

На правах рукописи

Молокоедов
Виктор Сергеевич

Эффекты высших поправок теории возмущений
в КХД и их теоретические
и феноменологические следствия

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН)

Научный руководитель

Катаев Андрей Львович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН), отдел теоретической физики, ведущий научный сотрудник.

Официальные оппоненты

Брагута Виктор Валерьевич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», начальник лаборатории информационно-измерительных систем визуализации характеристик светодиодов.

Котиков Анатолий Васильевич, доктор физико-математических наук, Объединённый институт ядерных исследований (ОИЯИ, г. Дубна), лаборатория теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова, научный отдел физики фундаментальных взаимодействий, сектор №1, ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт физики высоких энергий имени А.А. Логанова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» (НИЦ «Курчатовский институт» — ИФВЭ)

Защита состоится _____ в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.119.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерных исследований Российской академии наук по адресу: 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН и на сайте <http://inr.ru/rus/referat/molokoed/dis.pdf>

Автореферат разослан _____

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.119.01
кандидат физико-математических наук

С.В. Демидов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При проведении прецизионных измерений на ускорителях частиц и при поиске проявлений физических процессов, лежащих вне рамок Стандартной модели, крайне актуальными оказываются теоретические исследования, в основе которых лежат вычисления пертурбативных вкладов в физические величины в высших порядках теории возмущений (ТВ) [1, 2]. Общепринятой теорией для описания процессов сильного взаимодействия в настоящее время является квантовая хромодинамика (КХД), базирующаяся на представлении о кварках и глюонах, как о составных частях адронов [3, 4]. Ключевым моментом при создании КХД как неабелевой теории поля [5] с калибровочной группой $SU(3)$ явилось введение дополнительного квантового числа — цвета [6, 7], которым обладают как кварки, так и глюоны. Требование инвариантности лагранжиана относительно локальных калибровочных преобразований цветовой группы $SU(3)$ привело к построению нелинейной теории сильных взаимодействий с самодействием глюонов. Данное обстоятельство коренным образом отличает абелеву квантовую электродинамику (КЭД) от КХД. Наличие нелинейных по полям слагаемых в лагранжиане КХД приводит к характерным особенностям сильных взаимодействий, например, к асимптотической свободе [8, 9], согласно которой с уменьшением расстояния эффективная константа связи КХД логарифмически убывает. Это влечёт за собой вывод о том, что на малых расстояниях кварки становятся практически свободными, что способствует хорошему описанию процессов в ультрафиолетовой области энергий при помощи ТВ.

Диссертация посвящена изучению эффектов КХД и КЭД, проявляющихся в физических величинах в области энергий,

где оказываются справедливыми расчёты, выполненные в рамках ТВ. С начала 60-70-х годов предсказания КХД успешно прошли целую серию проверок при сравнении с результатами экспериментов по глубоконеупругому рассеянию электронов на протонах и ядрах (SLAC), в процессе электрон-позитронной аннигиляции в адроны (SLAC, DESY, ИЯФ, CERN, KEK, BEPC), в протон-протонных (Протвино, CERN, BNL) и протон-антипротонных (Fermilab) столкновениях на встречных пучках и проч. Исследования этих процессов ведутся и поныне с целью улучшения точности полученных ранее экспериментальных данных. Более того, в будущем возможно строительство международного линейного e^+e^- коллайдера высоких энергий, приоритетной задачей которого будет поиск возможного проявления эффектов новой физики вне рамок Стандартной модели.

Применение процедуры перенормировки делает поправки высших порядков ТВ к физическим величинам зависимыми от выбора схем вычитаний ультрафиолетовых расходимостей [1, 2]. Данные эффекты играют важную роль при сравнении теоретических пертурбативных предсказаний с результатами прецизионных экспериментальных данных. В связи с этим в настоящей работе, в частности, изучается схемная и калибровочная зависимость R -отношения процесса однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны. Проводится изучение зависимости коэффициентной функции правила сумм Бьёркена глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах (см. [10] и обзор [11]) от выбора схем перенормировки (в том числе и в случае калибровочно-неинвариантных схем). Это может позволить осуществить детализованное сравнение теоретических результатов с недавними экспериментальными данными коллаборации COMPASS (CERN) по исследованию спиновой структуры нуклонов (ядер).

Затронутые в диссертации вопросы, посвящённые анализу асимптотического поведения соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков [12–14], могут представлять определённый интерес в связи с извлечением этих масс c и b -кварков с большой точностью, например, из данных по измерению масс связанных состояний $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$ -систем (см. например [15, 16]), и в связи с результатами определения полюсных и бегущих масс t -кварка из данных коллабораций CMS и ATLAS Большого Адронного Коллайдера.

Основные цели диссертационной работы

Настоящая работа посвящена изучению схемной (в КХД и КЭД) и калибровочной (в КХД) зависимости характеристик процессов рождения адронов в электрон–позитронной аннигиляции и глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованной нуклонной мишени, а также обобщённого соотношения Крютера [17–22], устанавливающего фундаментальную связь между соответствующими ренорминвариантными величинами, характеризующими описанные процессы. В качестве основных схем, отличных от MS-подобных схем минимальных вычитаний, рассмотрены калибровочно-инвариантная V-схема, определяемая высшими поправками к статическому кулоновскому потенциалу КХД (КЭД), и тесно связанная с ней (как следует из результатов диссертации) калибровочно-неинвариантная минимальная схема импульсных вычитаний mMOM (сокращение от miniMOM), ранее используемая в литературе, в частности, в расчётах, выполненных на решётке. Исследуется асимптотическое поведение рядов теории возмущений для отношения полюсной и бегущей массы тяжёлых кварков в КХД. Для достижения целей в диссертации были выделены следующие задачи:

1. Получить аналитические выражения для коэффициентов рядов ТВ функции Адлера и R -отношения однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны, а также функции Бьёркена правила сумм глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в $SU(N_c)$ КХД в V и m МОМ-схеме в четырёхпетлевом приближении. Совершив предельный переход к калибровочной группе $U(1)$, исследовать структуру рядов ТВ для вышеупомянутых функций и выявить связь и различие между КЭД β -функцией в V -схеме и в схеме импульсных вычитаний.
2. Исследовать схемную зависимость обобщённого соотношения Крютера. В классе схем импульсных вычитаний (включающих m МОМ-схему) в КХД определить, существуют ли выделенные значения калибровочного параметра ξ , при которых будет сохраняться факторизация β -функции в члене, нарушающем конформную симметрию безмассовой КХД и входящем в рассматриваемое соотношение.
3. Определить численные значения двух неизвестных в аналитическом виде коэффициентов, входящих в разложение поправки четвёртого порядка к соотношению между полюсными и бегущими в \overline{MS} -схеме массами тяжёлых кварков по степеням числа ароматов безмассовых кварков n_f . Проанализировать структуру и поведение рядов теории возмущений для этого соотношения вплоть до 6-го порядка.

