

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук



А.В. Новиков-Бородин

**Реконструкция, оптимизация и моделирование  
многомерных экспериментальных данных  
методами пошаговых  
и комбинированных сдвигов**

ПРЕПРИНТ ИЯИ РАН  
1439/2018  
ДЕКАБРЬ 2018

препринт  
preprint

МОСКВА 2018 MOSCOW

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук



**А.В. Новиков-Бородин**

**Реконструкция, оптимизация и моделирование  
многомерных экспериментальных данных  
методами пошаговых  
и комбинированных сдвигов**

ПРЕПРИНТ ИЯИ РАН  
1439 / 2018  
ДЕКАБРЬ 2018

препринт  
preprint

МОСКВА 2018 MOSCOW

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук



А.В. Новиков-Бородин

Реконструкция, оптимизация и моделирование  
многомерных экспериментальных данных  
методами пошаговых  
и комбинированных сдвигов

ПРЕПРИНТ ИЯИ РАН

1439/2018

ДЕКАБРЬ 2018

МОСКВА

2018

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences  
60-th October Anniversary prospect 7a,  
Moscow 117312, Russia

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований Российской академии наук  
проспект 60-летия Октября, 7а  
Москва, 117312

А.В. Новиков-Бородин

Реконструкция, оптимизация  
и моделирование многомерных  
экспериментальных данных методами  
пошаговых и комбинированных сдвигов

Анализируются достоинства и недостатки численного метода пошаговых сдвигов, предназначенного для реконструкции импульсного отклика измерительных систем из экспериментальных данных, представляющих собой суперпозицию импульсных откликов системы. Предлагается метод комбинированных сдвигов, позволяющий осуществлять реконструкцию, оптимизацию и моделирование относительно члена с наибольшей статистикой при различных видах функций наложения и уровнях шумов в данных. Рассматривается возможность применения предложенных методов пошаговых и комбинированных сдвигов для восстановления многомерных данных в виде изображений или объектов в них, смазанных при сдвиге или размытых по Гауссу. Приводятся примеры реконструкции одномерных данных и многомерных изображений.

ISBN 978-5-94274-329-1

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук, 2018  
Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences, 2018

А.В. Новиков-Бородин

Реконструкция, оптимизация и моделирование  
многомерных экспериментальных данных  
методами пошаговых и комбинированных сдвигов

Препринт 1439/2018

Декабрь 2018

Подписано в печать 10.12.2018

Ф-т 60x84/8. Уч.-изд.л. 1,0. Зак.22437 Тираж 70 экз.  
Бесплатно

Печать цифровая  
Издательский отдел

Федеральное государственное бюджетное учреждение  
науки Институт ядерных исследований Российской  
академии наук

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а

## Введение

Разрешающая способность измерительных систем как временная, так и пространственная, является одной из важнейших характеристик установок для проведения экспериментальных исследований и во многом зависит от технических характеристик применяемого оборудования. Задача повышения разрешающей способности аппаратуры сопряжена с целым рядом научно-технических проблем и требует значительных материальных затрат и финансовых вложений. Разработка математических методов, позволяющих повысить эффективную разрешающую способность измерительных систем вплоть до физических ограничений путем реконструкции и оптимизации полученных экспериментальных данных, является приоритетной альтернативной задачей, не требующей больших финансовых вложений.

С точки зрения математики, задача реконструкции импульсного отклика измерительных систем из их интегрального отклика, представляющего собой свёртку импульсного отклика и функции наложения произвольного вида, относятся к классу некорректно поставленных задач [1]. Однако, в целом ряде случаев, таких, например, как представленная в [2] реконструкция отклика времяпролётных спектрометров типа ТРОНС (Троицкий Нейтронный Спектрометр) ИЯИ РАН [3] и многих других, задача реконструкции и оптимизации измерений может быть успешно решена.

Возможность реконструкции зависит от многих условий, таких как вид функции наложения и точность её определения, размер экспериментальных данных и уровень помех в них и др., что требует разработки различных методов эффективных в том или ином случае.

