропии с убывающей амплитудой $a(k) = H_0 k^{-1}$. Уровни достоверности 1σ (темно-серая полоса) и 2σ (светло-серая полоса) вычислены на основе статистически изотропных карт, сгенерированных методом Монте-Карло.

для из некоторого заданного значения h^2 . Тогда распределение на карте, определенное как

$$\Theta^a = \left(\mathbf{I} + \delta \mathbf{S} [\mathbf{S}^i]^{-1} \right)^{1/2} \Theta^i,$$

характеризуется ковариацией $\mathbf{S}^i + \delta \mathbf{S}$, где $\delta \mathbf{S}$ дается Ур. (109). В линейном порядке по коэффициентам статистической анизотропии,

$$\Theta^a = \Theta^i + \frac{1}{2} \delta \mathbf{S} [\mathbf{S}^i]^{-1} \Theta^i.$$

Наконец, умножим карту на функцию сглаживания, обратим ее в координатное представление, добавим шум в каждый пиксель. Такова процедура получения статистически анизотропной карты $\hat{\Theta}^a$, которую теперь можно сравнить с данными WMAP. Далее ограничение сверху на параметр h^2 соответствует столь большому значению параметра, для которого 95% анизотропных карт возвращают значение h^2 , превышающее оценку, сделанную на основе карт WMAP. Окончательные результаты приведены в таблице 1 для данных седьмого и девятого годов.

	5 год/W	7 год/V	9 год/V	9 год/W
Спец. квадр.	$g_* < 0.3$	-	$ g_* < 0.072$	$ g_* < 0.085$
Аниз. инфл. I	$c - 1 < 3.5 \cdot 10^{-6}$	-	$c - 1 < 8.3 \cdot 10^{-7}$	$c - 1 < 9.8 \cdot 10^{-7}$
Аниз. инфл. II	-	-	$N < 82 \left(\frac{60}{N_{CMB}} \right)^2$	$N < 128 \left(\frac{60}{N_{CMB}} \right)^2$
КС А (ЛП)	-	$h^2 < 190$	$h^2 < 11$	$h^2 < 16$
Генезис (ЛП)	-	$\frac{\Lambda_G^3}{f^3} < 290$	$\frac{\Lambda_G^3}{f^3} < 17$	$\frac{\Lambda_G^3}{f^3} < 24$
КС А (НЛП)	-	$h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda} < 7$	$h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda} < 1.2$	$h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda} < 2.0$
Генезис (НЛП)	-	$\frac{\Lambda_G^3}{f^3} \ln \frac{H_0}{\Lambda} < 11$	$\frac{\Lambda_G^3}{f^3} \ln \frac{H_0}{\Lambda} < 1.8$	$\frac{\Lambda_G^3}{f^3} \ln \frac{H_0}{\Lambda} < 3.0$
КС Б	-	$h^2 < 0.045$	$h^2 < 0.006$	$h^2 < 0.013$

Таблица 1: Ограничение на параметры анизотропных моделей ранней Вселенной, полученные на основе карт WMAP (уровень достоверности 95%). Рассмотрены модели анизотропной инфляции, модели конформного скатывания без промежуточной стадии (КС А) и с промежуточной стадией (КС Б), модель с “генезисом”. Обозначения “ЛП” и “НЛП” соответствуют статистической анизотропии, которая возникает в линейном и в квадратичном порядках по константе h . Ограничения во второй колонке номинальные в том смысле, что они были получены путем непосредственного сравнения с амплитудой аномального квадрупольного [77].

Наконец, рассмотрим версию модели конформного скатывания, в которой промежуточная стадия отсутствует. В линейном порядке по константе h , модель предсказывает статистическую анизотропию общего квадрупольного типа с падающей амплитудой $a(k) \propto k^{-1}$. Последний факт имеет решающее значение в смысле поисков статистической анизотропии в космическом микроволновом фоне. И в самом деле, в этом случае вклад в недиагональную часть матрицы ковариации, $\delta\mathbf{S}$, дополнительно подавлен номером мультиполя l . Это подавление обусловлено тем, что интеграл в Ур. (110) насыщается, грубо говоря, при $k \sim lH_0$. Как результат, мы имеем низкую статистику данных СМВ, полезных в смысле поиска сигнала статистической анизотропии. В этой ситуа-

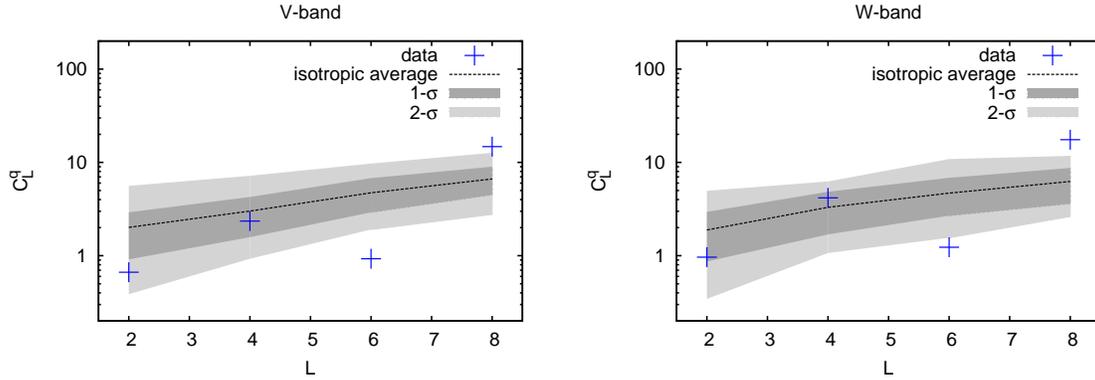


Рис. 13: Спектр мощности статистической анизотропии C_L^q , восстановленный из V (слева) и W (справа) частотных полос данных WMAP девятого года. Исследован случай статистической анизотропии с убывающей амплитудой $a(k) = H_0 k^{-1}$. Уровни достоверности 1σ (темно-серая полоса) и 2σ (светло-серая полоса) вычислены на основе статистически изотропных карт, сгенерированных методом Монте-Карло.

ции применение эstimатора QML несколько неоправданно. Тем не менее, мы формально следуем всем процедурам, описанным выше. На Рис. 12 представлены результаты для коэффициентов C_L^q , восстановленных из величин q_{LM} , в предположении убывающей амплитуды $a(k) = H_0 k^{-1}$. Дальнейшее обсуждение аналогично приведенному выше для модели с промежуточной стадией, но ограничение оказывается значительно слабее. См. Таблицу 1.

Оговоримся, что для столь больших значений h^2 , возможность применения процедуры QML вызывает серьезные сомнения. На приведенное выше ограничение стоит рассматривать просто как указание на то, что ведущий вклад в статистическую анизотропию на самом деле пренебрежимо мал. Более сильное ограничение следует из эффекта статистической анизотропии, появляющегося в следующем порядке по параметру h . Причина состоит в том, что амплитуда $a(k)$ не зависит от волнового числа k в этом случае. Следовательно, отсутствует подавление с номером мультиполя в разложении микроволнового фона. Так как величины q_{2M} негауссовы в этом случае, см. Ур. (104), ограничение ставится несколько иным образом, чем описано выше. Во-

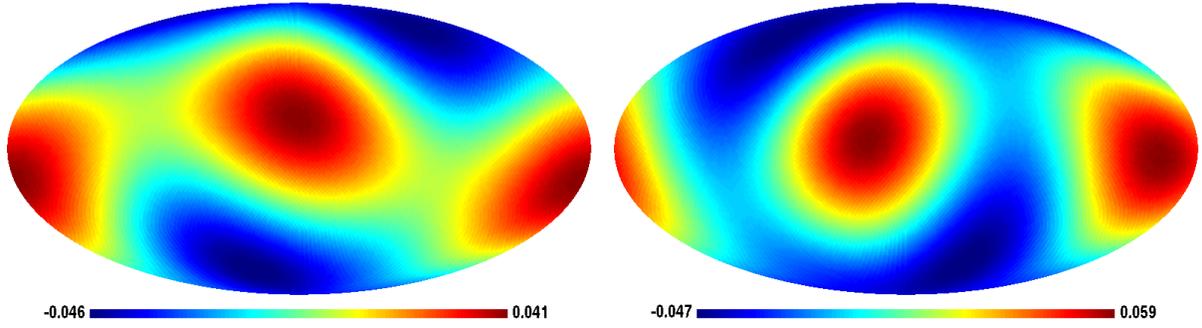


Рис. 14: Амплитуда g_* квадруполья специального вида, восстановленная из данных WMAP девятого года, представлена как функция направления на небесной сфере, в галактической системе координат.

первых, нам нужно сгенерировать компоненты “скорости” \mathbf{v} , исходя из данного значения эффективной константы $h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda}$. Далее, используя (104), мы вычисляем коэффициенты q_{2M} . генерируем анизотропные карты, согласно процедуре, описанной выше, оцениваем коэффициенты $C_2^q = \frac{1}{5} \sum_M |q_{2M}|^2$ из последних и сравниваем их с аналогичной величиной, оцененной из данных WMAP седьмого и девятого годов. Мы приводим окончательные ограничения на эффективный параметр теории $h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda}$ в Таблице 1. Видно, что ограничение на параметр h^2 все еще слабое. Заметим также, что статистическая анизотропия специального квадрупольного вида, предсказываемая в версии модели без промежуточной стадией, имеет тот же вид, что и в некоторых инфляционных моделях [24, 25, 26, 28, 27]. В этом смысле более интересным предсказанием модели является негауссовость в четырехточечной функции [52], которая отличима от соответствующих предсказаний инфляции.

4.3.2 Ограничения на анизотропные модели инфляции

Несмотря на то, что модель конформного скатывания представляет для нас наибольший интерес в настоящей диссертации, техника, описанная в данной Главе, позволяет также ограничить анизотропные модели инфляции. Для начала ограничим амплиту-

Направление	Ограничение на амплитуду g_*
$(l, b) = (96.4, 29.8)$	$-0.039 < g_* < 0.043$
$(l, b) = (96.4, 60.2)$	$-0.076 < g_* < 0.008$
$(l, b) = (186.4, 0.0)$	$-0.022 < g_* < 0.078$

Таблица 2: Ограничения на амплитуду квадруполья специального вида, полученные из данных WMAP девятого года, представлены на уровне достоверности 95%.

ду g_* квадруполья специального вида. Это интересно с точки зрения моделей, в которых амплитуда g_* непосредственно связана с параметрами теории. В качестве первого упражнения фиксируем определенные направления нарушения статистической изотропии на небесной сфере и применим эстиматор (119). Результаты оценки амплитуды g_* приведены на Рис. 14. Процедуру ограничения можно разбить на следующие этапы:

- Мы вычисляем набор коэффициентов $\{q_{2M}\} = q_{2,-2}, q_{2,-1}, \dots, q_{2,2}$, исходя из некоторого фиксированного значения g_* и направления нарушения статистической изотропии \mathbf{d} .
- Для набора $\{q_{2M}\}$ мы генерируем сто анизотропных карт. Для каждой мы оцениваем соответствующее значение g_* . При этом мы используем Ур. (119).
- Мы сравниваем значения амплитуды g_* , полученные из анизотропных карт, с оценкой, полученной из карт WMAP9. Мы требуем, чтобы не больше 95% из них превышали (были меньше чем) оценку из настоящих данных в случае положительной (отрицательной) амплитуды g_* , фиксированной в начале процедуры.

Мы провели указанную процедуру для трех направлений на небе. Одно направление выбрано вдоль полюсов плоскости эклиптики, в то время как другие два образуют ортогональный базис с последним. Ограничения на амплитуду g_* представлены в Таблице 2. Также полезно привести ограничения на уровне достоверности 68% для направления вдоль полюсов эклиптики:

$$-0.018 < g_* < 0.021 . \quad (127)$$

Эти ограничения получены из V полосы данных WMAP девятого года. Для сравнения аналогичное ограничение, полученное из ненаблюдения статистической анизотропии в распределении галактик во Вселенной, $g_* = 0.006 \pm 0.036$ на уровне достоверности 68% [?]. Видно, что наши ограничения совместны с более ранними, но примерно в два раза сильнее.

Для того чтобы ограничить амплитуду g_* независимо от направления нарушения статистической изотропии, мы повторяем описанную выше процедуру, но со следующей оговоркой. Мы выбираем около ста направлений на небе и вычисляем по ним коэффициенты $\{q_{2M}\}$, используя Ур. (105). Для каждого набора $\{q_{2M}\}$, мы генерируем анизотропную карту. Далее, мы применяем Ур. (120), для того чтобы оценить силу статистической анизотропии в реальных данных и в анизотропных картах, полученных методом Монте–Карло. Окончательные результаты представлены в Таблице 1. Для сравнения во второй колонке также приведены аналогичные ограничения, полученные из данных WMAP пятого года. В качестве практического применения полученных результатов мы ограничиваем константу c , свободный параметр в случае **I** анизотропной инфляции (см. Раздел 3.1.3). В свете сравнения с данными Planck, выпишем также ограничение на амплитуду g_* на уровне достоверности 68%,

$$-0.046 < g_* < 0.048 , \quad (128)$$

полученное из V полосы данных WMAP девятого года. Аналогичное ограничение, полученное Кимом и Коматсу на основе данных Planck [34], $-0.014 < g_* < 0.018$ на уровне достоверности 68%. Как и ожидалось, оно сильнее ограничения, полученного на основе данных WMAP, в 2 – 3 раза. Отметим, однако, что ожидаемое усиление на основе сравнения матриц Фишера, несколько выше и оценивается фактором 5. Данное качественное соображение показывает, что ограничение Кима и Коматсу предварительное и может быть улучшено в дальнейших анализах данных Planck.