Положения, выносимые на защиту

1. Получены аналитические выражения для вышеупомянутых функций Адлера, Бьёркена и R -отношения в калибровочно-инвариантной V -схеме и в неинвариантной m МОМ-схеме в четырёхпетлевом приближении в $SU(N_c)$ КХД. Показано уменьшение схемной и калибровочной зависимости рядов

ТВ исследуемых физических величин при переходе от 2-го к 4-му порядку теории возмущений. Предельный переход к случаю КЭД позволяет выявить, что β -функция в V-схеме совпадает с Ψ -функцией Гелл-Манна–Лоу на трёхпетлевом уровне, и начинает от неё отличаться с 4-го порядка на поправку, связанную с проявлением эффектов рассеяния света на свете в трёхпетлевом вкладе к кулоновскому потенциалу.

2. Показано, что в КЭД помимо \overline{MS} -схемы обобщённое соотношение Крютера выполняется на четырёхпетлевом уровне также и в схеме импульсных вычитаний MOM, и в схеме вычитаний на массовой поверхности. Установлена справедливость данного соотношения в V-схеме в КХД в том же приближении по ТВ. Выявлена факторизация КХД β -функции в члене, нарушающем конформную симметрию и входящем в рассматриваемое соотношение, в классе схем импульсных вычитаний в третьем порядке теории возмущений при $\xi = 0, -3$ и при $\xi = 0$ в четвёртом. Демонстрируется, что, если данное обобщённое соотношение будет справедливым в \overline{MS} -схеме во всех порядках ТВ, то оно также будет верным во всех порядках и в MOM-подобных схемах в КХД в калибровке Ландау. Делается вывод, что калибровочная инвариантность схем перенормировок является достаточным, но не является необходимым условием для факторизации β -функции в обобщённом соотношении Крютера в КХД.
3. При помощи метода наименьших квадратов определены численные значения двух неизвестных в аналитическом виде четырёхпетлевых коэффициентов в соотношении между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков. Продемонстрирована устойчивость найденных значений по отношению к изменению числа уравнений и неизвестных в рассматриваемой переопределённой системе, к которой приме-

няется метод наименьших квадратов. Исследовано поведение рядов ТВ для данного соотношения в высших порядках и показано, что в случае с b -кварком его асимптотический характер проявляется, начиная с 4-го порядка ТВ, а для t -кварка не проявляется даже на шестипетлевом уровне.

Научная новизна

1. Демонстрируется, что в КЭД β -функция в V-схеме начинает отличаться от Ψ -функции Гелл-Манна-Лоу в схеме импульсных вычитаний лишь с 4-го порядка ТВ на поправку, связанную с проявлением эффектов рассеяния света на свете в трёхпетлевом вкладе к кулоновскому потенциалу.
2. Впервые рассмотрено обобщённое соотношение Крютера в калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок в КХД и доказана его справедливость в калибровке Ландау в классе схем импульсных вычитаний на четырёхпетлевом уровне. Показано, что, если данное соотношение будет выполняться в \overline{MS} -схеме во всех порядках ТВ, то калибровочная инвариантность схем перенормировок будет являться достаточным, но не необходимым условием наличия факторизации $\beta(a_s)$ -функции в конформно-нарушающем члене этого соотношения также во всех порядках.
3. Отмечено, что асимптотическая структура в соотношении между полюсной и бегущей массой проявляется для b -кварка, начиная с четырёхпетлевого уровня, а для t -кварка не наблюдается даже в 6-ом порядке ТВ. Делается вывод, что в современных прецизионных исследованиях целесообразнее использовать понятие не полюсной массы b -кварка, а бегущей. При этом для t -кварка применимы оба эти понятия при параметризации его массы вплоть до 6-го (и по всей видимости до 8-го) порядка теории возмущений.

Практическая значимость

Тематика, связанная с изучением e^+e^- аннигиляции в адроны, продолжает привлекать интерес в связи с возможностью извлечения дополнительной информации о полном сечении этого процесса и исследования свойств возникающих резонансов из экспериментальных данных ускорителей в Новосибирске (Россия), Китае и В-фабрики в Японии. Изучаемая в диссертации схемная и калибровочная зависимость R -отношения может быть полезной для детализации оценки теоретических неопределённостей при сравнении с данными имеющихся и возможных будущих экспериментов по измерению полного сечения этого процесса, которые могут быть получены при изучении столкновений электрон–позитронных пучков на планируемой для создания супер чарм-тау фабрике в Новосибирске.

Представленные в данной работе результаты для соотношения между полюсной и бегущей массой тяжёлого t -кварка могут вызывать определённый интерес как теоретиков, так и экспериментаторов, извлекающих значения этих масс, например, из экспериментальных данных по исследованию процессов с участием топ-кварка в протон–протонных соударениях (CMS и ATLAS, CERN).

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы ренормгруппового анализа и теории перенормировок. Рассматриваются различные теоретические процедуры оценок многопетлевых вкладов к физическим величинам. Применяется метод наименьших квадратов, используемый для решения переопределённых систем алгебраических уравнений.

Степень достоверности полученных результатов

Частные случаи ряда полученных результатов согласуются с ранее представленными в литературе. Достоверность результатов, определённых при помощи метода наименьших квадратов, подтверждается их устойчивостью по отношению к изменению числа уравнений в рассматриваемой переопределённой системе и к вариации числа входящих в неё неизвестных. Приведённые оценки для пятипетлевой поправки к соотношению между полюсной и бегущей массой b -кварка согласуются (с фактором порядка 2) с независимыми оценками, имеющимися в научной литературе.

Основные публикации по теме диссертации

По материалам диссертации опубликовано 5 работ [23–27] в рецензируемых международных изданиях, рекомендуемых ВАК.

Апробация результатов

Результаты работы были доложены на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

1. 62-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 18-23 ноября 2019
2. Международный семинар “Calculations for Modern and Future Colliders (CALC-2018)”, ОИЯИ, Дубна, 22 июля - 1 августа 2018
3. 20-й международный семинар по физике высоких энергий “Кварки-2018”, 27 мая – 2 июня 2018 года, Валдай, РФ

4. XXV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2018”, Москва, 9-13 апреля 2018, МГУ
5. 60-я международная научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 20-26 ноября 2017
6. XXIV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2017”, Москва, 10-14 апреля 2017, МГУ
7. Молодёжная конференция по физике высоких энергий, квантовой теории поля, математической физике и космологии; 18-19 апреля 2016, МФТИ (ГУ), Долгопрудный
8. Молодёжная межинститутская конференция “Физика элементарных частиц и космология”, 12-13 ноября 2014, Москва, ИЯИ РАН

Доклад по теме диссертации был представлен на научном семинаре отдела теоретической физики ИЯИ РАН (Москва).

Личный вклад

Все результаты, изложенные в работе и выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Объем работы составляет 135 страниц, включая 8 рисунков и 7 таблиц. Список литературы насчитывает 228 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность темы диссертации и формулируется предмет её исследования.

Первая глава посвящена изучению схемной (в КХД и КЭД) и калибровочной (в КХД) зависимости рядов ТВ ренорминвариантных величин, таких как функция Адлера $D(a_s)$ и $R(a_s)$ -отношение электрон–позитронной аннигиляции в адроны, а также коэффициентная функция $C_{Bjp}(a_s)$ правила сумм Бёркена глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах. Исследуется статус утверждения об уменьшении рассматриваемых зависимостей при учёте высших поправок ТВ к данным физическим величинам.