В данной работе анализируются достоинства и недостатки метода пошаговых сдвигов и его модификаций, предложенных в [2] для математической реконструкции и оптимизации отклика нейтронных спектрометров, связанные с видом функции наложения и наличием помех в экспериментальных данных. Предлагается метод комбинированных сдвигов, позволяющий преодолеть указанные ограничения метода пошаговых сдвигов. Проводится сравнительный анализ методов, анализируются погрешности реконструкции при различных видах функции наложения, разных объёмах экспериментальных данных и уровнях помех в них. Рассматривается возможность применения предлагаемых методов для восстановления смазанных при сдвиге и размытых по Гауссу многомерных изображений или объектов в них, включая цветные изображения. Приводятся примеры реконструкции экспериментальных данных и изображений.

## 1. Постановка задачи реконструкции

Интегральный отклик  $H(x)$  измерительной системы при наложении импульсных откликов  $h(x)$  по закону  $S(x)$  в одномерном случае можно представить в виде свёртки функций  $S(x)$  и  $h(x)$ :

$$H(x) = S * h = \int S(\xi)h(x - \xi)d\xi = \int S(x - \xi)h(\xi)d\xi. \quad (1)$$

В случае дискретных измерений функции  $S(x)$  и  $h(x)$  можно представить в виде:  $S = \sum_k s_k \delta_k$  и  $h = \sum_m h_m \delta_m$  соответственно, где  $\delta_i$  — символ Кронекера, отличающийся от 0 и равный 1 только на  $i$ -том интервале разбиения оси  $x$ . При этом интегральному отклику  $H(x)$  согласно (1) будет соответствовать суммарный:

$$H = \sum_p H_p \delta_p = \sum_k \sum_m s_k h_m \delta_{k+m}. \quad (2)$$

С точки зрения математики, задача реконструкции импульсного отклика  $h(x)$  из интегрального  $H(x)$  при известной функции наложения  $S(x)$  относится к классу некорректно поставленных задач [1], но в целом ряде случаев задача может быть решена. Универсального метода решения задачи реконструкции в данной постановке не существует. Возможность реконструкции зависит от вида функции наложения и точности её определения, от размера экспериментальных данных, уровня помех в них и многих других причин, что требует разработки различных методов эффективных в том или ином случае.

## 2. Метод пошаговых сдвигов

Метод пошаговых сдвигов, предложенный в [2], основан на свойстве линейности уравнения (1) относительно функции наложения  $S(x)$  и в дискретном случае (2) реализуется посредством итерационных уравнений:

$$S^{n+1} = S^n - a_n S_{(n+1)}^n, \quad H^{n+1} = H^n - a_n H_{(n+1)}^n \quad (3)$$

где  $a = s_{n+1}^n / s_0$ ,  $S^0 = S$ ,  $H^0 = H$ ,  $S^n = \sum_k s_k^n \delta_k$  и  $H^n = \sum_k \sum_m s_k^n h_m^n \delta_{k+m}$  — функции  $n$  наложения и отклика на  $n$ -том шаге итерации,  $S_{(l)}^n = \sum_k s_k^n \delta_{k+l}$  и  $H_{(l)}^n = \sum_k \sum_m s_k^n h_m^n \delta_{k+m+l}$  — те же функции, сдвинутые вправо на  $l$  интервалов дискретизации.