В заключение напомним, что амплитуда g_* имеет случайную природу в ряде реалистичных моделей анизотропной инфляции. Например, в случае, когда величина g_* обязана своим происхождением квантовым флуктуациям электрического поля, \mathbf{E}_{IR} .

Ограничение в этом случае ставится на полное число e -фолдингов во время инфляции, или точнее на величину $N = N_{tot} - N_{CMB}$. Замечательно, что соответствующее ограничение может быть получено непосредственно из ограничения на параметр $h^2 \ln \frac{H_0}{\Lambda}$ в модели конформного скатывания без промежуточной стадии. Это—ввиду имеющейся “дуальности” (106) между параметрами двух сценариев. Результаты на уровне достоверности 95% приведены в Таблице 1, Ниже мы приводим также ограничение на уровне достоверности 68%,

$$N < 14 \cdot \left(\frac{60}{N_{CMB}} \right)^2 . \quad (129)$$

Отметим, что аналогичное ограничение было получено в работе [96] на основе данных Planck [32]. В указанной статье, однако, авторы пренебрегли случайной природой зависимости амплитуды g_* от числа e -фолдингов N . Поэтому соответствующее ограничение должно пониматься с точностью до фактора порядка единицы.

5 Аномалии микроволнового фона на больших угловых масштабах

В предыдущем разделе мы обсудили ограничения на статистическую анизотропию, следующую из ненаблюдения соответствующего сигнала в данных WMAP. С этим утверждением, однако, следует быть осторожным. Причина состоит в том, что эксперименты Planck и WMAP выявили аномалий на больших угловых масштабах, соответствующих малым мультипольным номерам $l \sim 10$, как то сильная корреляция между квадруполем и октуполем, ”ось зла“, асимметрия спектра мощности, холодные пятна и ряд других [59]–[67]. Первые две аномалии из этого списка подразумевают явное нарушение свойства статистической изотропии в спектре низших мультиполей. Аномалии микроволнового фона являются вполне нетривиальным указанием на отклонения в Λ CDM модели и/или на нестандартную физику в ранней Вселенной до начала Большого Взрыва. Однако, прежде чем делать столь сильное утверждение, отметим, что существуют другие возможные источники. В данном Разделе мы попытаемся объяснить часть аномалий, а именно корреляцию между квадруполем и октуполем, а также асимметрию четности, в терминах неучтенного излучения пояса Койпера, которое нетривиальным образом модифицирует микроволновой фон в области мультиполей $l \sim 10$.

5.1 Фоновое излучение как источник аномалий реликтового микроволнового фона

Потенциальный вклад фонового излучения в сильную корреляцию между квадруполем и октуполем микроволнового фона обсуждался достаточно давно. В работе [111] было сделано заключение, что пренебрегать влиянием галактического излучения на свойства низших мультиполей микроволнового фона, вообще говоря, нельзя. Тем не менее, как было показано в работе [112], эти эффекты статистически незначительны и поэтому не могут служить в качестве объяснения обнаруженной корреляции квадруполя и октуполя. В частности, использование полных ILC карт (см, например [113])

приводит к заключению, что истинная корреляция скорее уменьшается при учете галактического излучения, нежели растет. Тем не менее, не исключена возможность того, что корреляция квадруполь и октуполь чувствительна к излучению неучтенных источников. Работа [102] в определенном смысле восполняет имеющийся пробел. Именно, мы покажем, что присутствие пояса Койпера, расположенного симметрично относительно эклиптической плоскости, может объяснить аномалию.

С другой стороны, излучение пояса Койпера может быть источником другой аномалии микроволнового фона, а именно асимметрии в спектре четных и нечетных мультиполей. Последняя подразумевает доминирование мощности в спектре l , соответствующего нечетным мультиполям по сравнению с четными. Эта аномалия ярко выражена в интервале мультиполей $2 \leq l \leq 23$ [67, 68] (см. также [104]). Естественной величиной, измеряющей отклонение, служит

$$g(l) \equiv \frac{P_+}{P_-} = \frac{\sum_{l_{min}}^{l_{max}} l(l+1)C(l)\Gamma^+(l)}{\sum_{l_{min}}^{l_{max}} l(l+1)C(l)\Gamma^-(l)}. \quad (130)$$

Результаты применения этого эстиматора к данным WMAP приведены на Рис. 15. Видно, что коэффициенты C_l испытывают характерные осцилляции в зависимости от числа l , причем угловой спектр мощности имеет пики при нечетных l , а минимумы—при четных. В работе [97] было сделано указание на потенциальный источник аномалии: симметричное фоновое излучение, например, пояс Койпера. Там же были рассмотрены несколько моделей, различающихся угловой высотой пояса относительно плоскости эклиптики. Пояс Койпера в этих моделях выглядит так, как показано на Рис. 16, причем угол выбран равным $H = 15, 30$ и 70 .

Помимо пояса Койпера, другой важный ингредиент в нашей модели,—дипольная модуляция температуры микроволнового фона. Существование асимметрии углового спектра мощности, вычисленного в северной и южной полусферах микроволнового фона, было впервые обнаружено в работе [100] на уровне достоверности 95% – 99% в зависимости от числа мультиполей, использованных в анализе. Заметим, что имеется неопределенность в понимании этой аномалии. В частности, не совсем понятно, каким

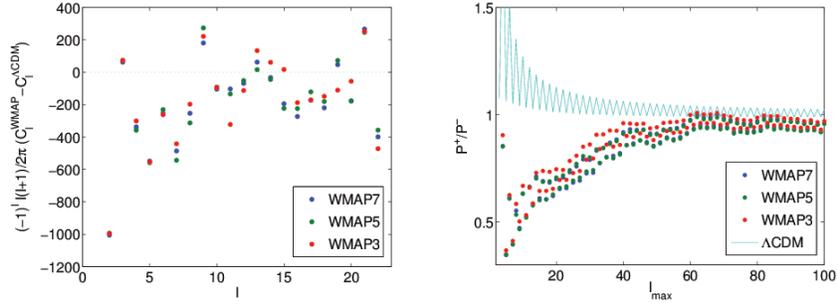


Рис. 15: Слева. $(-1)^l$ ×разность, между угловым спектром, восстановленным из данных WMAP и предсказанным моделью Λ CDM. Справа. Приведен график для оценочного параметра четность-асимметрии $g(l) \equiv \frac{P_+}{P_-}$, вычисленного на основе данных WMAP и модели Λ CDM.

образом меняется анизотропия при переходе от одной полусферы к другой— разрывным или гладким образом. Обычно в анализе данных имеют дело с гладким переходом, предполагая при этом, что модуляция спектра мощности описывается законом косинуса. Нам тоже будет удобнее работать с таким типом асимметрии. Последняя была подвергнута тщательному анализу [109, 106, 101] и исследована на более мелких угловых масштабах. Мы будем всюду предполагать, что дипольная модуляция имеет систематическое, а не космологическое происхождение, а потому модулированным оказывается не только первичный сигнал СМВ, но еще и дополнительное фоновое излучение, в частности, пояс Койпера.

5.2 Модели пояса Койпера

Обсудим несколько более подробно свойства пояса Койпера. Его излучение с хорошей степенью точности описывается законами физики черного тела. Интенсивность излучения пояса Койпера достаточно высока, чтобы повлиять на свойства микроволнового фона, и соответствующий сдвиг равен

$$I(\nu, \hat{\mathbf{r}}) = (B(\nu, T_{KBO}) - B(\nu, T_{СМВ}))\tau(\hat{\mathbf{r}}), \quad (131)$$

где ν частота, на которой ведется наблюдение, $B(\nu, T)$ спектр излучения черного тела с температурой T , а $\tau(\hat{\mathbf{r}})$ длина оптической толщи пояса Койпера в зависимости от направления на небе $\hat{\mathbf{r}}$. Второе слагаемое в правой части Ур. (131) возникает благодаря поглощению фотонов микроволнового фона поясом Койпера. Имеются достаточно сильные ограничения на усредненную по небу длину оптической толщи пояса Койпера: $\tau \lesssim 3 \times 10^{-7}$ [117, 118, 119, 120].

Нагрев пояса Койпера обусловлен превращением солнечной энергии, поглощенной этим объектом, в излучение микроволнового фона. Это позволяет оценить его температуру на расстояниях порядка 40 астрономических единиц, $T \sim 43.7K$. Примечательно, что частотный спектр пояса Койпера не меняется существенно в частотной полосе, соответствующей эксперименту WMAP:

$$(f(\nu_K) - f(\nu_W))/f(\nu_K) \lesssim 0.22 , \quad (132)$$

где $f(\nu)$ спектральная мощность пояса Койпера, тогда как ν_K и ν_W частоты K - и W -полос, соответственно. Поэтому излучение пояса Койпера может легко оказаться неотличимым от вклада самого микроволнового фона. В разрешенной области значений длин оптической толщи, $\tau \lesssim 3 \times 10^{-7}$, усредненный эффект от пояса Койпера оценивается температурой $T \sim 15\mu K$. Если пояс Койпера характеризуется нетривиальной крупномасштабной структурой, тогда он может легко оказаться источником аномалий микроволнового фона.

Следуя [97], мы предполагаем, что пояс Койпера—симметричная полоса, видимая с плоскости эклиптики под углом $\pm H_{KBO}/2$, причем $H_{KBO} = \pi/12, \pi/6, 7\pi/18$. Математическим выражением этих свойств служит формула

$$T_{KBO}(\theta, \phi) = B\Theta \left[\theta - \frac{1}{2}(\pi - H) \right] \Theta \left[\frac{1}{2}(\pi + H) - \theta \right] , \quad (133)$$

где B нормировочная константа, а $\Theta(x)$ функция Хевисайда. Константу B естественно интерпретировать как среднюю температуру пояса Койпера:

$$T_{KBO} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta T_{KBO}(\theta, \phi) = B \sin \left(\frac{H}{2} \right) . \quad (134)$$

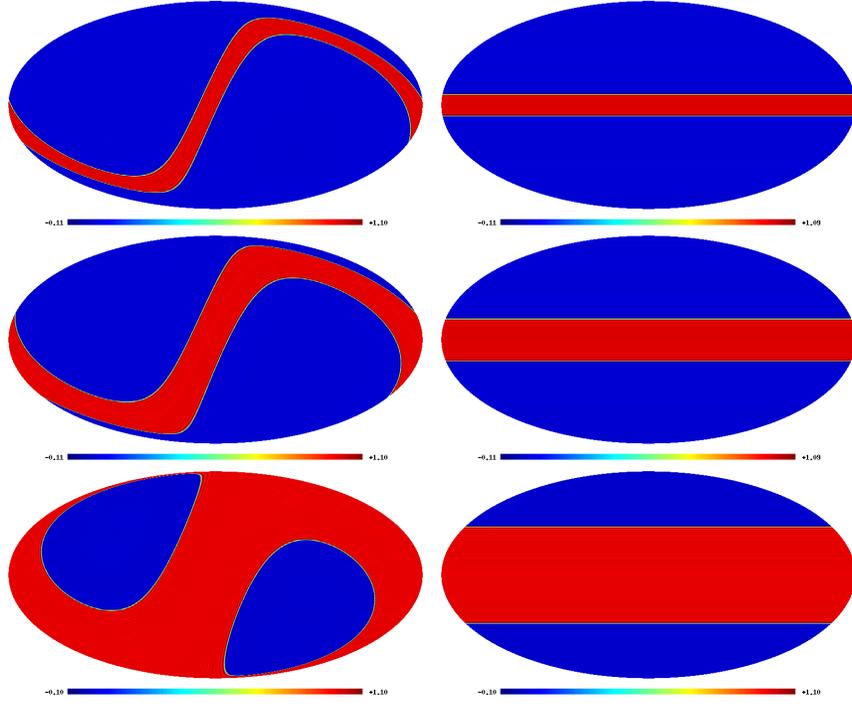


Рис. 16: Слева. Излучение пояса Койпера (в произвольных единицах) в эллиптических координатах для моделей с угловой шириной пояса Койпера $H = \pi/12$ (рисунок сверху), $H = \pi/6$ (рисунок посередине) и $H = 7\pi/18$ (рисунок снизу). Справа. Аналогично рисункам слева, но в галактических координатах.

Далее, разложим сигнал, приходящий от пояса Койпера, по сферическим гармоникам. Коэффициенты разложения определяются выражением

$$f_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} B \Gamma^+(l) \delta_{m0} \int_{(\pi-H)/2}^{(\pi+H)/2} d\theta \sin \theta P_l \cos \theta. \quad (135)$$

Для случая $H \ll \pi/2$, мы можем разложить стоящий в правой части полином Лежандра порядка l в ряд вплоть до квадратичного слагаемого: $P_l(x) \approx P_l(0) + \frac{1}{2} P_l''(0) x^2$. Первая производная равна нулю в силу симметрии модели. Выражения для полиномов Лежандра и их вторых производных в точке $x = 0$ приведены ниже:

$$P_l(0) = \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1\right) \Gamma(1/2 - l/2) \right]^{-1}, \quad P_l''(0) = -l(l+1) P_l(0). \quad (136)$$

Здесь $\Gamma(x)$ гамма-функция. В режиме $l(l+1)H^2/24 \ll 1$ коэффициенты разложения имеют вид:

$$f_{l,0} \approx \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} B \sin\left(\frac{H}{2}\right) P_l(0) \Gamma^+(l) \left[1 - \frac{l(l+1)}{24} H^2\right]. \quad (137)$$

Отсюда, для гармоник с номером l , удовлетворяющим $l \ll 35 \left(\frac{15}{H(\text{deg})}\right)$, коэффициенты разложения $f_{l,0}$ допускают следующее представление

$$f_{l,0} \approx \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} T_{KVO} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}, \quad l = 2n. \quad (138)$$

Для того чтобы явно определить влияние пояса Койпера на низшие мультиполи, вычислим соответствующий ему спектр мощности для каждого значения H_{KVO} и сравним его со спектром мощности микроволнового фона, полученным из карты ИС. Результаты представлены на Рис. 17. Ясно, что для всех трех значений, мощность квадруполь в спектре пояса Койпера, достаточно велика, чтобы оказать существенное влияние на квадруполь микроволнового фона. Заметим также, что модель с $H_{KVO} = 7\pi/18$ может повлиять на поведение мультиполей микроволнового фона вплоть до $l = 19$.