В **разделе 1.1** освещаются известные на текущий момент четырёхпетлевые результаты аналитических вычислений коэффициентов определяемой в евклидовой области энергий $Q^2 > 0$ функции Адлера, характеризующей процесс рождения адронов в e^+e^- аннигиляции, в *калибровочно-инвариантной* $\overline{\text{MS}}$ -схеме вычитаний

$$D(a_s) = d_R \left(\sum_f Q_f^2 D^{NS}(a_s) + \left(\sum_f Q_f \right)^2 D^{SI}(a_s) \right), \quad (1)$$

где d_R — размерность фундаментального представления алгебры Ли группы $SU(N_c)$, Q_f — электрический заряд кварка f -го аромата, $a_s = \alpha_s/\pi$. Несинглетный по аромату вклад

$$D^{NS}(a_s(Q^2)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{NS} a_s^k(Q^2) \quad (2)$$

был вычислен в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в двух, трёх и четырёхпетлевом приближении соответственно в работах [28–30], [31, 32], [22, 33]. Поправки синглетного типа появляются, начиная с трёхпетлевого уровня.

В разделе 1.2 рассматривается $R(s)$ -отношение однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны, связанное с полным сечением данного процесса в области времениподобной переменной $s > 0$. Обсуждается дисперсионное соотношение между евклидовой функцией $D(Q^2)$ и величиной $R(s)$, позволяющее в явном виде получать пропорциональные степеням π^2 члены аналитического продолжения из пространственноподобной области энергий во времениподобную. Данные эффекты не являются пренебрежимо малыми по сравнению с соответствующими коэффициентами функции Адлера [34], [35], [22]. Важность учёта подобных π^2 членов ранее была подчёркнута в [36, 37].

Раздел 1.3 посвящён обзору результатов аналитических четырёхпетлевых вычислений коэффициентной функции $C_{Bjp}(a_s)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, входящей в правило сумм Бьёркена процесса глубокоэластичного рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах

$$\int_0^1 \left(g_1^{lp}(x, Q^2) - g_1^{ln}(x, Q^2) \right) dx = \frac{1}{6} \left| \frac{g_A}{g_V} \right| C_{Bjp}(a_s(Q^2)), \quad (3)$$

где интеграл от разности структурных функций $g_1(x, Q^2)$ для протона и нейтрона берётся по всевозможным значениям бьёркеновской переменной x . Индекс l в (3) соответствует конкретному заряженному лептону (e или μ), g_A/g_V — отношение аксиального и векторного зарядов β -распада нейтрона. Функция Бьёркена содержит несинглетные (NS) и синглетные (SI) по ароматам вклады

$$C_{Bjp}(a_s(Q^2)) = C_{Bjp}^{NS}(a_s(Q^2)) + d_R \sum_f Q_f C_{Bjp}^{SI}(a_s(Q^2)). \quad (4)$$

Поправки к функции $C_{Bjp}^{NS}(a_s)$ известны в настоящее время вплоть до 4-го порядка ТВ благодаря вычислениям в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, проведённым в работах [38], [39], [22].

В разделе 1.4 обсуждается статический кулоновский потенциал взаимодействия тяжёлого кварка и антикварка, находящихся в синглетном по цвету состоянии в КХД. Его высшие радиационные поправки были получены в аналитическом виде в $\overline{\text{MS}}$ -схеме из рассмотрения калибровочно-инвариантной вильсоновской петли с контуром интегрирования в виде прямоугольника со сторонами $T \gg r$ (где T — время взаимодействия, r — расстояние, на которое удалены друг от друга статические цветовые источники) в работах [40], [41], [42].

В случае КЭД показано, что потенциал в трёхпетлевом приближении в $\overline{\text{MS}}$ -схеме может быть представлен в виде:

$$V_{QED}(\vec{q}^2) = -\frac{4\pi}{\vec{q}^2} \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \Pi_{QED}(\vec{q}^2/\mu^2, \alpha)} \left[1 + N \cdot \mathcal{C} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots \right], \quad (5)$$

где $\alpha/(1 + \Pi_{QED})$ — инвариантный заряд, N — количество заряженных лептонов, \mathcal{C} — поправка, связанная с появлением диаграмм рассеяния света на свете в кулоновском потенциале, которая в рассматриваемом порядке точности не возникает при вычислении собственно-энергетической функции фотона Π_{QED} :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & \frac{5}{96}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{23}{24} - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln^2 2}{2} \right) \\ & + \pi^2 \left(\frac{79}{36} - \frac{61}{12}\zeta_3 + \ln 2 + \frac{21}{2}\zeta_3 \ln 2 \right) \approx -0.888062. \end{aligned} \quad (6)$$

В разделе 1.5 рассмотрена эффективная калибровочно-инвариантная V-схема, в которой все высшие поправки ТВ к статическому кулоновскому потенциалу КХД включены в эффективную константу связи $\alpha_{s,V}$:

$$V(\vec{q}^2) = -4\pi C_F \frac{\alpha_{s,V}(\vec{q}^2)}{\vec{q}^2}. \quad (7)$$

Отметим, что V-схема, к примеру, использовалась в [23, 41, 43, 44] при рассмотрении ряда феноменологических задач.

В разделе 1.5.1 применён развитый в [45, 46] метод эффективных зарядов (ECH) для нахождения аналитического четырёхпетлевого выражения β -функции в $SU(N_c)$ КХД в V-схеме.

В разделах 1.5.2 и 1.5.3 исходя из ренорминвариантности величин $D(Q^2)$, $R(s)$ и $C_{Bjp}(Q^2)$ получены четырёхпетлевые аналитические выражения для коэффициентов этих функций в V-схеме.

В разделе 1.6 исследуется калибровочно–неинвариантная минимальная схема импульсных вычитаний mMOM [47] (см. также [23, 48, 49]). Основное требование, отличающее её от других схем импульсных вычитаний, состоит в том, что константа перенормировки глюон–дух–антидуховой вершины Z_{cg}^{mMOM} в этой схеме полагается равной $Z_{cg}^{\overline{\text{MS}}}$, рассчитанной в $\overline{\text{MS}}$ -схеме. Приведены соотношения между константами связи $a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2)$ и $a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2)$, а также калибровочными параметрами $\xi^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2)$ и $\xi^{\text{mMOM}}(\mu^2)$ (см. также [25, 47, 49, 50]).

В разделах 1.6.1 и 1.6.2 получены коэффициенты рядов ТВ для исследуемых в этой главе функций в mMOM-схеме с калибровочным параметром ξ^{mMOM} в четырёхпетлевом приближении.

Раздел 1.7 посвящён сравнению поведения рядов ТВ изучаемых физических величин в описанных выше схемах.

В разделах 1.7.1, 1.7.2 и 1.7.3 рассматривается поведение пертурбативных рядов для функции Адлера, R -отношения и функции Бьёркена в калибровочно–инвариантных $\overline{\text{MS}}$ и V-схемах и в неинвариантной mMOM-схеме при $\xi = 0, -1, -3$ (эти значения будут важны при рассмотрении обобщённого соотношения Крютера во второй главе диссертации) вплоть до 4-го порядка ТВ в реалистичном случае цветовой группы $SU(3)$ для физически интересных значений $n_f = 4, 5$.