Алгоритм (3) заключается в последовательном обнулении коэффициентов  $s_1^n = s_2^n = \dots = s_n^n = 0$  в функции наложения  $S^n$ , поэтому на  $n$ -том шаге итерации:

$$S^n = s_0 \delta_0 + \sum_k s_{k+n+1}^n \delta_{k+n+1}, \quad H^n = s_0 \sum_m h_m \delta_m + \sum_k \sum_m s_{k+n+1}^n h_m^n \delta_{m+k+n+1} \quad (4)$$

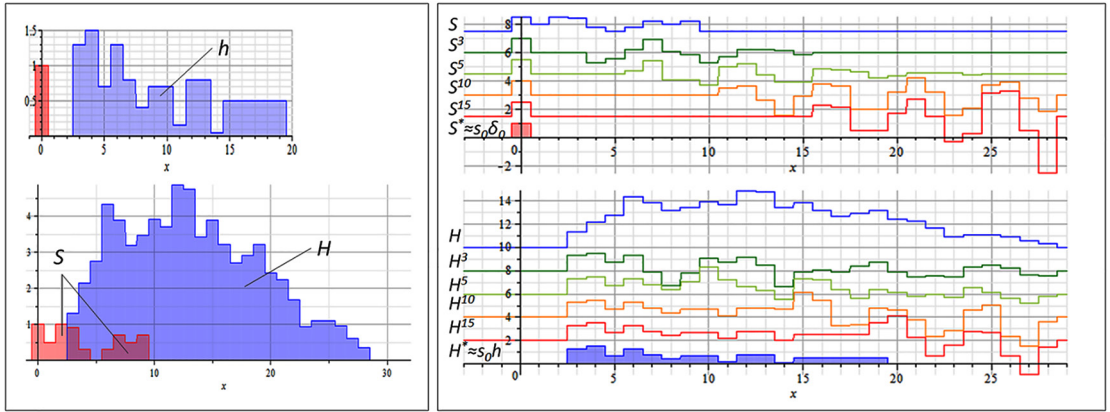


Рисунок 1. Реконструкция импульсного отклика  $h$  из исходного  $H$  при функции наложения  $S$  методом пошаговых сдвигов

то есть на интервале  $[0, n]$ :  $S^n = s_0 \delta_0$ , а  $H^n = s_0 \sum_m h_m \delta_m = s_0 h$ , что означает решение задачи реконструкции импульсного отклика измерительной системы на этом интервале.

На Рисунке 1 представлен пример реконструкции импульсного отклика системы  $h$  из исходного  $H$  при функции наложения  $S$  методом пошаговых сдвигов [2].

На диаграммах показаны функции наложения и отклика на начальном, 3-м, 5-м, 10-м, 15-м и конечном шагах итерации. В данном примере погрешность реконструкции на исследуемом интервале  $err = H^* - s_0 h$  не превысила  $2.5 \cdot 10^{-15}$ .

Достоинством метода пошаговых сдвигов является возможность реконструкции необходимого количества элементов импульсного отклика, что важно при реконструкции откликов неограниченной длины. На диаграммах Рисунка 1 видно, что на  $n$ -том шаге итерации происходит последовательная реконструкция  $n$  элементов импульсного отклика, начиная с первого отличного от нуля члена суммарного отклика.

Если функция  $S = s_0 \delta_0 + s_l \delta_l$  описывает наложение двух откликов, то опуская в (3) шаги итерации, на которых при  $s_k = 0$  функции  $S$  и  $H$  не



меняются, получим модифицированные итерационные уравнения:

$$S^{n+1} = S^n + a^{2^n} S^n_{(2^n l)}, \quad H^{n+1} = H^n + a^{2^n} H^n_{(2^n l)}, \quad (5)$$

где  $a = s_l/s_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $S^0 = S$ ,  $S^1 = S^0 - aS^0_{(l)}$ ,  $H^0 = H$ ,  $H^1 = H^0 - aH^0_{(l)}$ .

Модифицированный метод значительно сокращает число итераций, необходимых для реконструкции. Так, если  $N$  — число итераций, необходимых для реконструкции методом пошаговых сдвигов, то число итераций  $N^*$  модифицированным методом составит:  $N^* = \log_2(N/l)$ .

Модифицированный метод удобно использовать для моделирования отклика измерительной системы на инициирующий импульс меньшей длительности, что означает возможность повышения эффективной разрешающей способности измерительной аппаратуры вплоть до физических ограничений.