5.3 Влияние пояса Койпера на реликтовый фон

В присутствии дипольно-модулированного пояса Койпера, распределение температуры реликтовых фотонов дается формулой

$$T_c(\mathbf{n}) = T_{ilc}(\mathbf{n}) - [1 + A(\mathbf{qn})] \chi_{KVO}(\mathbf{n}), \quad (139)$$

где $T_c(\mathbf{n})$ и $T_{ilc}(\mathbf{n})$ теоретическая температура реликтовых фотонов и восстановленная из карты ИС, соответственно; $\chi_{KVO} \sim T_{KVO}(\mathbf{n})$ соответствуют вкладу немодулированного пояса Куйпера. В силу симметричности последнего, он инвариантен относительно преобразования пространственной инверсии, тогда как второе слагаемое в формуле, возникающее благодаря дипольной модуляции, антисимметрично: $\epsilon(-\mathbf{n}) = -\epsilon(\mathbf{n})$. Эквивалентная запись формулы (139) в гармоническом представлении имеет вид:

$$c_{lm} = a_{lm} - \chi_{lm} \Gamma^+(l) - \epsilon_{lm} \Gamma^-(l) = a_{lm} - \Pi_{lm}, \quad (140)$$

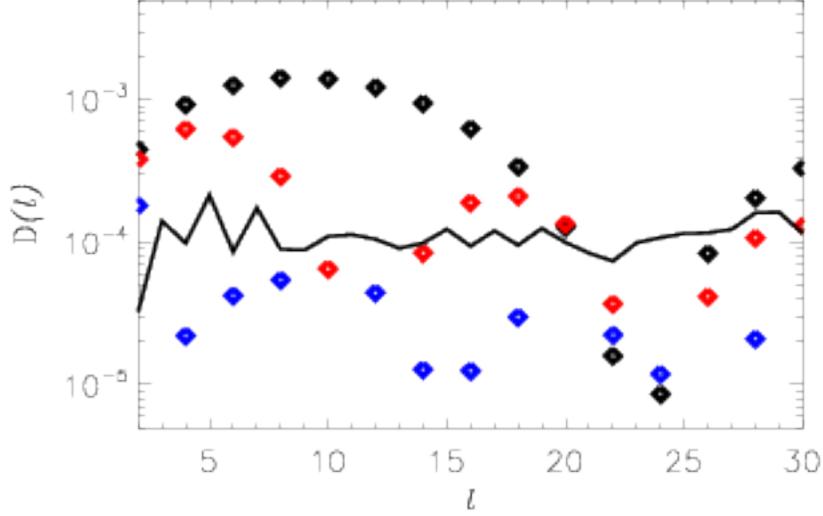


Рис. 17: Угловой спектр мощности $D(l) = \frac{l(l+1)}{2\pi}C(l)$ (в единицах мК) в трех моделях пояса Койпера. Угловая ширина последнего относительно плоскости эклиптики выбрана равной $H = \pi/12$ (черные точки), $\pi/6$ (красные точки) и $7\pi/18$ (синие точки). Черная линия соответствует спектру, восстановленному из карты ИС.

где коэффициенты l_m соответствуют первичному сигналу. Коэффициенты ϵ_{lm} , соответствующие модулированному поясу Койпера, можно представить в виде ряда

$$\epsilon_{lm} = \sum_{m'=-1}^1 \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^m (b_{1m'} f_{l''m''}) = \sqrt{\frac{3(2l''+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l'' & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'' & 1 & l \\ m'' & m' & -m \end{pmatrix} \quad (141)$$

Здесь величины b_{lm} определяются амплитудой дипольной модуляции: $b_{lm} = \frac{4\pi A}{3} Y_{lm}^*(\mathbf{n})$. Далее, с учетом симметричности пояса Койпера, $f_{lm} = f(l)\Gamma^+(l)\delta_{m0}$, выражения для ϵ_{lm}

несколько упрощаются,

$$\begin{aligned} \epsilon_{lm} = & \sum_{m'=-1}^1 \sum_{l''=2}^{\infty} (-1)^m \Gamma^+(l'') b_{1m'} f_{l''} = \\ & \sqrt{\frac{3(2l''+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l'' & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'' & 1 & l \\ 0 & m' & -m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (142)$$

Ясно, что эффект дипольной модуляции приводит к нетривиальным связям между четными и нечетными мультиполями излучения пояса Койпера. Этот факт будет иметь решающее значение для объяснения сильной корреляции между квадруполем и октуполем.

5.4 Восстановление чётность-симметрии в присутствии пояса Койпера

Для удобства дальнейшего анализа полезно определить коэффициенты корреляции между сигналом, полученным из карты ИЛС, и излучением пояса Койпера,

$$K(l) = \frac{\sum_m [a_{lm} \Pi_{lm}^* + a_{lm}^* \Pi_{lm}]}{2(\sum_m |a_{lm}|^2 \sum_{m'} |\Pi_{lm'}|^2)^{1/2}}. \quad (143)$$

а также между микроволновым фоном и поясом Койпера,

$$\zeta(l) = \frac{\sum_m [c_{lm} \Pi_{lm}^* + c_{lm}^* \Pi_{lm}]}{2(\sum_m |c_{lm}|^2 \sum_{m'} |\Pi_{lm'}|^2)^{1/2}}. \quad (144)$$

Из (143) и (144) выразим угловой спектр мощности первичного сигнала через угловой спектр мощности, вычисленный из карты ИЛС:

$$C_p(l) = \frac{1}{2l+1} \sum_m |c_{lm}|^2 = V(l) C_{ilc}(l), \quad (145)$$

где

$$V(l) = \frac{1 - K^2(l)}{1 - \zeta^2(l)} \quad (146)$$

фактор модуляции мощности, вычисленный на основе карты ИЛС. Используя (145), перепишем параметр $g_p(l)$, измеряющий четность-асимметрию в спектре мощности реликтовых фотонов в виде

$$g_p(l) = \frac{\sum_{m=2}^l n(n+1) V(n) \Gamma^+(n) C_{ilc}(n)}{\sum_{n=2}^l n(n+1) V(n) \Gamma^-(n) C_{ilc}(n)}. \quad (147)$$

Из этого представления видно, что увеличить значение эstimатора $g_p(l)$ (или, другими словами, увеличить вклад четных мультиполей), можно, если предположить, что функции $V^+(l) = V(l)\Gamma^+(l)$ и $V^-(l) = V(l)\Gamma^-(l)$ удовлетворяют условию $V^+(l) \gg V^-(l)$. Обеспечить выполнение этого условия можно двумя способами: либо допустить, что $\zeta^+(l) \rightarrow 1$, или $K^- \rightarrow 1$, где метки “+” and “-” обозначают, что величины ζ или K вычислены при четном и нечетном l , соответственно. Первый случай (соответствующий $|\zeta^+| \rightarrow 1$) обсуждался в работе [97], и он требует значительной корреляции между первичным сигналом и излучением пояса Койпера. Однако, ввиду того, что негауссовость пояса Куйпера хорошо установлена, его сильная корреляция с первичным сигналом СМВ противоречила бы гауссовости и статистической изотропии последнего. Мы будем избегать этой возможности и предполагать, всюду, что $|\zeta^\pm| \ll 1$. В этом случае единственный способ усилить значения эstimатора четность-асимметрии $g_p(l)$ состоит в допущении, что $|K^-| \rightarrow 1$, тогда как $K^+ < 1$. Другими словами, мы предполагаем сильные корреляции между сигналом, полученным из карты ИС, и поясом Куйпера в случае нечетных мультиполей, и сравнительно слабые корреляции для четных мультиполей.

Заметим, что для нечетных мультиполей коэффициент $K(l)$ может быть записан в виде

$$K^-(l) = \frac{\sum_m [a_{lm}\epsilon_{lm}^* + a_{lm}^*\epsilon_{lm}]}{2(\sum_m |a_{lm}|^2 \sum_{m'} |\epsilon_{lm'}|^2)^{1/2}}. \quad (148)$$

5.5 Два частных случая дипольной модуляции

Коэффициент K_l^- зависит от ориентации диполя в эклиптической системе координат, то есть от углов (Θ, Φ) . Подберем углы Θ и Φ таким образом, чтобы коэффициент K_3 был максимален. Поясним, как в этом случае решается проблема сильной корреляции между квадруполем и октуполем. Компонента ϵ_{lm} , соответствующая $l = 3$, является линейной комбинацией коэффициентов f_{2m} и f_{4m} . Отсюда следует, что увеличивая параметр K_3 (тем самым ослабляя четность-асимметрию первичного сигнала), мы усиливаем связь между четными и нечетными компонентами первичного сигнала. В этом

m	$Re^{l_3}(a_{2m})$	$Im^{l_3}(a_{2m})$	$Re^{l_5}(a_{2m})$	$Im^{l_5}(a_{2m})$
0	$1.3576 \cdot 10^{-2}$	0	$1.3576 \cdot 10^{-2}$	0
1	$-1.5904 \cdot 10^{-3}$	$-1.1121 \cdot 10^{-3}$	$-1.5904 \cdot 10^{-3}$	$-1.1121 \cdot 10^{-3}$
2	$-7.8456 \cdot 10^{-3}$	$-1.9363 \cdot 10^{-2}$	$-7.8456 \cdot 10^{-3}$	$-1.9363 \cdot 10^{-2}$
m	$Re^{l_3}(a_{3m})$	$Im^{l_3}(a_{3m})$	$Re^{l_5}(a_{3m})$	$Im^{l_5}(a_{3m})$
0	$-2.3688 \cdot 10^{-2}$	0	$-8.5516 \cdot 10^{-3}$	0
1	$-1.1804 \cdot 10^{-2}$	$5.4817 \cdot 10^{-3}$	$-1.4239 \cdot 10^{-2}$	$-8.4113 \cdot 10^{-3}$
2	$2.3844 \cdot 10^{-3}$	$5.0355 \cdot 10^{-3}$	$2.1783 \cdot 10^{-2}$	$-9.7430 \cdot 10^{-3}$
3	$-1.6411 \cdot 10^{-2}$	$2.0018 \cdot 10^{-2}$	$-2.8771 \cdot 10^{-3}$	$2.6001 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3: Коэффициенты октупольной и квадрупольной анизотропии, восстановленные для двух случаев максимизации параметра K .

смысле, максимизация коэффициента K_3 предполагает оптимальный способ для ослабления корреляций между квадрупольной и октупольной компонентами первичного сигнала микроволнового фона. Благодаря симметрии излучения от пояса Койпера, только компоненты ϵ_{30} , ϵ_{31} и $\epsilon_{3,-1}$ отличны от нуля. Они формируют вектор, направление которого всецело зависит от параметров дипольной модуляции. Таким образом, по крайней мере в определенном режиме дипольной модуляции, мы имеем шанс объяснить одновременно как асимметрию четности, так и сильную корреляцию между октуполем и квадруполем. Параметр K_3 максимален, если азимутальный угол Φ полностью компенсируется фазой (3, 1)-й компоненты карты ИЛС, то есть $\Phi = -\phi_{3,1}$. Как следует из Таблицы 3, фаза (3, 1)-й компоненты октуполя равна $\phi_{3,1} = 1.227$, При этом азимутальный угол Φ должен быть равен $\Phi = -\phi_{3,1}$. Отсюда следует, что коэффициент корреляции K_3 имеет вид

$$\begin{aligned}
K_3(\Theta) &= \frac{a_{3,0}b \cos \Theta + 2|a_{3,1}|c \sin \Theta}{\sqrt{7C_3[b^2 \cos^2 \Theta + 2c^2 \sin^2 \Theta]}} \\
&= \left(\frac{a_{3,0}^2 b^2 + 4c^2 |a_{3,1}|^2}{7C_3} \right)^{1/2} \frac{\cos(\Theta - \eta)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \Theta + 2c^2 \sin^2 \Theta}},
\end{aligned} \tag{149}$$

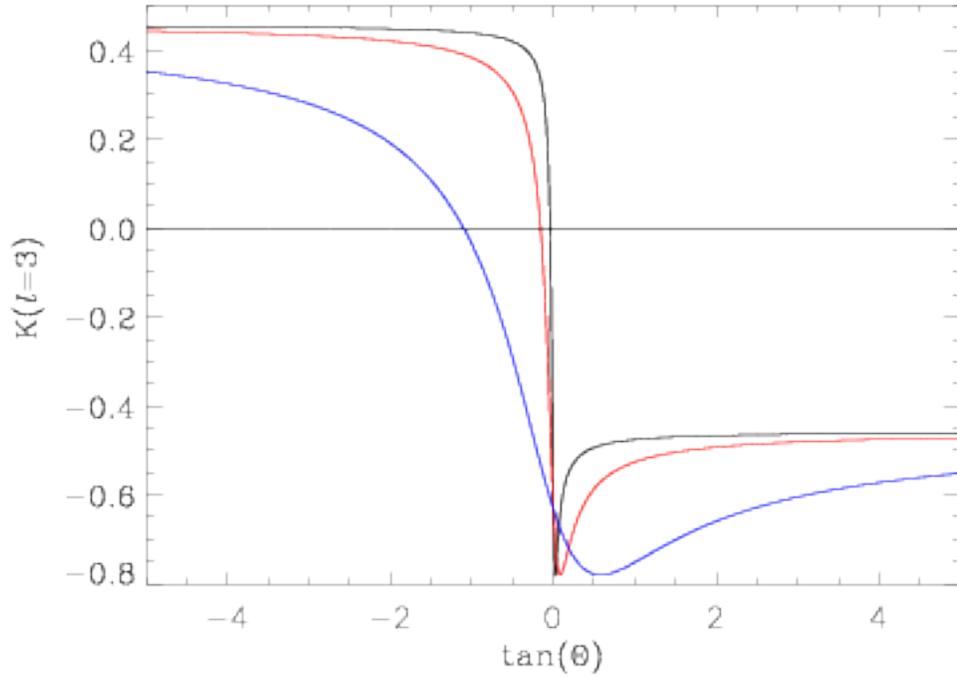


Рис. 18: Коэффициент K_3 представлен как функция $\tan(\Theta)$ в эллиптических координатах. Черная линия соответствует $H = \pi/12$, красная линия указывает на модель с $H = \pi/6$, а синяя линия соответствует модели с $H = 7\pi/18$.