В разделе 1.7.4 исследуется схемная и калибровочная зависимости R -отношения однофотонной e^+e^- аннигиляции в адро-

ны при $n_f = 5$ в двух, трёх и четырёхпетлевом приближениях в области энергий выше порога рождения боттомония до начала проявления левого плеча широкого пика Z^0 -бозона. В N^3LO порядке ТВ берётся $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1181$ при $M_Z \approx 91.188$ ГэВ. Для изучения эффекта бега константы связи в V-схеме используется техника эффективных зарядов. В случае mMOM-схемы для этой цели необходимо решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial \ln \mu^2} = \beta^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}), \\ \frac{\partial \ln \xi^{\text{mMOM}}}{\partial \ln \mu^2} = \gamma_\xi^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}), \end{cases} \quad (8)$$

с четырёхпетлевой β^{mMOM} -функцией и аномальной размерностью γ_ξ^{mMOM} [49, 50]. Её решение с фиксированными начальными данными $\alpha_s^{\text{mMOM}}(M_Z^2)$ и $\xi^{\text{mMOM}}(M_Z^2)$ для трёх значений калибровки было получено при помощи программы, написанной в системе компьютерной алгебры *Mathematica*, и позволило определить зависимость R -отношения от полной энергии налетающих частиц в mMOM-схеме.

Поведение функции $R(s)$ в рассматриваемых трёх схемах представлено на Рис. 1. При переходе от двухпетлевого уровня ТВ к четырёхпетлевому все кривые на Рис. 1 сближаются друг к другу, что свидетельствует о сходимости ряда ТВ для R -отношения по крайней мере в рассматриваемом четырёхпетлевом приближении и об уменьшении схемной и калибровочной зависимости с ростом порядка теории возмущений.

В **разделе 1.8** осуществлён переход от $SU(N_c)$ КХД к КЭД с калибровочной группой $U(1)$. Показано, что на трёхпетлевом уровне β_{QED} в V-схеме совпадает с Ψ -функцией в схеме импульсных вычитаний (функцией Гелл-Манна–Лоу), определяющей бег инвариантного заряда в КЭД. Различие между ними начинает проявляться лишь в N^3LO порядке ТВ на поправку,

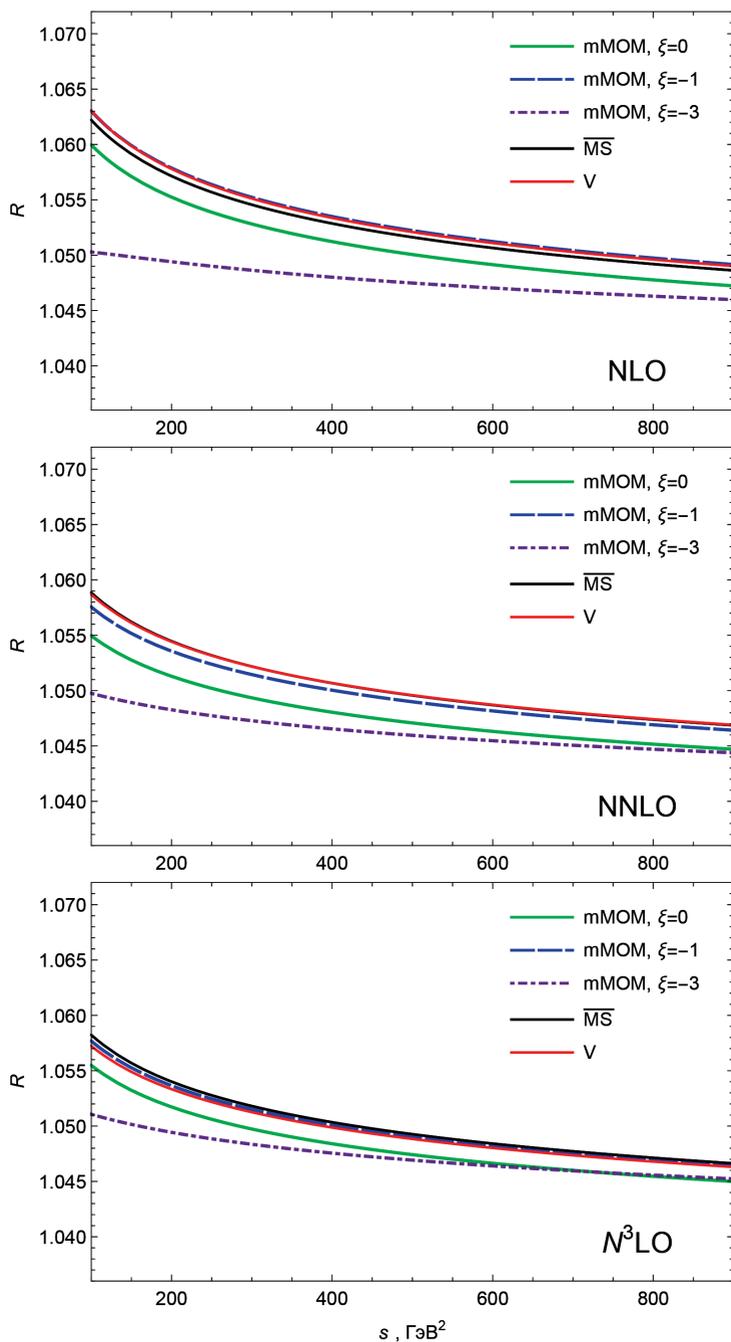


Рис. 1: Поведение $R(s)$ (фактор $3 \sum_f Q_f^2$ опущен) в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схеме в NLO, NNLO и N^3 LO приближении.

связанную с эффектами рассеяния света на свете в статическом потенциале

$$\beta_{3, QED}^V = \Psi_3 + \frac{2}{3} \mathcal{C} N^2, \quad (9)$$

где N — число заряженных лептонов, а константа \mathcal{C} была определена в выражении (6).

Полученный результат может быть представлен в следующем компактном виде:

$$a_V = a_{\text{МОМ}} + \mathcal{C} N a_{\text{МОМ}}^4 + \mathcal{O}(a_{\text{МОМ}}^5). \quad (10)$$

Это соотношение позволяет заключить, что V -схему в КЭД можно рассматривать как аналог схемы импульсных вычитаний МОМ.

Полученные в первой главе диссертации результаты были использованы во второй главе при исследовании обобщённого соотношения Крютера в различных схемах перенормировок.

Основные результаты и выводы по первой главе:

- Получены аналитические выражения для функций Адлера, Бьёркена и R -отношения в калибровочно-инвариантной V -схеме и в $m\text{МОМ}$ -схеме с калибровочным параметром ξ в четырёхпетлевом приближении в $SU(N_c)$ КХД.
- Показано уменьшение схемной и калибровочной зависимости пертурбативных рядов исследуемых физических величин при переходе от второго к четвёртому порядку теории возмущений.
- Предельный переход к случаю КЭД позволяет выявить, что β -функция в V -схеме совпадает с Ψ -функцией Гелл-Манна-Лоу на трёхпетлевом уровне, и начинает от неё отличаться с 4-го порядка теории возмущений на поправку, связанную с проявлением эффектов рассеяния света на свете в трёхпетлевом вкладе к статическому кулоновскому потенциалу.