Теоретически, метод пошаговых сдвигов даёт возможность реконструкции импульсного отклика системы при любом виде функции наложения  $S = \sum s_k \delta_k$ , но на практике, если какой-нибудь из коэффициентов  $s_k > s_0$ , то множители в (3) или  $a^{2^n}$  в (5) будут быстро возрастать, что приведёт к резкому росту погрешности численных вычислений, к расходимости итерационной последовательности, и в итоге к ошибкам реконструкции. На Рисунке 2 показано возрастание ошибок реконструкции при уменьшении в функции наложения на Рисунке 1 коэффициента  $s_0$  от 0.1 до 0.01.

Действительно, если  $S = s_0 \delta_0 + s_l \delta_l$ , где  $s_l/s_0 = a > 1$ , то даже если  $s_l$  больше  $s_0$  всего на один процент, то есть при  $a = 1.01$ , коэффициент  $a^{2^n}$  уже на двадцатом шаге итерации будет равен  $a^{2^{20}} \approx a^{10^6} \approx 1.94 \cdot 10^{4531}$ . При допустимом максимальном значении числа при вычислениях  $N_{\max}$  оказывается возможным реконструировать  $M_{\max}$  членов импульсного

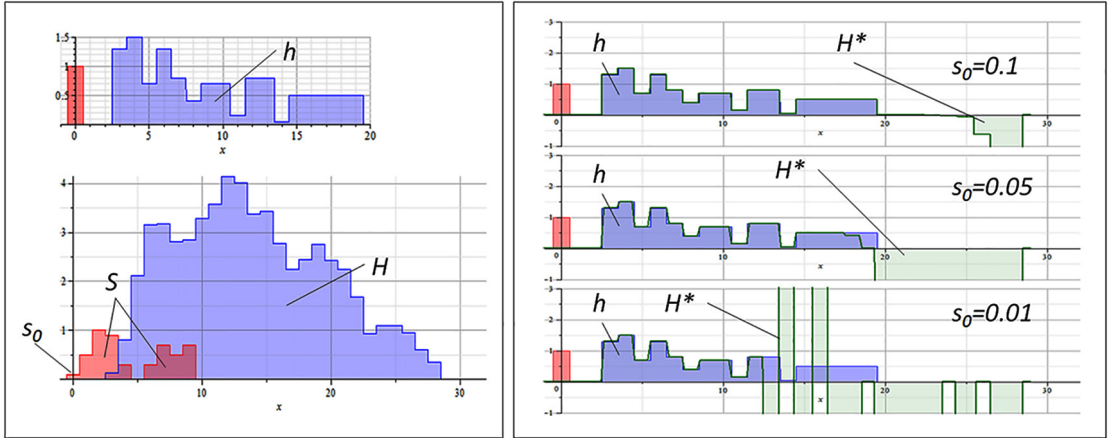


Рисунок 2. Увеличение ошибок реконструкции методом пошаговых сдвигов при уменьшении величины коэффициента  $s_0$  в функции наложения  $S$

отклика:

$$M_{\max} \approx l \frac{\ln(N_{\max})}{\ln(s_{\max} / s_0)}, \quad s_l = s_{\max}. \quad (6)$$

Формулу (6) можно использовать для оценки  $M_{\max}$  в случае произвольной функции наложения. Так на Рисунке 2:  $s_{\max} = s_2 = 1$ , и при  $s_0 = 0.01, 0.05, 0.1$   $M_{\max} \approx 13, 19 - 20, 26$ , соответственно, что хорошо согласуется с формулой (6), расчёт по которой даёт:  $M_{\max} \approx 13, 19.98, 26$ .

При двух наложениях  $S = s_0 \delta_0 + s_l \delta_l$ , где  $s_l / s_0 > 1$ , реконструкцию можно осуществить относительно члена  $s_l \delta_l$ , сдвигая итерационную последовательность не вправо, а влево. При этом  $s_0 / s_l = a < 1$  и множитель  $a^{2^n}$  в итерационном уравнении (5) будет быстро уменьшаться. Так при  $a = 0.99$  уже на девятом шаге итерации погрешность реконструкции составит 0.6%, а на десятом —  $3.4 \cdot 10^{-3} \%$ .