где мы воспользовались следующей параметризацией: $\epsilon_{3,0} = b \cos \Theta$ и $|\epsilon_{3,1}| = c \sin \Theta$, C_3 мощность октуполя, вычисленного из карты ИЛС,

$$\eta = \tan^{-1} \left(\frac{2|a_{3,1}|c}{a_{3,0}b} \right). \quad (150)$$

Как следует из Таблицы 3, амплитуды октуполя величины одного порядка в эллиптических координатах, в то время как параметры b и c зависят от спектра мощности излучения пояса Койпера. Мы рассмотрим две потенциально интересные асимптотики, $|b| \gg |c|$, и $|b| \ll |c|$. Случай $|b| \gg |c|$ соответствует ситуации, когда излучение модулированной части пояса Койпера сконцентрировано в моде с $m = 0$. При этом коэффициент

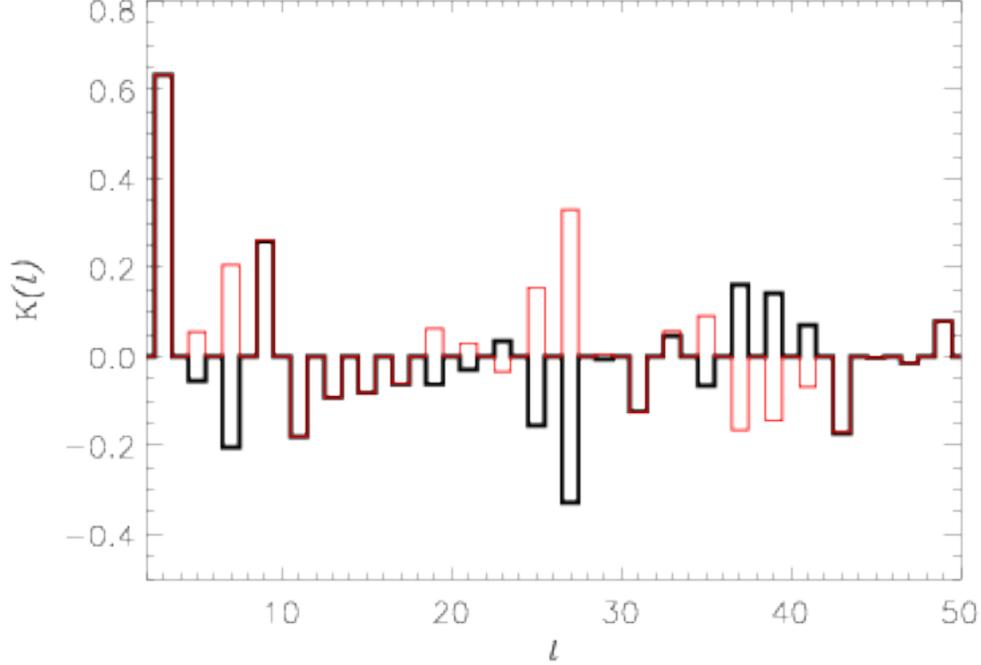


Рис. 19: Параметр $K_l^-(\Theta)$ в зависимости от номера мультиполя l . Черная линия соответствует модели с $H = \pi/12$, а красная линия указывает на модель с $H = \pi/6$.

корреляции между данными карты ILC и поясом Койпера дается выражением,

$$K_3(\Theta) \approx \frac{a_{30}}{\sqrt{7C_3}} \approx -0.65, \quad \Theta \ll \frac{\pi}{2}. \quad (151)$$

В обратном случае, когда $|b| \gg |c|$, коэффициент корреляции дается формулой

$$K_3(\Theta) \approx \frac{\sqrt{2}|a_{3,1}|}{\sqrt{7C_3}} \approx 0.46. \quad \Theta \gg \tan^{-1} \left(\frac{a_{30}b}{2c|a_{31}|} \right) \quad (152)$$

Альтернативно, можно минимизировать мощность мультиполя, соответствующего первичному сигналу СМВ с номером $l = 5$. Заметим, что мода с номером $l = 5$ является одним из главных источников асимметрии четности. Мы используем тот факт, что коэффициенты $\epsilon_{5,0}$ и $\epsilon_{5,1}$ модулированного пояса Койпера отличны от нуля. Учитывая далее то обстоятельство, что фаза (5, 1)-й компонента температурного коэффициента

	M_1	M_2	M_3	среднее
Окт.-Квадр. (l_3)	0.1860	0.4433	0.4658	0.36505
Окт.-Квадр. (l_5)	0.41576	0.32210	0.3879	0.3752
Окт.-Квадр. (ilc)	0.7478	0.7037	0.7569	0.7361

Таблица 4: Корреляция между квадруполем и октуполем, оцененная методом анализа мультипольных векторов.

карты ИЛС седьмого года равна $\phi_{5,1} = -2.23845$, мы выбрали значение азимутального угла равным $\Phi = -\phi_{5,1}$. При этом корреляция между (5, 1)-м температурным коэффициентом карты ИЛС и $\epsilon_{5,1}$ принимает максимальное значение. Отсюда, мы получаем для коэффициента корреляции между картой ИЛС седьмого года и поясом Койпера

$$K_5(\Theta) = \frac{a_{50}\mu \cos \Theta + 2|a_{51}|\nu \sin \Theta}{\sqrt{11C(l=5)[\mu^2 \cos^2 \Theta + 2\nu^2 \sin^2 \Theta]}} , \quad (153)$$

где мы использовали следующую параметризацию $\epsilon_{50} = \mu \cos \Theta$ и $\epsilon_{51} = \nu \sin \Theta$. Из Ур. (153) мы находим, что максимальное значение $K^-(l=5)(\Theta) \approx 0.28$ соответствует $\Theta \approx \pi/2$.

5.6 Де-корреляция карты ИЛС и пояса Койпера. Результаты.

Теперь мы готовы к обсуждению возможных изменений в морфологии карты ИЛС после удаления пояса Койпера. Мы сконцентрируемся на одной конкретной модели, соответствующей угловому размеру пояса Койпера $H = \pi/6$.

Прежде чем сформулировать результаты, нам хотелось бы подчеркнуть, что процедура де-корреляции, вообще говоря, нестабильная в том смысле, что она нечувствительна к случайным корреляциям между излучением реликтовых фотонов и поясом Койпера. Поэтому, де-коррелируя карту ИЛС и пояс Койпера, можно лишь указать на тенденцию в изменении морфологии карты ИЛС. Впрочем, этого более чем достаточно для наших оценочных целей. В дальнейшем мы полагаем коэффициент корреляции между первичным излучением и излучением пояса Койпера равным нулю, $\zeta(l) = 0$.

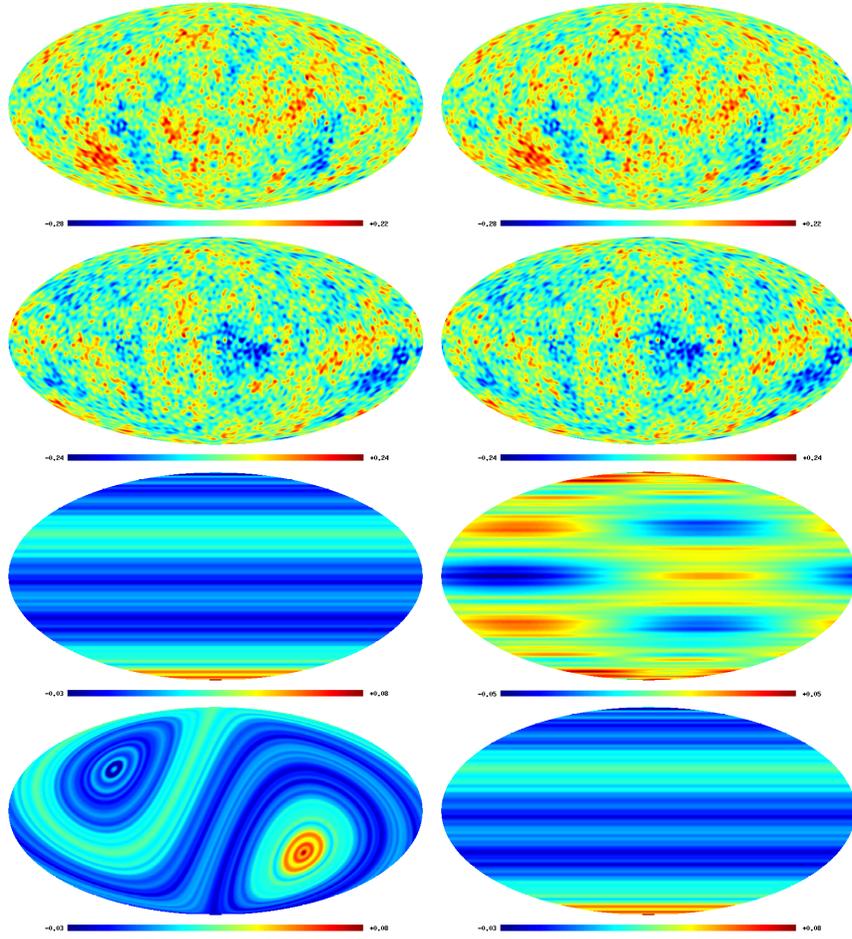


Рис. 20: Слева. Карта ILC, восстановленная для случая $H = \pi/6$. Рисунок сверху: в эклиптических координатах. Второй рисунок сверху: аналогично, но в галактических координатах. На втором рисунке снизу приведена для сравнения карта ILC, включая модулированный пояс Койпера, в эклиптических координатах. На самом нижнем рисунке—аналогично, но в галактических координатах. Все карты соответствуют дипольной модуляции с параметрами $\Theta = \pi$, $\Phi = -1.227\text{rad}$. Рисунки справа: аналогичны рисункам слева, но с другими параметрами дипольной модуляции $\Theta = \pi/2$, $\Phi = 2.2384$.

С этой оговоркой мы готовы к тому, чтобы оценить корреляцию между квадруполем и октополем. Для этого нам пригодится публично доступный код для анализа

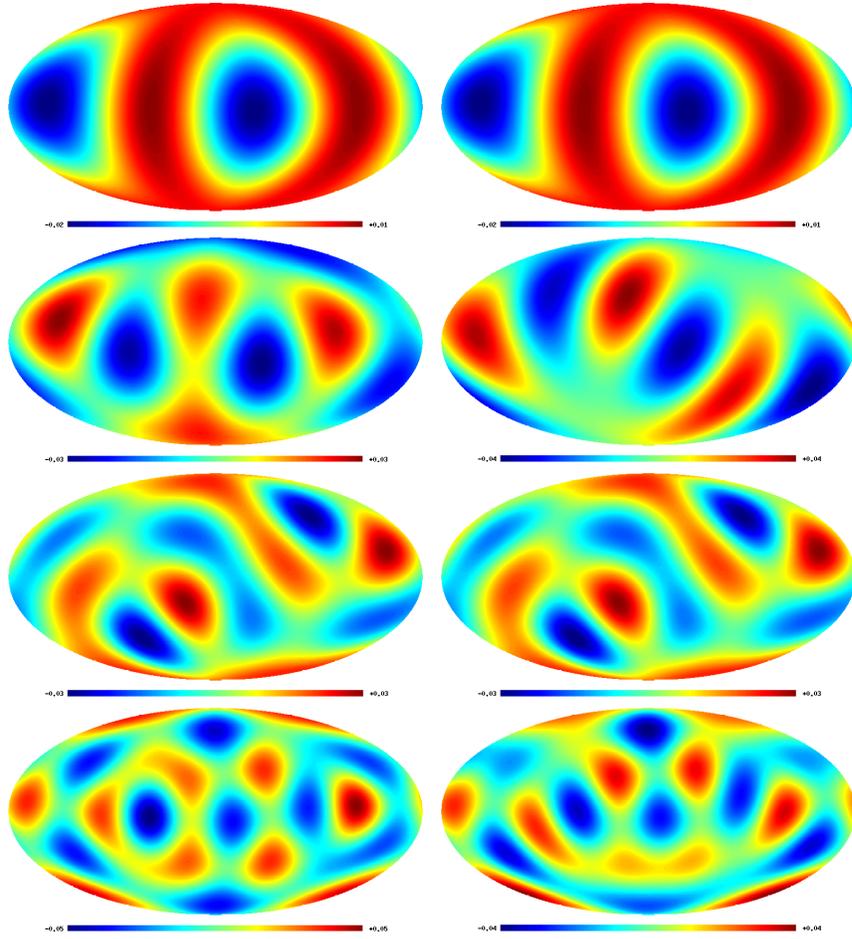


Рис. 21: Слева. Аналогично картинкам на Рис. 20 слева, но с использованием только низших мультиполей $l = 2, 3, 4, 5$ (сверху вниз, соответственно). Справа. Аналогично картинкам на Рис. 20 справа, но с использованием только низших мультиполей $l = 2, 3, 4, 5$ (сверху вниз, соответственно).