Вторая глава посвящена рассмотрению соотношения Крютера [17, 18] и его обобщения на случай учёта высших радиационных поправок в КЭД [51] и КХД [19] (см. также [20, 22]). Данное соотношение связывает между собой характеристики процессов e^+e^- аннигиляции в адроны и глубоконеупругого лептон–нуклонного рассеяния. Исследуется его схемная и калибровочная зависимости.

В начале **раздела 2.1** обсуждается связь трёхточечной функции Грина аксиал–вектор–векторных фермионных токов с соотношением Крютера [17] безмассовой КХД (КЭД)

$$D_{Born}^{NS} C_{Bjp, Born}^{NS} = 1, \quad (11)$$

справедливым в конформно–инвариантном пределе [18, 51]. Левая часть соотношения (11) содержит произведение борновских вкладов в функцию Адлера и Бьёркена, а правая часть связана с амплитудой распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, изучение которого свидетельствовало в пользу того, что кварки обладают $N_c = 3$ цветовыми степенями свободы.

Затем рассматривается обобщение соотношения (11) в случае, когда учитываются высшие радиационные поправки к функциям $D^{NS}(a_s)$ и $C_{Bjp}^{NS}(a_s)$, вычисленные в *калибровочно–инвариантной* $\overline{\text{MS}}$ -схеме. Оно может быть записано в следующей форме:

$$D^{NS}(a_s) C_{Bjp}^{NS}(a_s) = 1 + \Delta_{csb}(a_s) = 1 + \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right) K(a_s), \quad (12)$$

где $K(a_s)$ — полином по степеням a_s . Впервые данное соотношение было обнаружено в [19] в третьем порядке ТВ (по числу поправок, входящих в функцию Адлера и Бьёркена). В четырёхпетловом приближении справедливость (12) была подтверждена явными вычислениями в [22]. Вклад $\Delta_{csb}(a_s)$, входящий в (12) и пропорциональный РГ β -функции, отражает эффект нарушения конформной симметрии безмассовой КХД (КЭД)

процедурой перенормировок [19, 21]. Теоретические аргументы в пользу справедливости (12) во всех порядках ТВ в \overline{MS} -схеме существуют и приведены в работах [20, 52, 53].

В разделе 2.2 исследуется схемная зависимость соотношения (12) в КЭД. Демонстрируется, что факторизация трёхпетлевой β -функции в рассматриваемом соотношении возможна не только в MS -подобных, но также и в других калибровочно-инвариантных схемах, таких как V , MOM и схема вычитаний на массовой поверхности [25].

Раздел 2.3 посвящён изучению схемной и калибровочной зависимости обобщённого соотношения Крютера (ОСК) в КХД.

В разделе 2.3.1 показано наличие факторизации трёхпетлевой β -функции в калибровочно-инвариантной V -схеме в ОСК.

В разделе 2.3.2 исследуются возможные условия, при которых ОСК будет справедливым (по крайней мере на четырёхпетлевом уровне) в калибровочно-неинвариантной mMOM-схеме. Демонстрируется, что во втором порядке ТВ соотношение (12) будет выполняться при любых значениях параметра ξ . В трёхпетлевом приближении факторизация β -функции в члене, нарушающем конформную симметрию и входящем в ОСК, возможна лишь при $\xi = -3, -1, 0$ [25].

Калибровка Ландау $\xi = 0$ часто используется в анализе решёточных и многопетлевых вычислений [23, 47, 49, 50, 54, 55]. Её особенность состоит в том, что в ней перенормированный пропагатор глюона (фотона) всегда поперечен. Калибровка $\xi = -1$ (а точнее класс MOM-схем с $|\xi| \leq 1$) изучался в работе [56]. Калибровка $\xi = -3$ впервые возникла в [57, 58] при изучении двухточечного коррелятора фермионных полей, построенного при помощи контурного интеграла вдоль вильсоновской линии. Позднее её выделенность была независимо обнаружена в [59], где, в частности, было показано, что в этой калибровке однопетлевая поправка к константе перенормировки глюонного по-

ля пропорциональна первому коэффициенту КХД β -функции.

Таким образом, наряду с наиболее часто используемыми калибровками Ландау $\xi = 0$, Фейнмана $\xi = 1$ и Йенни $\xi = 3$, выделенными являются также и их противоположные значения $\xi = -1$ и $\xi = -3$, т.е. наблюдается своеобразная симметрия калибровочных значений относительно $\xi = 0$ (см. Рис. 2).

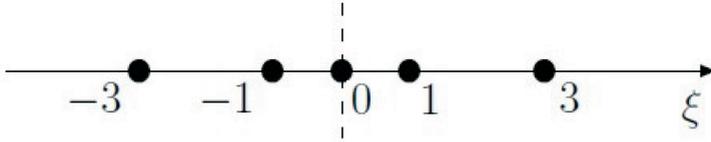


Рис. 2: Значения выделенных в КТП калибровок, симметричные относительно $\xi = 0$.

Показано, что на четырёхпетлевом уровне факторизация β^{mMOM} -функции в ОСК остаётся справедливой только в калибровке Ландау. В случае калибровок $\xi = -1, -3$ наблюдается её *частичная* факторизация (см. описание Приложения В).

В разделе 2.3.3 даётся ответ на вопрос — во всех ли схемах импульсных вычитаний в КХД калибровки $\xi = 0, -1, -3$ являются выделенными с точки зрения наличия факторизации двухпетлевой (а в случае $\xi = 0$ и трёхпетлевой) β -функции в соотношении (12).

Доказывается, что в третьем порядке ТВ ОСК будет справедливым в классе MOM-подобных схем в КХД, если разность двухпетлевых коэффициентов $(\beta_1^{\text{MOM}} - \beta_1^{\overline{\text{MS}}})$ будет делиться нацело на β_0 . Показано, что данное требование всегда выполняется при $\xi = 0$ и $\xi = -3$. Калибровка $\xi = -1$ в этом смысле представляется особенностью mMOM-схемы и не является выделенной во всём классе схем импульсных вычитаний (что демонстрируется отсутствием исследуемой факторизации [25] в случае схемы MOMgggg [60], которая определяется из условий перенормировки четырёхглюонной вершины КХД посредством вычитаний УФ расходимостей в симметричной точке).

Далее демонстрируется, что в калибровке Ландау ОСК в КХД будет справедливым также и в четырёхпетлевом приближении в классе МОМ-подобных схем, а при условии наличия факторизации β -функции в (12) в \overline{MS} -схеме в ещё более высоких порядках ТВ (наиболее вероятно, что в любом порядке [20, 52, 53]), ОСК будет выполняться также в этих порядках и в классе схем импульсных вычитаний при $\xi = 0$ [25] (а также в отличных от \overline{MS} калибровочно-инвариантных схемах, таких как эффективная V-схема).