мультипольных векторов [121]. В работе [121] авторами были рассмотрены разные подходы к анализу векторов, соответствующих разным мультиполям. Мы предпочитаем использовать статистику ориентированной площади. Конкретно, рассмотрим следующую величину

$$|\hat{v}^{l_1, i} \times \hat{v}^{l_1, j}| |\hat{v}^{l_2, k} \times \hat{v}^{l_2, m}|, \quad (154)$$

Для данных l_1 и l_2 скалярное произведение определено неоднозначным образом, и ха-

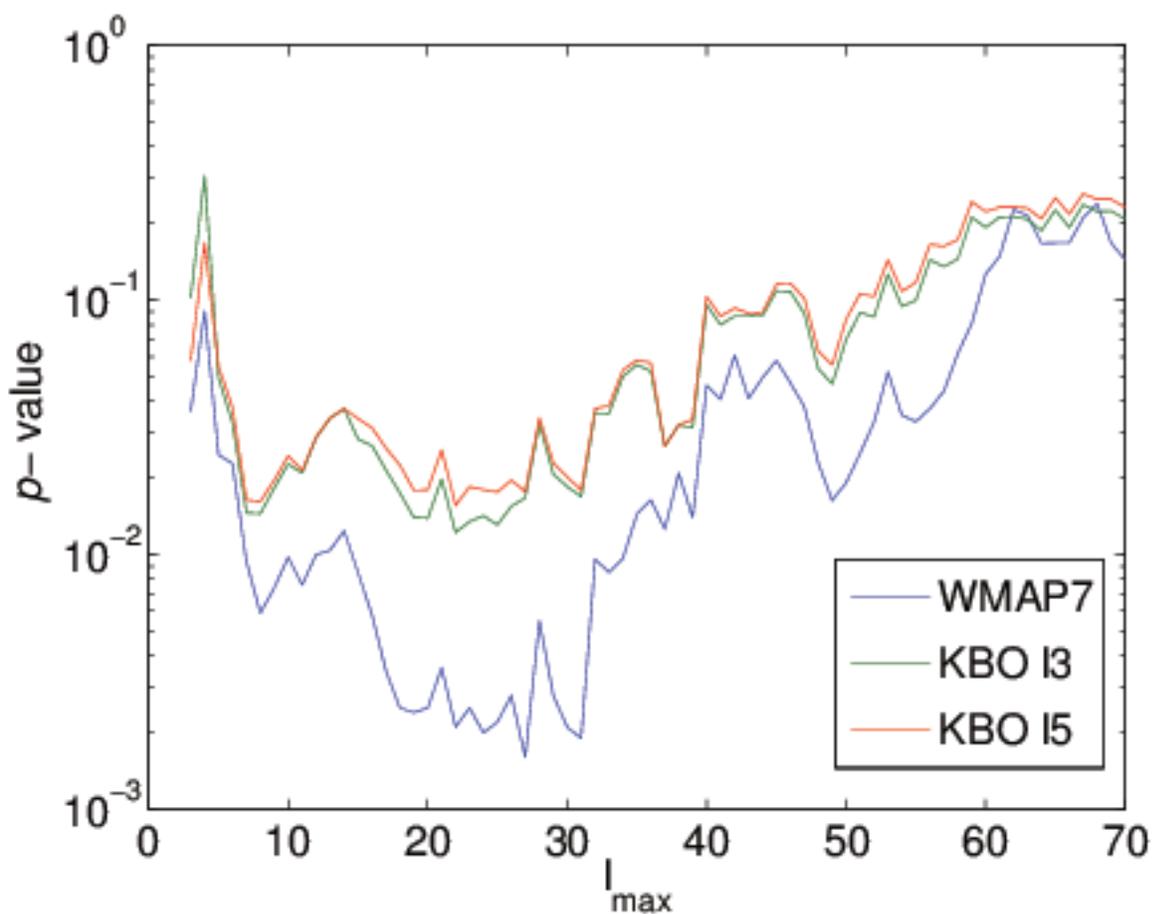


Рис. 22: Вероятность наблюдения асимметрии четности для частной модели с $H = 30$ нормировкой на $l = 3$ (зеленая линия), нормировкой на $l = 5$ (красная линия) и для карты ИС седьмого года (голубая линия).

характеризуется числом $M = l_1(l_1 - 1)l_2(l_2 - 1)/4$. Так, для квадруполь и октуполь имеется всего три разных числа M_1 , M_2 и M_3 . Мы привели результаты для корреляции между квадруполем и октуполем в Таблице 4. Там же для сравнения приведены значения, полученные из карты ИС седьмого года. Явно видно, что для карты, очищенной от модулированного пояса Койпера, корреляция между октуполем и квадруполем значительно слабее.

6 Заключение

- Исследованы теоретические и феноменологические свойства модели конформного скатывания. В частности, разработана версия модели с длительной промежуточной стадией между окончанием конформного скатывания и началом Большого Взрыва.
- В модели с промежуточной стадией получены предсказания, которые могут представлять интерес с точки зрения космологических экспериментов. Наиболее существенное среди них — зависимость спектра первичных скалярных возмущений от направления вектора импульса, характеризующего космологическую моду. В разложении этой зависимости по сферическим гармоникам представлены все возможные четные мультиполи, начиная с квадрупольного общего вида.
- Среди других предсказаний модели с промежуточной стадией следует отметить небольшой наклон спектра первичных возмущений, негауссовость на уровне 3-точечной и 4-точечной функции. Последние два предсказания могут представлять существенный интерес в смысле поиска негауссовости в данных космического микроволнового фона.
- Были исследованы данные экспериментов WMAP седьмого и девятого годов на вопрос наличия в них статистической анизотропии. В частности, мы подтвердили наличие сигнала статистической анизотропии частного квадрупольного вида, ярко выраженного в V и W частотных каналах WMAP седьмого года. Свойства этого сигнала (частотная зависимость и направленность вдоль полюсов эклиптики) дают основания считать, что сигнал имеет происхождение систематическую ошибку. Аномалия отсутствует в данных WMAP девятого года, где учтена асимметрия функции сглаживания луча.
- Мы ограничили ряд моделей ранней Вселенной, предсказывающих статистическую анизотропию первичных скалярных возмущений, на основе данных WMAP

седьмого и девятого годов. В частности, мы рассмотрели модели конформного скатывания и анизотропной инфляции.

- Мы исследовали проблему сильных корреляций в низших мультиполях космического микроволнового фона. Мы предложили модель, которая объясняет корреляцию между квадруполем и октуполем присутствием излучения пояса Койпера. Та же модель одновременно разрешает проблему асимметрии в спектре низших четных и нечетных мультиполей микроволнового фона.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность научному руководителю академику В. А. Рубакову за постоянную поддержку и за переданный творческий импульс.

Автор признателен своим коллегам и соавторам М. Либанову, С. Миронову и Г. Рубцову за плодотворную совместную работу.

Автор благодарен своим многочисленным коллегам из Института Ядерных Исследований: Д. Горбунову, С. Демидову, Д. Левкову, Э. Нугаеву, С. Сибирякову, А. Панину, С. Троицкому, Д. Кирпичникову, М. Кузнецову, П. Сатунину, Е. Зенкевичу и М. Осипову,—за творческую атмосферу и за ряд ценных обсуждений.

Хочется отметить гостеприимство Института Нильса Бора (Копенгаген), Свободного Университета Брюсселя, Лундского Университета и Университета Людвиг-Максимилиана (Мюнхен), где родились многие идеи, вошедшие в диссертацию. В частности, автор благодарен сотрудникам университетов Павлу Насельскому, Петру Тинякову, Гие Двали и Роману Пасечнику, а также коллегам Аре Мартиросяну, Денису Каратееву, Федерико Урбану, Юки Сато и другим.

Автор благодарен всем сотрудникам кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ, где он сделал первые шаги в области теоретической физики.

Приложение А. Вывод формулы (30)

В данном Приложении мы рассмотрим задачу Коши для уравнения Д'Аламбера (26) с начальными данными, определенными на гиперповерхности,

$$f(y) = \eta - \eta_*(\mathbf{y}) = 0 , \quad (155)$$

где y обозначает точку с координатами $y^\mu = (\eta, \mathbf{y})$.

Пусть $\tilde{\theta}(x)$ решение уравнения Д'Аламбера (26), причем $\tilde{\theta}(y)$ и $\partial_N \tilde{\theta}(y)$ совпадают с $\theta(y)$ и $\partial_N \theta(y)$ на гиперповерхности Коши (отсюда и впредь, ∂_N обозначает нормальную производную). Удобно ввести функцию

$$\theta(x) = \tilde{\theta}(x) \cdot \Theta[f(x)] ,$$

где Θ функция Хевисайда. Отсюда,

$$\square \theta = \partial_\mu \tilde{\theta} \partial^\mu f \cdot \delta(f) + \partial_\mu [\tilde{\theta} \partial^\mu f \cdot \delta(f)]$$

а потому

$$\theta(x) = \int d^4 y \left\{ D^{ret}(x, y) \partial_\mu \theta(y) \partial^\mu f(y) \cdot \delta[f(y)] - \left[\frac{d}{dy^\mu} D^{ret}(x, y) \right] \theta(y) \partial^\mu f(y) \cdot \delta[f(y)] \right\} , \quad (156)$$

где мы опустили тильду над θ в правой части. Второе слагаемое в подынтегральном выражении получается путем интегрирования по частям. Формула (156) не что иное, как обобщение формулы (28), приведенной в основном тексте диссертации, а $\partial_\mu \theta \partial^\mu f \propto \partial_N \theta$.

В интересном для нас случае нормальная производная к гиперповерхности Коши равна нулю, а значит первое слагаемое в Ур.(156) отсутствует. С учетом (29), мы можем написать

$$\frac{d}{dy^\mu} D^{ret}(x, y) = -\frac{1}{\pi} (x_\mu - y_\mu) \delta'[(x - y)^2] .$$

Используя точное выражение (155) для $f(y)$, проинтегрируем (156) по η и получим при $x = (\eta_1, \mathbf{x})$

$$\theta(x) = \frac{1}{\pi} \int d^3 y [\eta_1 - \eta_*(\mathbf{y}) + \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \theta(\mathbf{y}) \delta'([\eta_1 - \eta_*(\mathbf{y})]^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2) , \quad (157)$$

где $v_i = -\partial_i \eta_*(\mathbf{y})$, а $\theta(\mathbf{y}) \equiv \theta[\mathbf{y}, \eta_*(\mathbf{y})]$ значение поля на гиперповерхности Коши. Удобно ввести новую переменную интегрирования \mathbf{r} , определенной из $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, а \mathbf{n} единичный вектор. В новых обозначениях интеграл (157) принимает вид

$$\theta(x) = \frac{1}{\pi} \int d\Omega_{\mathbf{n}} r^2 dr [\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr}) - \mathbf{nv}r] \theta(\mathbf{x} + \mathbf{nr}) \delta'([\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr})]^2 - r^2) . \quad (158)$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{nr})$. Наконец, используем тождество

$$\delta'([\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr})]^2 - r^2) = -\frac{1}{2\{r - \mathbf{nv}[\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr})]\}} \frac{\partial}{\partial r} \delta([\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr})]^2 - r^2) ,$$

Так как $r \neq 0$ на гиперповерхности Коши, мы можем проинтегрировать выражение (158) по частям. Также используем, что

$$\delta([\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr})]^2 - r^2) = \frac{1}{2r(1 - \mathbf{nv})} \delta[r - r(\mathbf{n})] , \quad (159)$$

где $r(\mathbf{n})$ решение Ур. (31). Мы получаем

$$\begin{aligned} \theta(x) = \frac{1}{\pi} \int d\Omega_{\mathbf{n}} dr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2\{r - \mathbf{nv}[\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr})]\}} [\eta_1 - \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{nr}) - \mathbf{nv}r] \theta(\mathbf{x} + \mathbf{nr}) \right) \\ \times \frac{1}{2r(1 - \mathbf{nv})} \delta[r - r(\mathbf{n})] . \end{aligned}$$

После не очень утомительных вычислений мы получаем следующее выражение для фазы,

$$\theta(x) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{n}} \left[\theta + \frac{1}{1 - \mathbf{nv}} r \partial_r \theta \right] , \quad (160)$$

где $\theta = \theta(\mathbf{y}, \eta_*(\mathbf{y}))$, причем $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{nr}$. Подчеркнем, что Ур. (160) точное решение задачи Коши в случае, если нормальная производная фазы равна нулю, $\partial_N \theta = 0$. При больших r , второе слагаемое в подынтегральном выражении доминирует и мы получаем формулу (30) из основной части диссертации.

Приложение Б. Технические детали вычисления методом перевала

Первая седловая точка: $\mathbf{n} \approx \hat{\mathbf{k}}$

Для того чтобы найти седловые точки интеграла (33), решим Ур. (35), где $\partial\psi/\partial\mathbf{n}$ дается (36). В линейном порядке по h , первая седловая точка соответствует

$$\mathbf{n}_+ = \hat{\mathbf{k}} + 2[\mathbf{v} - \hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v})]$$

где

$$\lambda = 1 + 2\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v} . \quad (161)$$

Вычислим вклад в интеграл (33) от области интегрирования в непосредственной близости седловой точки \mathbf{n}_+ . Выберем систему отсчета таким образом, чтобы третья ось была направлена вдоль \mathbf{n}_+ , и обозначим через ϑ и φ угловые координаты в этой системе отсчета. Тогда

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_+ + \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)} ,$$

где $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ величины первого и второго порядка по ϑ , соответственно,

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, 0) ,$$

$$\mathbf{n}^{(2)} = (0, 0, \cos \vartheta - 1) .$$

Отсюда мы получаем

$$\psi(\mathbf{n}) = \psi(\mathbf{n}_+) + \psi^{(2)} ,$$

где

$$\psi^{(2)} = \frac{\partial\psi}{\partial n_i} n_i^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial n_i \partial n_j} n_i^{(1)} n_j^{(1)}$$

а производные вычисляются в седловой точке $\mathbf{n} = \mathbf{n}_+$. Первая производная дается Урми (35) и (161) из основной части диссертации, в то время как в линейном порядке по v и ∂v (то есть, в линейном порядке по h), вторая производная равна

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n_i \partial n_j} = r(k_i v_j + k_j v_i) + r^2(\mathbf{k}\mathbf{n}_+ + k)\partial_i v_j .$$

Несложно далее вычислить интеграл по углам (сначала удобно произвести интегрирование по углу ϑ вблизи $\vartheta = 0$ с весом $\vartheta d\vartheta$, затем разложить получившееся выражение в линейном порядке по v и ∂v и проинтегрировать по углу φ). В линейно порядке по константе h мы получаем

$$ir \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} e^{i\psi^{(2)}} = \frac{1}{2k} [1 - 2(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v})][1 + r(\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \partial_i v_j] .$$

Предэкспоненциальный множитель в (33) вычисляется в точке $\mathbf{n} = \mathbf{n}_+$. Собирая все воедино, мы получаем для вклада первой седловой точки (в линейном порядке по h):

$$I_+ = \frac{1}{2} e^{i\psi(\mathbf{n}_+)} \frac{1 + r \cdot (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \partial_i v_j}{k + \mathbf{k}\mathbf{v}} .$$

Обратим внимание на нетривиальное сокращение между слагаемыми, зависящими от \mathbf{v} , в предэкспоненциальном множителе. Наконец, вспомним, что

$$\psi(\mathbf{n}_+) = \mathbf{k}\mathbf{n}_+ \eta_1 - (\mathbf{k}\mathbf{n}_+ + k) \eta_*(\mathbf{x} + \mathbf{n}_+ r) = k\eta_1 - 2k\eta_*(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r) ,$$

где все еще подразумевается линейный порядок по h . Так как $\delta\eta_*$ и \mathbf{v} уже порядка h , их аргумент равен просто $\mathbf{y}^{(+)} = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{k}}r$. Это и завершает вывод первого слагаемого в формуле (37).

Вторая седловая точка

Вторая седловая точка в точности соответствует

$$\mathbf{n}_- = -\hat{\mathbf{k}}$$

(подчеркнем, что это точный результат, верный во всех порядках по v). В этой седловой точке верно, что

$$\psi(\mathbf{n}_-) = -k\eta_1 .$$

Далее посторяя рассуждения приведенные выше, мы получаем выражение для вклада второй седловой точки,

$$I_- = \frac{1}{2} e^{i\psi(\mathbf{n}_-)} \frac{1}{k + \mathbf{k}\mathbf{v}} .$$

Это завершает вывод формулы (37).

Приложение В. Мультиполи статистической анизотропии.

Поле $\delta\eta_*(\mathbf{x})$ суть изотропное гауссово поле. Поэтому коэффициенты мультипольного разложения в формуле (42) независимые величины,

$$\langle q_{LM} q_{L'M'}^* \rangle = Q_l \delta_{lL'} \delta_{MM'} .$$

Используя выражение (43), вычислим сумму $\sum_M \langle |q_{LM}|^2 \rangle$. Ввиду того, что $\langle \delta\eta_*(\mathbf{p}) \delta\eta_*^*(\mathbf{p}') \rangle \propto \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, эта сумма представима в виде

$$\sum_M \langle |q_{LM}|^2 \rangle = \int d^3p \frac{\mathcal{P}_{\delta\eta_*}}{4\pi p^3} \sum_M |q_{LM}(\mathbf{p})|^2 . \quad (162)$$

Подынтегральное выражение здесь не зависит от направления вектора \mathbf{p} и поэтому может быть вычислено в произвольной системе отсчета. Для того чтобы упростить формулы, фиксируем систему отсчета, в которой третья ось направлена вдоль оси \mathbf{p} при вычислении коэффициентов $q_{LM}(\mathbf{p})$. Такая процедура законна, поскольку мы вычисляем сумму в правой части выражения (162). Коэффициенты $q_{LM}(\mathbf{p})$ даются в этом случае выражением,

$$\begin{aligned} q_{LM}(\mathbf{p}) &= -i \int d\Omega Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) \cdot p \cos \vartheta \cdot (e^{ipr \cos \vartheta} - e^{-ipr \cos \vartheta}) \\ &= -i \delta_{M0} \sqrt{(2l+1)\pi} \int_{-1}^1 dt P_L(t) \cdot pt \cdot (e^{iprt} - e^{-iprt}) , \end{aligned} \quad (163)$$

где P_L полиномы Лежандра, ϑ угол между импульсами \mathbf{p} и \mathbf{k} , а $t = \cos \vartheta$. Так как подынтегральное выражение (163) симметрично относительно замены $t \rightarrow -t$ (это есть следствие симметрии спектра мощности $\mathcal{P}_{\delta\theta}(\mathbf{k})$ относительно замены $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, см. (41)), коэффициенты с нечетными номерами L равны нулю. В дальнейшем мы рассматриваем только четные $L \neq 0$.

Стандартный способ вычисления интеграла (163) состоит в том, чтобы разложить осциллирующую экспоненту по полиномам Лежандра,

$$e^{iprt} = \sum_{L'=0}^{\infty} (2L'+1) i^{L'} j_{L'}(pr) P_{L'}(t),$$

где j_L сферические функции Бесселя. Далее нам понадобится нормировочное соотношение для полиномов Лежандра,

$$\int_{-1}^1 dt P_L(t) P_{L'}(t) = \frac{2}{2L+1} \delta_{LL'} ,$$

а также рекуррентное соотношение

$$t P_{L'}(t) = \frac{L' P_{L'-1}(t) + (L'+1) P_{L'+1}(t)}{2L'+1} .$$

Теперь не составляет никакого труда вычислить интеграл (163),

$$q_{LM}(\mathbf{p}) = 2\delta_{M0} \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} i^L p [(L+1)j_{L+1}(y) - Lj_{L-1}(y)] ,$$

где

$$y = rp .$$

Подставим это выражение в (162), вспомним выражение (14) и получим

$$\sum_M \langle |q_{LM}|^2 \rangle = \frac{18h^2}{\pi(2L+1)} \int_0^\infty \frac{dy}{y} [(L+1)j_{L+1}(y) - Lj_{L-1}(y)]^2 . \quad (164)$$

Сферические функции Бесселя выражаются через стандартные цилиндрические формулой,

$$j_L(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} J_{L+\frac{1}{2}}(y) .$$

Используем представление для интеграла от двух цилиндрических функций Бесселя с соответствующим весом,

$$\int_0^\infty J_\nu(y) J_\mu(y) y^{-\lambda} dy = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{2\lambda \Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)} .$$

После не очень утомительных алгебраических вычислений мы получаем

$$\sum_M \langle |q_{LM}|^2 \rangle = \frac{3h^2}{\pi} \frac{2L+1}{(L-1)(L+2)} , \quad \text{even } L > 0 ,$$

что соответствует результату (44), приведенному в основной части диссертации.

Полезно заметить, что значимая область интегрирования в формуле (164) соответствует $y \equiv pr \sim L$ (это следует из того, что сферическая функция Бесселя $j_L(y)$ экспоненциально мала при $y \ll L$ и падает как y^{-1} при $y \gg L$). Это означает, что приближение $p \ll (k/r)^{1/2}$ оправдано для $kr \gg 1$, если L не очень велико.

Приложение Г

В данном Приложении, мы приводим детали вычисления формулы (78) для ведущего вклада в биспектр в ситуации, когда промежуточная стадия длиннее, чем l_1 (в терминах параметра z). Напомним, вклад порядка $1/z$ исчезает в данной ситуации. Для того чтобы вычислить биспектр в порядке $1/z^2$, мы раскладываем медленно меняющиеся функции углов (θ_1, ϕ_1) и (θ_3, ϕ_3) вплоть до квадратичных членов,

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \delta \theta_1 - \frac{1}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_1^2,$$

$$\begin{aligned} Y_{l_1 m_1}^*(\theta_1, \phi_1) &= Y_{l_1, m_1}^*(\theta_2, \phi_2) + \frac{\partial Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \theta} \delta \theta_1 + \frac{\partial Y_{l_1, m_1}^*}{\partial \phi} \delta \phi_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \theta^2} \delta \theta_1^2 + \frac{\partial^2 Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \phi \partial \theta} \delta \theta_1 \delta \phi_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \phi^2} \delta \phi_1^2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Y_{l_3 m_3}^*(\theta_3, \phi_3) &= Y_{l_3, m_3}^*(\bar{\theta}_3, \bar{\phi}_3) + \frac{\partial Y_{l_3 m_3}^*}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 + \frac{\partial Y_{l_3, m_3}^*}{\partial \phi_3} \delta \phi_3 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{l_3 m_3}^*}{\partial \theta_3^2} \delta \theta_3^2 + \frac{\partial^2 Y_{l_3 m_3}^*}{\partial \theta_3 \partial \phi_3} \delta \theta_3 \delta \phi_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{l_3 m_3}^*}{\partial \phi_3^2} \delta \phi_3^2. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\theta}_3 = \pi - \theta_2$ и $\bar{\phi}_3 = \pi + \phi_2$. Производные сферической гармоники $Y_{l_3 m_3}^*$ по углам θ_3 и ϕ_3 вычисляются в точках $\bar{\theta}_3$ и $\bar{\phi}_3$, соответственно. Вариации углов θ_3 и ϕ_3 не являются независимыми величинами, но связаны с соответствующими вариациями углов θ_1 и ϕ_1 ,

$$\delta \theta_3 = \frac{1}{4} \frac{y_1 y_2}{(y_1 + y_2) y_3} \sin 2\theta_2 (\delta \phi_1)^2 - \frac{y_1}{y_3} \delta \theta_1 \quad (165)$$

и

$$\delta \phi_3 = \frac{y_1}{y_3 \sin^2 \theta_2} \left(\sin^2 \theta_2 - \frac{y_1}{y_3} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2 \delta \theta_1 \right) \delta \phi_1. \quad (166)$$

Разложение быстро осциллирующего косинуса приведено ниже,

$$\begin{aligned} \cos([y_1 + y_2 - |\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2|]z) &= \cos\left(N[(\delta \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_2 (\delta \phi_1)^2]\right) \left(1 - \frac{1}{8} N^2 \sin^2 2\theta_2 (\delta \theta_1)^2 (\delta \phi_1)^4\right) - \\ &- \sin\left(N[(\delta \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_2 (\delta \phi_1)^2]\right) N \left[-\frac{\delta \theta_1^4}{12} - \sin^2 \theta_2 \frac{\delta \phi_1^4}{12} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \sin^2 \theta_2 \delta \theta_1^2 \delta \phi_1^2 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \delta \theta_1 \delta \phi_1^2 + \frac{y_1 y_2}{4(y_1 + y_2)^2} \left(\delta \theta_1^4 + 2 \sin^2 \theta_2 \delta \theta_1^2 \delta \phi_1^2 + \sin^4 \theta_2 \delta \phi_1^4\right)\right]. \end{aligned} \quad (167)$$

Собирая все воедино и используя хорошо известные значения интегралов

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos Nx^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin Nx^2 dx = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cos Nx^2 dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \sin Nx^2 dx = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4N^{3/2}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cos Nx^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \sin Nx^2 dx = -\frac{3\sqrt{2\pi}}{8N^{5/2}},\end{aligned}$$

мы получаем выражение для ведущего вклада в биспектр,

$$\begin{aligned}\langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle_0 &= \frac{\pi \mathcal{P}_\Phi^{3/2}}{4z^2} \int dy_1 dy_2 (y_1 + y_2)^2 \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(y_1 + y_2) \times \\ &\times A(y_1, y_2, y_1 + y_2, z) \times \\ &\times \left(B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} \left[l_1(l_1 + 1) + \frac{y_1^2}{(y_1 + y_2)^2} l_3(l_3 + 1) + \frac{2y_1 y_2}{(y_1 + y_2)^2} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{2y_1}{y_1 + y_2} F_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} \right). \quad (168)\end{aligned}$$

Коэффициенты $B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}$ здесь определены согласно Ур. (79), тогда как величины $F_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}$ определяются из

$$F_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} = - \int d\theta d\phi \sin \theta Y_{l_2 m_2}^* \left(\frac{\partial Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l_3 m_3}^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{l_3 m_3}^*}{\partial \phi} \right).$$