Наличием тождества Уорда в КЭД объяснена факторизация β -функции в ОСК в различных схемах, отличных от \overline{MS} .

Основные результаты и выводы по второй главе:

- Показано, что в КЭД помимо MS-подобных схем, обобщённое соотношение Крюгера выполняется на четырёхпетлевом уровне также и в калибровочно-инвариантных схемах импульсных вычитаний и вычитаний на массовой поверхности.
- Установлена справедливость ОСК в калибровочно-инвариантной V-схеме в КХД в том же приближении по теории возмущений.
- Выявлена факторизация КХД β -функции в члене, нарушающем конформную симметрию и входящем в рассматриваемое соотношение, в классе схем импульсных вычитаний в третьем порядке теории возмущений при $\xi = 0, -3$ и при $\xi = 0$ в четвёртом.
- Демонстрируется, что, если ОСК будет справедливым в калибровочно-инвариантных MS-подобных схемах во всех порядках ТВ, то оно также будет верным во всех порядках и в классе схем импульсных вычитаний в КХД в калибровке Ландау. На основании этого и иных результатов делается вывод, что калибровочная инвариантность схем перенормировок является достаточным, но не является необходимым

условием для факторизации β -функции в обобщённом соотношении Крюгера в КХД.

Третья глава посвящена изучению асимптотического поведения соотношения между полюсными M_f (определёнными в схеме вычитаний на массовой поверхности) и бегущими $\overline{m}_f(\overline{m}_f^2)$ (в $\overline{\text{MS}}$ -схеме) массами *тяжёлых* c , b и t -кварков в КХД, характеризующихся числом активных ароматов $n_f = 4, 5, 6$ соответственно.

В **разделе 3.1** обсуждаются известные на сегодняшний день результаты аналитических двух- [61, 62] и трёхпетлевых [63, 64] вычислений в рассматриваемое соотношение

$$\frac{M_f}{\overline{m}_f(\overline{m}_f^2)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M(n_l) a_s^k(\overline{m}_f^2), \quad (13)$$

где n_l соответствует числу безмассовых ароматов, распространяющихся внутри фермионных вставок в глюонную линию, перенормирующую пропагатор тяжёлого кварка, т.е. $n_l = n_f - 1$.

Отдельное внимание уделяется четырёхпетлевой поправке t_4^M , в разложении которой по степеням n_l

$$t_4^M = t_{4,3}^M n_l^3 + t_{4,2}^M n_l^2 + t_{4,1}^M n_l + t_{4,0}^M \quad (14)$$

вычислены в аналитической форме только первые два коэффициента $t_{4,3}^M$ и $t_{4,2}^M$ [65]. Последние два члена в (14) пока ещё неизвестны в аналитическом виде. Используя результаты расчётов [66] (где были получены численные значения поправки t_4^M при фиксированном количестве $n_l = 3, 4, 5$), в [24]¹ впервые был применён математический метод наименьших квадратов (МНК) (см. [67, 68], где также описан модифицированный МНК с весовыми множителями, который применялся, к примеру, в [69]) для нахождения численных значений коэффициентов $t_{4,0}^M$ и

¹В этой работе также впервые была представлена явная зависимость соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков от количества ароматов и от масштаба на четырёхпетлевом уровне.

$t_{4,1}^M$. Этот метод позволяет приближённо решать переопределённые системы алгебраических уравнений (в данном случае трёх уравнений, соответствующих значениям $n_l = 3, 4, 5$, с двумя неизвестными) и фиксировать ошибки полученных решений.

Факториальный рост коэффициентов t_k^M при больших k предсказывается в рамках ренормалонного анализа [12, 14, 70]. Подчёркнуто, что в связи с этим важно фиксировать номер порядка ТВ, начиная с которого поправки к изучаемому соотношению станут возрастать.

В разделе 3.2 метод наименьших квадратов применяется к массиву обновлённых более точных (по сравнению с предыдущей работой [66]) результатов численных расчётов [71] коэффициента t_4^M при фиксированном числе ароматов в широком диапазоне $3 \leq n_l \leq 15$ [27] для нахождения членов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ в разложении (14).

В разделе 3.3 выполнены оценки пяти- и шестипетлевых вкладов в $M_f/\overline{m}_f(\overline{m}_f^2)$ -отношение [26] при помощи метода эффективных зарядов [45, 46] и процедур, развитых в [34, 72, 73], где использовалось модельное дисперсионное соотношение, связывающее понятия полюсных и бегущих масс тяжёлых кварков. Эти оценки указывают на то, что асимптотическая структура рассматриваемого соотношения для b -кварка проявляется, начиная с четырёхпетлевого уровня. В случае t -кварка пяти и шестипетлевые вклады в полюсную массу уменьшаются, что свидетельствует об отсутствии явного асимптотического поведения в этих порядках ТВ.

В разделе 3.4 приведён альтернативный способ получения оценок пяти- и шестипетлевых вкладов в соотношение (13) при помощи асимптотической ренормалонной формулы [14, 70], в которой нормировочный фактор в конечном порядке ТВ может быть фиксирован исходя из различных подходов (см. например [14–16]).

В разделе 3.4.1 представлены оценки КХД поправок высших порядков ТВ к $M_f/\bar{m}_f(\bar{m}_f^2)$ -отношению, следующие из применения процедуры наивной неабелианизации к результатам работы [13], где были получены численные значения ведущих по степеням n_l вкладов в коэффициенты t_k^M . Показано, что результаты применения трёх исследуемых подходов (метод эффективных зарядов, подход, основанный на использовании асимптотической ренормальной формулы, а также процедура, базирующаяся на применении наивной неабелианизации) количественно согласуются друг с другом, поскольку приводят к значениям поправок, отличающихся не более чем в 2 раза (по крайней мере для физически интересных случаев $n_l = 3, 4, 5$) [26]. Данный факт убедительно свидетельствует о том, что асимптотический характер ряда ТВ для полюсной массы t -кварка не проявляется на шестипетлевом уровне, и поэтому эта величина является хорошо определённой в этом порядке. Оценки, выполненные в данном разделе, показывают, что, по всей видимости, асимптотическая структура $M_t/\bar{m}_t(\bar{m}_t^2)$ -отношения начинает проявляться после 7-го порядка ТВ.

Основные результаты и выводы по третьей главе:

- При помощи метода наименьших квадратов определены численные значения двух неизвестных в аналитическом виде коэффициентов в разложении четырёхпетлевой поправки к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков по степеням количества безмассовых ароматов.
- Исследовано поведение рядов ТВ для $M_f/\bar{m}_f(\bar{m}_f^2)$ -отношения в высших порядках и показано, что в случае с b -кварком его асимптотический характер проявляется, начиная с 4-го порядка ТВ, а для t -кварка не проявляется даже на шестипетлевом уровне.

В **Заключении** диссертации перечислены основные результаты и выводы работы, а также выражены благодарности автора.

В **Списке сокращений** приведены расшифровки используемых в тексте диссертации кратких обозначений.

В **Приложении А** получены решения РГ уравнений, определяющих эффект бега константы связи сильного взаимодействия и массы тяжёлых кварков в \overline{MS} -схеме, вплоть до 6-го порядка ТВ.