Для вывода Ур. (168), мы также учли определяющее уравнение для сферических гармоник

$$\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} Y_{lm} + l(l+1) Y_{lm} = 0. \quad (169)$$

Заметим, что Ур. (168) не выглядит симметричным относительно замены мультипольных номеров $(l_1, m_1) \leftrightarrow (l_2, m_2)$. Для того чтобы получить выражение для биспектра в симметричной форме, мы избавляемся от производных сферической гармоники $Y_{l_3 m_3}^*(\theta, \phi)$, производя интегрирование по частям в Ур. (168). Далее, мы используем Ур. (169) для того чтобы избавиться от слагаемых, содержащих $l_3(l_3 + 1) Y_{l_3, m_3}^*$. Опять

осуществляя интегрирование по частям, мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{l_1 m_1} \Theta_{l_2 m_2} \Theta_{l_3 m_3} \rangle_0 &= i^{l_1+l_2+l_3} \mathcal{P}_\Phi^{3/2} \frac{\pi}{4z^2} \int dy_1 dy_2 \Delta_{l_1}(y_1) \Delta_{l_2}(y_2) \Delta_{l_3}(y_1 + y_2) \times \\ &\times A(y_1, y_2, y_1 + y_2) \left\{ 2y_1 y_2 D_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} + \right. \\ &\left. + B_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1} \left[y_2^2 l_1 (l_1 + 1) + y_1^2 l_2 (l_2 + 1) + 2y_1 y_2 \right] \right\} + (l_1, l_2 \leftrightarrow l_3), \end{aligned} \quad (170)$$

Коэффициенты $D_{l_2, m_2; l_3, m_3}^{l_1, m_1}$ здесь определены как

$$D_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} = \int d\phi d\theta \sin \theta \left[\frac{\partial Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l_2 m_2}^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial Y_{l_1 m_1}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{l_2 m_2}^*}{\partial \phi} \right] Y_{l_3 m_3}^*(\pi - \theta, \pi + \phi). \quad (171)$$

Заметим, что Ур. (170) явным образом симметрично относительно замены мультипольных номеров $(l_1, m_1) \leftrightarrow (l_2, m_2)$. Далее, обратим внимание на статистически изотропную форму Ур. (170). В самом деле, форма коэффициентов $B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}$ инвариантна относительно вращений. Это—свойство интеграла по трем сферическим гармоникам. Ясно, что структура производных в Ур. (171) также сохраняет статистическую изотропию. Используя это наблюдение, мы пишем зависимость коэффициентов $D_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}$ от чисел m_i в виде

$$D_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} D_{l_1 l_2 l_3}; \quad (172)$$

коэффициенты $D_{l_1 l_2 l_3}$, введенные здесь, независимы от чисел m_i . Мы используем (172), для того чтобы вывести коэффициенты $D_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}$ в терминах коэффициентов Клебша–Гордона. Для этого мы бурем интеграл по углам в Ур. (171) при нулевых значениях номеров m_i . Далее мы используем следующие соотношения для производных сферических гармоник

$$\frac{\partial Y_{l_0}(\theta)}{\partial \theta} = \sqrt{l(l+1)} Y_{1,1}(\theta, \phi) e^{-i\phi} = -\sqrt{l(l+1)} Y_{1,-1}(\theta, \phi) e^{i\phi}. \quad (173)$$

Подставляя эти соотношения в Ур. (171), используя Ур. (79), в котором числа m_i положены быть равными нулю, а также Ур. (172), мы получаем выражение для коэффициентов $D_{l_1 l_2 l_3}$. Подставляя последние обратно в Ур. (172), но теперь с произвольными

числами m_i , мы приходим к выражению

$$D_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1} = -\sqrt{l_1(l_1+1)}\sqrt{l_2(l_2+1)}B_{l_2, -1; l_3, 0}^{l_1, 1}(B_{l_2 0; l_3 0}^{l_1 0})^{-1}B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}. \quad (174)$$

Наконец, подставляя последнее в Ур. (170), мы получаем выражение (78).

Приведем также детали вычисления формулы (83), описывающей биспектр в ситуации, когда промежуточная стадия короче, чем l_1 (в терминах параметра z). Для того чтобы упростить вычисления, мы опять используем свойство статистической изотропии. Это позволяет нам вычислить биспектр для нулевых значений чисел m_i .

Используя приближенную формулу (82), где числа m_i положены равными нулю, мы получаем для произведения трех сферических гармоник и быстро осциллирующего косинуса

$$\begin{aligned} & Y_{l_1 0}(\theta_1)Y_{l_2 0}(\theta_2)Y_{l_3 0}(\theta_3) \cos\left(N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) = \\ & = \frac{1}{4}Y_{l_1 0}(\theta_2)Y_{l_3 0}(\bar{\theta}_3) \cos\left(l_3\bar{\theta}_3 - \frac{\pi}{4}\right) \times \\ & \times \left[\cos\left(l_1\delta\theta_1 + l_3\delta\theta_3 + N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) + \cos\left(l_1\delta\theta_1 + l_3\delta\theta_3 - N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) + \right. \\ & + \cos\left(l_1\delta\theta_1 - l_3\delta\theta_3 + N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) + \cos\left(l_3\delta\theta_3 + N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2] - l_1\delta\theta_1\right) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{4l_1l_3} \frac{\partial Y_{l_1 0}(\theta_2)}{\partial\theta_2} \cdot Y_{l_2 0}(\theta_2) \cdot \frac{\partial Y_{l_3 0}(\bar{\theta}_3)}{\partial\theta_2} \times \\ & \times \left[\cos\left(l_1\delta\theta_1 + l_3\delta\theta_3 + N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) + \cos\left(l_1\delta\theta_1 + l_3\delta\theta_3 - N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) - \right. \\ & - \cos\left(l_1\delta\theta_1 - l_3\delta\theta_3 + N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) - \cos\left(+l_1\delta\theta_1 - l_3\delta\theta_3 - N[\delta\theta_1^2 + \sin^2\theta_2\delta\phi_1^2]\right) \left. \right] + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Многоточия здесь обозначают слагаемые, вклад которых асимметричен относительно замены $\delta\theta_1 \leftrightarrow -\delta\theta_1$, и поэтому исчезает при интегрировании по углу θ_1 . Седловая точка, соответствующая первому косинусу в третьей строчке,

$$\delta\bar{\theta}_1 = \frac{y_1(l_3 - l_1) - l_1y_2}{y_1y_2|z|}.$$

Аналогичные выражения имеют место для седловых точек остальных слагаемых. Производя интегрирование в окрестности седловых точек, умножая результат на фактор $B_{l_2 m_2; l_3 m_3}^{l_1 m_1}/B_{l_2 0; l_3 0}^{l_1 0}$, мы получаем выражение (83).

Список литературы

- [1] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- [2] C. L. Bennett *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 20 (2013) [arXiv:1212.5225 [astro-ph.CO]].
- [3] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011) [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [4] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, *Phys. Rept.* **215** (1992) 203.
- [5] V. Mukhanov, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2005) 421 p
- [6] D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov, Hackensack, USA: World Scientific (2011) 473 p
D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov, Hackensack, USA: World Scientific (2011) 489 p
- [7] A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30** (1979), 682; [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30** (1979), 719]; *Phys. Lett. B* **91** (1980), 99. A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23** (1981), 347. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108** (1982) 389.
A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982), 1220. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **129** (1983) 177.
- [8] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, *JETP Lett.* **33** (1981), 532; [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33** (1981), 549].
- [9] S. W. Hawking, *Phys. Lett. B* **115** (1982), 295. A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **117** (1982), 175. A. H. Guth and S. Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), 1110. J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 679.
- [10] J. M. Maldacena, *JHEP* **0305** (2003) 013 [astro-ph/0210603].
- [11] S. Mollerach, *Phys. Rev. D* **42**, 313 (1990);
A. D. Linde and V. F. Mukhanov, *Phys. Rev. D* **56** (1997), 535 [arXiv:9610219 [astro-ph]];

- K. Enqvist and M. S. Sloth, Nucl. Phys. B **626** (2002), 395 [arXiv:0109214 [hep-ph]];
T. Moroi and T. Takahashi, Phys. Lett. B **522** (2001), 215 [Erratum-ibid. B **539** (2002), 303] [arXiv:0110096 [hep-ph]];
- D. H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B **524** (2002), 5 [arXiv:0110002 [hep-ph]];
- D. H. Lyth, C. Ungarelli and D. Wands, Phys. Rev. D **67** (2003) 023503 [astro-ph/0208055].
- K. A. Malik, D. Wands and C. Ungarelli, Phys. Rev. D **67** (2003) 063516 [astro-ph/0211602].
- [12] K. Dimopoulos, D. H. Lyth, A. Notari and A. Riotto, JHEP **0307**, (2003), 053; hep-ph/0304050.
- [13] G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **69** (2004), 023505; astro-ph/0303591.
L. Kofman, astro-ph/0303614. G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **69** (2004), 083505; astro-ph/0305548.
- [14] M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **69** (2004) 043508 [astro-ph/0306006].
- [15] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese and A. Riotto, Phys. Rept. **402** (2004) 103 [astro-ph/0406398].
- [16] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458** (1999) 209 [hep-th/9904075]. X. Chen, M. -x. Huang, S. Kachru and G. Shiu, JCAP **0701** (2007) 002 [hep-th/0605045].
M. Alishahiha, E. Silverstein and D. Tong, Phys. Rev. D **70** (2004) 123505 [hep-th/0404084].
D. Langlois, S. Renaux-Petel, D. A. Steer and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 061301 [arXiv:0804.3139 [hep-th]].
D. Langlois, S. Renaux-Petel, D. A. Steer and T. Tanaka, Phys. Rev. D **78** (2008) 063523 [arXiv:0806.0336 [hep-th]].

- N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama and M. Zaldarriaga, JCAP **0404** (2004) 001 [hep-th/0312100].
- Y. -F. Cai and H. -Y. Xia, Phys. Lett. B **677** (2009) 226 [arXiv:0904.0062 [hep-th]].
- J. Khoury and F. Piazza, JCAP **0907** (2009) 026 [arXiv:0811.3633 [hep-th]].
- S. Mizuno, F. Arroja, K. Koyama and T. Tanaka, Phys. Rev. D **80** (2009) 023530 [arXiv:0905.4557 [hep-th]].
- M. -x. Huang, G. Shiu and B. Underwood, Phys. Rev. D **77** (2008) 023511 [arXiv:0709.3299 [hep-th]].
- [17] R. Holman and A. J. Tolley, JCAP **0805** (2008) 001 [arXiv:0710.1302 [hep-th]].
N. Agarwal, R. Holman, A. J. Tolley and J. Lin, arXiv:1212.1172 [hep-th].
- [18] D. Chialva, JCAP **1210** (2012) 037 [arXiv:1108.4203 [astro-ph.CO]].
D. Chialva, JCAP **1201** (2012) 037 [arXiv:1106.0040 [hep-th]].
A. Ashoorioon, D. Chialva and U. Danielsson, JCAP **1106** (2011) 034 [arXiv:1104.2338 [hep-th]].
- [19] P. D. Meerburg, J. P. van der Schaar and P. S. Corasaniti, JCAP **0905** (2009) 018 [arXiv:0901.4044 [hep-th]].
- [20] I. Agullo and L. Parker, Phys. Rev. D **83** (2011) 063526 [arXiv:1010.5766 [astro-ph.CO]].
- [21] X. Chen, JCAP **1012** (2010) 003 [arXiv:1008.2485 [hep-th]].
- [22] L. -M. Wang and M. Kamionkowski, Phys. Rev. D **61** (2000) 063504 [astro-ph/9907431].
X. Chen, R. Easther and E. A. Lim, JCAP **0706** (2007) 023 [astro-ph/0611645].
X. Chen, R. Easther and E. A. Lim, JCAP **0804** (2008) 010 [arXiv:0801.3295 [astro-ph]].
- [23] R. Flauger, L. McAllister, E. Pajer, A. Westphal and G. Xu, JCAP **1006** (2010) 009 [arXiv:0907.2916 [hep-th]].
R. Flauger and E. Pajer, JCAP **1101** (2011) 017 [arXiv:1002.0833 [hep-th]].
N. Barnaby, E. Pajer and M. Peloso, Phys. Rev. D **85** (2012) 023525 [arXiv:1110.3327 [astro-ph.CO]].

- [24] L. Ackerman, S. M. Carroll and M. B. Wise, Phys. Rev. D **75** (2007) 083502 [Erratum-
ibid. D **80** (2009) 069901]; astro-ph/0701357.
- [25] M. A. Watanabe, S. Kanno and J. Soda, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 191302;
arXiv:0902.2833 [hep-th]; Prog. Theor. Phys. **123**, 1041 (2010); arXiv:1003.0056
[astro-ph.CO].
- [26] S. Yokoyama and J. Soda, JCAP **0808** (2008) 005 [arXiv:0805.4265 [astro-ph]].
- [27] K. Dimopoulos, M. Karciauskas, D. H. Lyth and Y. Rodriguez, JCAP **0905** (2009) 013
[arXiv:0809.1055 [astro-ph]].
K. Dimopoulos, M. Karciauskas and J. M. Wagstaff, Phys. Lett. B **683** (2010) 298
[arXiv:0909.0475 [hep-ph]].
K. Dimopoulos, arXiv:1107.2779 [hep-ph].
- [28] J. Soda, arXiv:1201.6434 [hep-th].
- [29] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi and M. Peloso, Phys. Rev. D **79** (2009) 063517
[arXiv:0812.1231 [astro-ph]]. B. Himmetoglu, C. R. Contaldi and M. Peloso, Phys. Rev.
D **80** (2009) 123530 [arXiv:0909.3524 [astro-ph.CO]].
- [30] T. R. Dulaney and M. I. Gresham, Phys. Rev. D **81** (2010) 103532; arXiv:1001.2301
[astro-ph.CO].
A. E. Gumrukcuoglu, B. Himmetoglu and M. Peloso, Phys. Rev. D **81** (2010) 063528;
arXiv:1001.4088 [astro-ph.CO].
- [31] N. Bartolo, S. Matarrese, M. Peloso and A. Ricciardone, Phys. Rev. D **87** (2013) 023504
[arXiv:1210.3257 [astro-ph.CO]].
- [32] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5084 [astro-ph.CO].

- [33] S. R. Ramazanov and G. I. Rubtsov, JCAP **1205** (2012) 033 [arXiv:1202.4357 [astro-ph.CO]].
- [34] J. Kim, E. Komatsu, [arXiv:1310.1605 [astro-ph]].
- [35] S. R. Ramazanov and G. Rubtsov, arXiv:1311.3272 [astro-ph.CO].
- [36] N. Arkani-Hamed, H. -C. Cheng, M. A. Luty and S. Mukohyama, JHEP **0405** (2004) 074 [hep-th/0312099].
- [37] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. D **79** (2009) 064036 [arXiv:0811.2197 [hep-th]].
- [38] P. Creminelli, M. A. Luty, A. Nicolis and L. Senatore, JHEP **0612** (2006) 080; hep-th/0606090.
- [39] E. I. Buchbinder, J. Khoury and B. A. Ovrut, Phys. Rev. D **76** (2007) 123503; hep-th/0702154. P. Creminelli and L. Senatore, JCAP **0711** (2007) 010; hep-th/0702165.
- [40] M. Osipov and V. Rubakov, JCAP **1311** (2013) 031 [arXiv:1303.1221 [hep-th]].
- [41] V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, Adv. Phys. **19** (1970) 525.
- [42] J. K. Erickson, D. H. Wesley, P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **69** (2004) 063514; hep-th/0312009.
D. Garfinkle, W. C. Lim, F. Pretorius and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **78** (2008) 083537; arXiv:0808.0542 [hep-th].
- [43] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **64** (2001) 123522; hep-th/0103239.
J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **65** (2002) 086007; hep-th/0108187.
- [44] J. L. Lehners, Phys. Rept. **465** (2008) 223; arXiv:0806.1245 [astro-ph].

- [45] D. H. Lyth, Phys. Lett. B **524** (2002) 1; hep-ph/0106153.
R. Brandenberger and F. Finelli, JHEP **0111** (2001) 056; hep-th/0109004.
J. c. Hwang, Phys. Rev. D **65**, 063514 (2002), astro-ph/0109045.
A. J. Tolley, N. Turok and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **69** (2004) 106005 [hep-th/0306109].
- [46] J. -L. Lehners, P. McFadden, N. Turok and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **76** (2007) 103501 [hep-th/0702153 [HEP-TH]].
- [47] A. J. Tolley and D. H. Wesley, JCAP **0705** (2007) 006 [hep-th/0703101].
- [48] K. Koyama and D. Wands, JCAP **0704** (2007) 008 [hep-th/0703040 [HEP-TH]].
- [49] J. -L. Lehners and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **79** (2009) 063503 [arXiv:0812.3388 [hep-th]].
- [50] V. A. Rubakov, JCAP **0909** (2009), 030; arXiv:0906.3693 [hep-th].
- [51] M. Libanov and V. Rubakov, JCAP **1011** (2010), 045; arXiv:1007.4949 [hep-th].
- [52] M. Libanov, S. Mironov and V. Rubakov, arXiv:1012.5737 [hep-th]. M. Libanov, S. Mironov and V. Rubakov, Phys. Rev. D **84** (2011) 083502 [arXiv:1105.6230 [astro-ph.CO]].
- [53] M. Libanov, S. Ramazanov and V. Rubakov, JCAP **1106** (2011) 010 [arXiv:1102.1390 [hep-th]].
- [54] K. Hinterbichler and J. Khoury, arXiv:1106.1428 [hep-th].
- [55] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini, JCAP **1011**, 021 (2010); arXiv:1007.0027 [hep-th].
- [56] V. Rubakov and M. Osipov, arXiv:1007.3417 [hep-th].

- [57] K. Hinterbichler, A. Joyce and J. Khoury, JCAP **1206** (2012) 043 [arXiv:1202.6056 [hep-th]].
- [58] P. Creminelli, A. Joyce, J. Khoury and M. Simonovic, arXiv:1212.3329 [hep-th].
- [59] M. Tegmark, A. de Oliveira-Costa and A. Hamilton, Phys. Rev. D **68** (2003) 123523 [arXiv:astro-ph/0302496].
- [60] P. Bielewicz, H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski and P. B. Lilje, Astrophys. J. **635** (2005) 750 [arXiv:astro-ph/0507186].
- [61] C. J. Copi, D. Huterer, D. J. Schwarz and G. D. Starkman, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **367** (2006) 79 [arXiv:astro-ph/0508047].
- [62] K. Land and J. Magueijo, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 071301 [arXiv:astro-ph/0502237].
- [63] F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, H. K. Eriksen and P. B. Lilje, Astrophys. J. **704** (2009) 1448 [arXiv:0812.3795 [astro-ph]].
- [64] H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, and P. B. Lilje, Astrophys. J. **605**, 14 (2004), [arXiv:0307507 [astro-ph]].
- [65] C. L. Bennett, R. S. Hill, G. Hinshaw, D. Larson, K. M. Smith, J. Dunkley, B. Gold and M. Halpern *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **192**, 17 (2011) [arXiv:1001.4758 [astro-ph.CO]].
- [66] M. Cruz, L. Cayon, E. Martinez-Gonzalez, P. Vielva and J. Jin, Astrophys. J. **655** (2007) 11 [arXiv:astro-ph/0603859].
- [67] J. Kim and P. Naselsky, Astrophys. J. **714** (2010) L265 [arXiv:1001.4613 [astro-ph.CO]].
- [68] J. Kim and P. Naselsky, Phys. Rev. D **82** (2010) 063002 [arXiv:1002.0148 [astro-ph.CO]].
- [69] S. Mukohyama, JCAP **0906** (2009), 001; arXiv:0904.2190 [hep-th].
- [70] M. B. Voloshin and A. D. Dolgov, Sov. J. Nucl. Phys. **35** (1982) 120 [Yad. Fiz. **35** (1982) 213].

- [71] S. A. Mironov, S. R. Ramazanov and V. A. Rubakov, arXiv:1312.7808 [astro-ph.CO].
- [72] E. Akofof, A. P. Balachandran, S. G. Jo, A. Joseph and B. A. Qureshi, “Direction-Dependent CMB Power Spectrum and Statistical Anisotropy from Noncommutative Geometry,” JHEP **0805**, 092 (2008) [arXiv:0710.5897 [astro-ph]].
- [73] T. S. Koivisto and D. F. Mota, JHEP **1102** (2011) 061 [arXiv:1011.2126 [astro-ph.CO]].
- [74] C. Armendariz-Picon, JCAP **0603** (2006) 002 [arXiv:astro-ph/0509893].
- [75] D. Larson *et al.*, arXiv:1001.4635 [astro-ph.CO].
- [76] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 330; arXiv:0803.0547 [astro-ph].
- [77] N. E. Groeneboom and H. K. Eriksen, Astrophys. J. **690** (2009) 1807 [arXiv:0807.2242 [astro-ph]].
- [78] D. Hanson and A. Lewis, Phys. Rev. D **80** (2009) 063004 [arXiv:0908.0963 [astro-ph.CO]].
- [79] N. E. Groeneboom, L. Ackerman, I. K. Wehus and H. K. Eriksen, Astrophys. J. **722** (2010) 452 [arXiv:0911.0150 [astro-ph.CO]].
- [80] D. Hanson, A. Lewis and A. Challinor, Phys. Rev. D **81** (2010) 103003 [arXiv:1003.0198 [astro-ph.CO]].
- [81] N. Jarosik, C. L. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M. R. Greason, M. Halpern, R. S. Hill and G. Hinshaw *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **192**, 14 (2011) [arXiv:1001.4744 [astro-ph.CO]].
- [82] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>
- [83] K. M. Gorski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke and M. Bartelman, Astrophys. J. **622**, 759 (2005) [arXiv:0409513 [astro-ph]].

- [84] S. P. Oh, D. N. Spergel, and G. Hinshaw, *Astrophys. J.* **510**, 551 (1999), [arXiv:9805339 [astro-ph]].
- [85] K. M. Smith, O. Zahn, and O. Dore, *Phys. Rev. D* **76**, 043510 (2007), [arXiv:0705.3980 [astro-ph]].
- [86] <http://www.gnu.org/software/gsl/>
- [87] <http://www.netlib.org/slatec/>
- [88] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538** (2000) 473 [arXiv:astro-ph/9911177].
- [89] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>
- [90] K. M. Gorski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke and M. Bartelman, *Astrophys. J.* **622**, 759 (2005) [arXiv:0409513 [astro-ph]].
- [91] S. P. Oh, D. N. Spergel, and G. Hinshaw, *Astrophys. J.* **510**, 551 (1999), [arXiv:9805339 [astro-ph]].
- [92] K. M. Smith, O. Zahn, and O. Dore, *Phys. Rev. D* **76**, 043510 (2007), [arXiv:0705.3980 [astro-ph]].
- [93] <http://www.gnu.org/software/gsl/>
- [94] <http://www.netlib.org/slatec/>
- [95] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538** (2000) 473 [arXiv:astro-ph/9911177].
- [96] T. Fujita and S. Yokoyama, *JCAP* **1309** (2013) 009 [arXiv:1306.2992 [astro-ph.CO]].
- [97] M. Maris, C. Burigana, A. Gruppuso, F. Finelli and J. M. Diego, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **415** (2011) 2546 [arXiv:1010.0830 [astro-ph.CO]].

- [98] P. D. Naselsky, A. G. Doroshkevich and O. V. Verkhodanov, *Astrophys. J.* **599** (2003) L53 [astro-ph/0310542].
- [99] P. D. Naselsky, A. G. Doroshkevich and O. V. Verkhodanov, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **349** (2004) 695 [astro-ph/0310601].
- [100] F. K. Hansen, P. Cabella, D. Marinucci and N. Vittorio, *Astrophys. J.* **607** (2004) L67 [astro-ph/0402396].
- [101] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 377 [astro-ph/0603449].
- [102] M. Hansen, J. Kim, A. M. Frejsel, S. Ramazanov, P. Naselsky, W. Zhao and C. Burigana, arXiv:1206.6981 [astro-ph.CO].
- [103] P. D. Naselsky, P. R. Christensen, P. Coles, O. Verkhodanov, D. Novikov and J. Kim, *Astrophys. Bull.* **65** (2010) 101 [arXiv:0712.1118 [astro-ph]].
- [104] M. Hansen, A. M. Frejsel, J. Kim, P. Naselsky and F. Nesti, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 103508 [arXiv:1103.6135 [astro-ph.CO]].
- [105] F. K. Hansen, A. J. Banday and K. M. Gorski, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354** (2004) 641 [astro-ph/0404206].
- [106] C. Gordon, *Astrophys. J.* **656** (2007) 636 [astro-ph/0607423].
- [107] J. Hoftuft, H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen and P. B. Lilje, *Astrophys. J.* **699** (2009) 985 [arXiv:0903.1229 [astro-ph.CO]].
- [108] H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen and P. B. Lilje, *Astrophys. J.* **660** (2007) L81 [astro-ph/0701089].
- [109] F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, H. K. Eriksen and P. B. Lilje, *Astrophys. J.* **704** (2009) 1448 [arXiv:0812.3795 [astro-ph]].

- [110] C. L. Bennett, R. S. Hill, G. Hinshaw, D. Larson, K. M. Smith, J. Dunkley, B. Gold and M. Halpern *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 17 [arXiv:1001.4758 [astro-ph.CO]].
- [111] L. -Y. Chiang, P. D. Naselsky and P. Coles, *Mod. Phys. Lett. A* **23** (2008) 1489 [arXiv:0711.1860 [astro-ph]].
- [112] C. -G. Park, C. Park and J. R. Gott, III, *Astrophys. J.* **660** (2007) 959 [astro-ph/0608129].
- [113] A. de Oliveira-Costa and M. Tegmark, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 023005 [astro-ph/0603369].
- [114] K. Land and J. Magueijo, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **357** (2005) 994 [astro-ph/0405519].
- [115] K. Land and J. Magueijo, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 101302 [astro-ph/0507289].
- [116] D. J. Schwarz, G. D. Starkman, D. Huterer and C. J. Copi, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 221301 [astro-ph/0403353].
- [117] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer and E. L. Wright, *Astrophys. J.* **473** (1996) 576 [astro-ph/9605054].
- [118] C. L. Bennett, A. Banday, K. M. Gorski, G. Hinshaw, P. Jackson, P. Keegstra, A. Kogut and G. F. Smoot *et al.*, *Astrophys. J.* **464** (1996) L1 [astro-ph/9601067].
- [119] J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **512** (1999) 511 [astro-ph/9810373].
- [120] D. Babich, C. H. Blake and C. Steinhardt, arXiv:0705.0986 [astro-ph].
- [121] C. J. Copi, D. Huterer and G. D. Starkman, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 043515 [astro-ph/0310511].