В **Приложении Б** представлены формулы пересчёта для константы связи КХД и калибровки ξ при переходе от одной схемы перенормировок к другой.

В **Приложении В** показано, что в $m\overline{MS}$ -схеме в 4-ом порядке ТВ при $\xi = -3, -1$ наблюдается частичная факторизация трёхпетлевой β -функции в ОСК, поскольку из 6 возможных коэффициентов в структуре K_3 -члена (см. (12)) не факторизуется лишь один.

В **Приложении Г** демонстрируются детали исследования устойчивости решений, полученных при помощи метода наименьших квадратов, по отношению к вариации как числа неизвестных (от 2 до 4), так и числа уравнений (от 3 до 13) в рассматриваемой в Главе 3 переопределённой системе алгебраических уравнений.

Список литературы

- [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. Изд-во “Наука”, 1984 г. С. 601. Издание четвёртое, исправленное.
- [2] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. Т. 1 и 2. с. 448 и 400.
- [3] Ф. Индурайн. Квантовая хромодинамика: Введение в теорию кварков и глюонов. М.: Мир, 1986. С. 288.
- [4] Л.Б. Окунь. Лептоны и кварки. М.: УРСС (3 изд.), 2005, 352 с.
- [5] Yang C.-N., Mills R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Phys. Rev. 1954. Т. 96. С. 191–195. [150(1954); 150(1954); 150(1954)].
- [6] Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе. К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц. 1965. Препринт ОИЯИ Д-1968, 12 с.
- [7] Han M. Y., Nambu Y. Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry // Phys. Rev. 1965. Т. 139. С. B1006–B1010. [187(1965)].
- [8] Gross D. J., Wilczek F. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories // Phys. Rev. Lett. 1973. Т. 30. С. 1343–1346. [271(1973)].
- [9] Politzer H. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // Phys. Rev. Lett. 1973. Т. 30. С. 1346–1349. [274(1973)].
- [10] Bjorken J. D. Inelastic Scattering of Polarized Leptons from Polarized Nucleons // Phys. Rev. 1970. Т. D1. С. 1376–1379.

- [11] Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. Авто-модельность, коммутаторы токов и векторная доминантность в глубоконеупругих лептон-адронных взаимодействиях. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра. Москва, АТОМИЗДАТ, 1971. Т. 2, выпуск 1, ЭЧАЯ.
- [12] The Pole mass of the heavy quark. Perturbation theory and beyond / I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev [и др.] // Phys. Rev. 1994. Т. D50. С. 2234–2246.
- [13] Ball P., Beneke M., Braun V. M. Resummation of $(\beta_0\alpha_s)^n$ corrections in QCD: Techniques and applications to the tau hadronic width and the heavy quark pole mass // Nucl. Phys. 1995. Т. B452. С. 563–625.
- [14] On the ultimate uncertainty of the top quark pole mass / M. Beneke, P. Marquard, P. Nason [и др.] // Phys.Lett. 2017. Т. B775. С. 63–70.
- [15] Pineda A. Determination of the bottom quark mass from the Upsilon(1S) system // JHEP. 2001. Т. 06. С. 022.
- [16] Ayala C., Cvetič G., Pineda A. The bottom quark mass from the $\Upsilon(1S)$ system at NNNLO // JHEP. 2014. Т. 09. С. 045.
- [17] Crewther R. J. Nonperturbative evaluation of the anomalies in low-energy theorems // Phys. Rev. Lett. 1972. Т. 28. С. 1421.
- [18] Schreier E. J. Conformal symmetry and three-point functions // Phys. Rev. 1971. Т. D3. С. 980–988.
- [19] Broadhurst D. J., Kataev A. L. Connections between deep inelastic and annihilation processes at next to next-to-leading order and beyond // Phys. Lett. 1993. Т. B315. С. 179–187.
- [20] Crewther R. J. Relating inclusive e^+e^- annihilation to

electroproduction sum rules in quantum chromodynamics // Phys. Lett. 1997. T. B397. C. 137–142.

- [21] Kataev A. L. Conformal symmetry limit of QED and QCD and identities between perturbative contributions to deep-inelastic scattering sum rules // JHEP. 2014. T. 02. C. 092.
- [22] Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H. Adler Function, Bjorken Sum Rule, and the Crewther Relation to Order α_s^4 in a General Gauge Theory // Phys. Rev. Lett. 2010. T. 104. C. 132004.
- [23] Kataev A. L., Molokoedov V. S. Fourth-order QCD renormalization group quantities in the V scheme and the relation of the β function to the Gell-Mann–Low function in QED // Phys. Rev. 2015. T. D92, № 5. C. 054008.
- [24] Kataev A. L., Molokoedov V. S. On the flavour dependence of the $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ correction to the relation between running and pole heavy quark masses // Eur. Phys. J. Plus. 2016. T. 131, № 8. C. 271.
- [25] Garkusha A. V., Kataev A. L., Molokoedov V. S. Renormalization scheme and gauge (in)dependence of the generalized Crewther relation: what are the real grounds of the β -factorization property? // JHEP. 2018. T. 02. C. 161.
- [26] Катаев А. Л., Молокоедов В. С. Зависимость приближенных выражений для пяти и шести петлевых КХД поправок к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжелых кварков от числа легких ароматов // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 108, № 12. С. 793–798.
- [27] Катаев А. Л., Молокоедов В. С. Метод наименьших квадратов: применение к анализу зависимости от числа легких ароматов соотношения между полюсными и бегущими мас-

- сами тяжелых кварков // ТМФ. 2019. Т. 200, № 3. С. 522–531.
- [28] Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Higher Order Corrections to $\sigma_t(e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons})$ in Quantum Chromodynamics // Phys. Lett. 1979. Т. 85B. С. 277–279.
- [29] Dine M., Sapirstein J. R. Higher Order QCD Corrections in e^+e^- Annihilation // Phys. Rev. Lett. 1979. Т. 43. С. 668.
- [30] Celmaster W., Gonsalves R. J. An Analytic Calculation of Higher Order Quantum Chromodynamic Corrections in e^+e^- Annihilation // Phys. Rev. Lett. 1980. Т. 44. С. 560.
- [31] Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A. The $O(\alpha_s^3)$ -corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$ in QCD // Phys. Lett. 1991. Т. B259. С. 144–150.
- [32] Surguladze L. R., Samuel M. A. Total hadronic cross-section in e^+e^- annihilation at the four loop level of perturbative QCD // Phys. Rev. Lett. 1991. Т. 66. С. 560–563. [Erratum: Phys. Rev. Lett. 66, 2416(1991)].
- [33] Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. Order α_s^4 QCD Corrections to Z and tau Decays // Phys. Rev. Lett. 2008. Т. 101. С. 012002.
- [34] Kataev A. L., Starshenko V. V. Estimates of the higher order QCD corrections to R(s), R(tau) and deep inelastic scattering sum rules // Mod. Phys. Lett. 1995. Т. A10. С. 235–250.
- [35] Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G. Higher-order QCD perturbation theory in different schemes: From FOPT to CIPT to FAPT // JHEP. 2010. Т. 06. С. 085.
- [36] Krasnikov N. V., Pivovarov A. A. The influence of the analytical continuation effects on the value of the QCD scale

parameter λ extracted from the data on charmonium and
upsilon hadron decays // Phys. Lett. 1982. T. 116B. C. 168–
170.

- [37] Radyushkin A. V. Optimized Λ - Parametrization for the QCD
Running Coupling Constant in Space - Like and Time - Like
Regions // JINR Rapid Commun. 1996. T. 78. JINR-E2-82-
159, JINR-RAPID-COMMUNICATIONS-4[78]-96, 9-(1996).
C. 96–99.
- [38] Gorishnii S. G., Larin S. A. QCD Corrections to the
Parton Model Rules for Structure Functions of Deep Inelastic
Scattering // Phys. Lett. 1986. T. B172. C. 109–112.
- [39] Larin S. A., Vermaseren J. A. M. The α_s^3 corrections to the
Bjorken sum rule for polarized electroproduction and to the
Gross-Llewellyn Smith sum rule // Phys. Lett. 1991. T. B259.
C. 345–352.
- [40] Fischler W. Quark - anti-Quark Potential in QCD // Nucl.
Phys. 1977. T. B129. C. 157–174.
- [41] Schroder Y. The Static potential in QCD to two loops // Phys.
Lett. 1999. T. B447. C. 321–326.
- [42] Analytic three-loop static potential / R. N. Lee, A. V. Smirnov,
V. A. Smirnov [и др.] // Phys. Rev. 2016. T. D94, № 5.
C. 054029.
- [43] Brodsky S. J., Melles M., Rathsman J. The Two loop scale
dependence of the static QCD potential including quark
masses // Phys. Rev. 1999. T. D60. C. 096006.
- [44] Mass spectra of doubly heavy Omega QQ' baryons /
V. V. Kiselev, A. K. Likhoded, O. N. Pakhomova [и др.] //
Phys. Rev. 2002. T. D66. C. 034030.

- [45] Krasnikov N. V. Analyticity and Renormalization Group // Nucl. Phys. 1981. T. B192. C. 497–508. [Yad. Fiz.35, 1594(1982)].
- [46] Grunberg G. Renormalization scheme independent QCD and QED: method of effective charges // Phys.Rev.1984. T. D29. C. 2315–2338.
- [47] von Smekal L., Maltman K., Sternbeck A. The Strong coupling and its running to four loops in a minimal MOM scheme // Phys. Lett. 2009. T. B681. C. 336–342.
- [48] Gracey J. A. Momentum subtraction and the R ratio // Phys. Rev. 2014. T. D90, № 9. C. 094026.
- [49] Gracey J. A. Renormalization group functions of QCD in the minimal MOM scheme // J. Phys. 2013. T. A46. C. 225403.
- [50] Four-loop QCD propagators and vertices with one vanishing external momentum / B. Ruijl, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren [и др.] // JHEP. 2017. T. 06. C. 040.
- [51] Constraints on anomalies / S. Adler, C. Callan, D. Gross [и др.] // Phys. Rev. 1972. T. D6. C. 2982–2988. [395(1973)].
- [52] Gabadadze G. T., Kataev A. L. On connection between coefficient functions for deep inelastic and annihilation processes // JETP Lett. 1995. T. 61. C. 448–452. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.61,439(1995)].
- [53] Braun V. M., Korchemsky G. P., Müller D. The Uses of conformal symmetry in QCD // Prog.Part.Nucl.Phys. 2003. T. 51. C. 311–398.
- [54] Gluonic three-point correlations in pure Landau gauge QCD / A. Blum, M. Huber, M. Mitter [и др.] // Phys. Rev. D. 2014. T. 89. C. 061703.

- [55] Bednyakov A., Pikelner A. Four-loop QCD MOM beta functions from the three-loop vertices at the symmetric point // Phys. Rev. D. 2020. T. 101, № 7. C. 071502.
- [56] Braaten E., Leveille J. Minimal and momentum subtraction in QCD at two loop order // Phys. Rev. 1981. T. D24. C. 1369.
- [57] Stefanis N. Gauge invariant quark two point Green function through connector insertion to $O(\alpha_s)$ // Nuovo Cim. 1984. T. A83. C. 205.
- [58] Craigie N. S., Dobrev V. K., Todorov I. T. Conformally Covariant Composite Operators in Quantum Chromodynamics // Annals Phys. 1985. T. 159. C. 411–444.
- [59] Mikhailov S. V. Renormalon chains contributions to nonsinglet evolutional kernels in QCD // Phys. Lett. 1998. T. B431. C. 387–394.
- [60] Gracey J. A. Symmetric point quartic gluon vertex and momentum subtraction // Phys. Rev. 2014. T. D90, № 2. C. 025011.
- [61] Three Loop Relation of Quark (Modified) M_s and Pole Masses / N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe [и др.] // Z. Phys. 1990. T. C48. C. 673–680.
- [62] Avdeev L. V., Kalmykov M. Yu. Pole masses of quarks in dimensional reduction // Nucl. Phys. 1997. T. B502. C. 419–435.
- [63] Melnikov K., van Ritbergen T. The Three loop relation between the \overline{MS} -bar and the pole quark masses // Phys. Lett. 2000. T. B482. C. 99–108.
- [64] Chetyrkin K., Steinhauser M. The relation between \overline{MS} and on-shell quark mass at order α_s^3 // Nucl.Phys. 2000. T. B573. C. 617–651.

- [65] Four-loop corrections with two closed fermion loops to fermion self energies and the lepton anomalous magnetic moment / R. Lee, P. Marquard, A. V. Smirnov [и др.] // *ЖНЕР*. 2013. Т. 03. С. 162.
- [66] Quark Mass Relations to Four-Loop Order in Perturbative QCD / P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Т. 114, № 14. С. 142002.
- [67] Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, 1958. 338 с.
- [68] Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 523 с.
- [69] Tkachov F. V. Transcending the least squares. 2006. physics/0604127.
- [70] Beneke M. Renormalons // *Phys. Rept.* 1999. Т. 317. С. 1–142.
- [71] $\overline{\text{MS}}$ -on-shell quark mass relation up to four loops in QCD and a general $SU(N)$ gauge group / P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov [и др.] // *Phys. Rev.* 2016. Т. D94, № 7. С. 074025.
- [72] Chetyrkin K. G., Kniehl B. A., Sirlin A. Estimations of order α_s^3 and α_s^4 corrections to mass dependent observables // *Phys. Lett.* 1997. Т. B402. С. 359–366.
- [73] Kataev A. L., Kim V. T. Peculiar features of the relations between pole and running heavy quark masses and estimates of the $O(\alpha_s^4)$ contributions // *Phys. Part. Nucl.* 2010. Т. 41. С. 946–950.

Научное издание
Молокоедов
Виктор Сергеевич
Эффекты высших поправок теории возмущений
в КХД и их теоретические
и феноменологические следствия
01.04.02 – Теоретическая физика

Ф-т 60x84/16 Уч.-изд.л. 1,2 Зак. №22462 Тираж 80 экз. Бесплатно
Печать цифровая

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук
Издательский отдел
117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а