Однако если максимальный член функции наложения не является крайним, то одновременно обнулить коэффициенты справа и слева от него методом пошаговых сдвигов ни в одну из сторон не удаётся. В частности, подобная проблема характерна для функций наложения в виде функции Гаусса, что часто встречается на практике. Так, например, им-

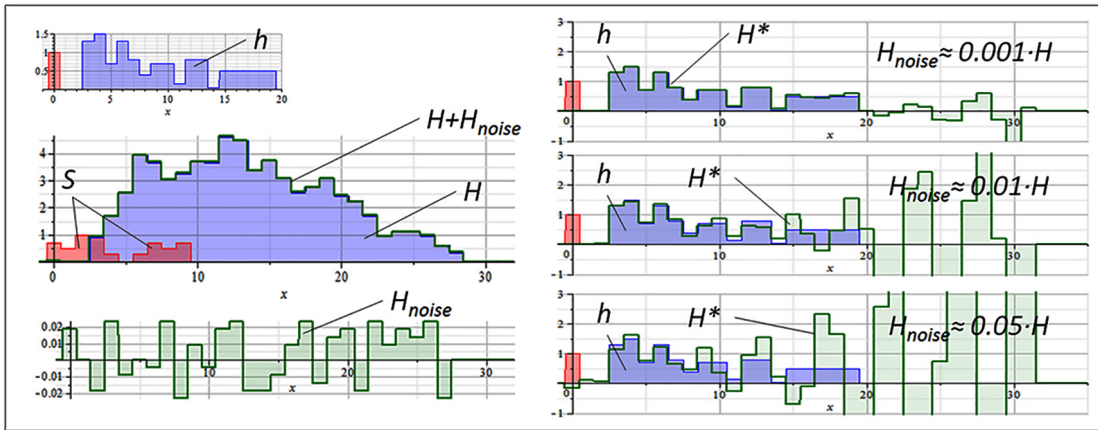


Рисунок 3. Возрастание ошибок реконструкции методом пошаговых сдвигов при увеличении уровня помех от 0.1 до 5 %

пульс, инициирующий поток нейтронов на времяпролетном нейтронном спектрометре ИБР-2М, описывается функцией Гаусса [4].

Кроме того, реконструкция методом пошаговых сдвигов даже при небольшом уровне помех ( $H_{noise}$ ) в экспериментальных данных ( $H$ ) оказывается невозможной, так как итерационная последовательность, как показано на рисунке 3, начинает быстро расходиться.

Эти недостатки напрямую связаны с принципиальной проблемой метода пошаговых сдвигов в случае статистических измерений, так как реконструкция импульсного отклика относительно крайнего члена, не являющегося максимальным, означает восстановление отклика относительно члена с меньшей статистикой. Предлагаемый для устранения указанных недостатков метод основан на методе пошаговых сдвигов, но использует комбинацию нескольких сдвигов.

### 3. Метод комбинированных сдвигов

Рассмотрим функцию  $S^*$ , являющуюся линейной комбинацией смещённых функций наложения  $S = s_0\delta_0 + s_1\delta_1 + s_2\delta_2$  с коэффициентами  $\mu_i$ , где  $s_{max} = s_1$ :

$$S^* = \mu_{-1}S_{(-1)} + \mu_0S_{(0)} + \mu_1S_{(1)} \quad (7)$$

Здесь  $S_{(i)} = s_0\delta_i + s_1\delta_{i+1} + s_2\delta_{i+2}$  — смещенная на  $i$  дискретных интервала функция  $S$ , а коэффициенты  $\mu_i$  выбираются так, чтобы в новой функции  $S^*$  коэффициенты  $s_0^*, s_2^* = 0$  и  $s_1^*$ . Представляя  $S^* = s_{-1}\delta_{-1} + \delta_1 + s_3^*\delta_3$  в виде вектора  $[s_{-1}^* \ 0 \ 1 \ 0 \ s_3^*]$ , уравнение (7) можно записать в матричном виде:

$$\boldsymbol{\mu} = [s_{-1}^* \ 0 \ 1 \ 0 \ s_3^*] = [\mu_{-1} \ \mu_0 \ \mu_1] \cdot \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_0 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Так как в данном примере значения  $s_{-1}^*$ ,  $s_3^*$  не важны, для нахождения неизвестных коэффициентов  $\mu_i$  достаточно решить сокращённое матричное уравнение:

$$\boldsymbol{\mu} = [0 \ 1 \ 0] = [\mu_{-1} \ \mu_0 \ \mu_1] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 \\ s_0 & s_1 & s_2 \\ 0 & s_0 & s_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\Sigma}. \quad (9)$$

Согласно наложенным условиям, определитель квадратной матрицы сдвигов  $\boldsymbol{\Sigma}$  не равен 0:  $\det(\boldsymbol{\Sigma}) \neq 0$ , поэтому матрица сдвигов имеет обратную:  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ , и уравнение (9) всегда имеет решение:

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_{-1} \ \mu_0 \ \mu_1] = [0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 \\ s_0 & s_1 & s_2 \\ 0 & s_0 & s_1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1}. \quad (10)$$

Таким образом, с помощью линейной комбинации (7) сдвинутых функций наложения  $S$  с коэффициентами (10) можно получить новую функцию наложения  $S^*$ , в которой коэффициенты справа и слева от выбранного члена равны нулю.

Аналогично, используя линейную комбинацию функций  $S$  сдвинутых вправо и влево на  $L$  шагов с коэффициентами  $[\mu_{-L}, \dots, \mu_0, \dots, \mu_L]$ , можно получить функцию наложения  $S^* = \mu_{-L}S_{-L} + \mu_0S_0 + \dots + \mu_LS_L$ , в которой справа и слева от выбранного члена с индексом  $k_m$  стоят  $L$  нулевых

элементов.

В этом случае, если  $L > M$ , где  $M$  — число членов импульсного отклика системы  $h = \sum_{m=0}^M h_m \delta_m$ , то соответствующий  $S^*$  отклик:

$$H^* = \mu_{-L} H_{(-L)} + \dots + \mu_0 H_{(0)} + \dots + \mu_L H_{(L)}, \quad \mu = \mathbf{e} \cdot \Sigma^{-1}, \quad (11)$$

на интервале  $[k_m, L + k_m]$  совпадёт с  $h$ :  $H^* \approx h$ . Этот способ реконструкции будем называть методом *комбинированных сдвигов*.

При реконструкции импульсного отклика  $h$  в уравнении (11) вектор  $\mathbf{e}$  размерности  $2L + 1$  имеет лишь один ненулевой элемент:  $e_{L+1} = 1$ , а матрица  $\Sigma^{-1}$  является обратной к квадратной матрице сдвигов  $\Sigma$  размерности  $2L + 1$ . На главной диагонали матрицы сдвигов  $\Sigma = \{\Sigma_{ij}\}$  расположен коэффициент выбранного члена дискретной функции наложения  $s_{k_m}$ , а на под- и над- диагоналях — коэффициенты членов слева и справа от него, в то время как оставшиеся элементы нулевые, то есть  $\Sigma_{ij} = s_{k_m + j - i}$ ,  $i, j = 0, \dots, 2L$ .

Коэффициенты сдвига  $\mu$  большой размерности удобно искать с помощью прямых или итерационных методов решения линейного уравнения  $\mu \cdot \Sigma = \mathbf{e}$ , где для лучшей сходимости методов выбранным членом в матрице сдвигов должен быть член с максимальным коэффициентом функции наложения:  $s_{k_m} = s_{\max}$ .

Метод комбинированных сдвигов даёт возможность реконструкции отклика относительно выбранного члена при любых функциях наложения  $S$ , если размерности  $K$  и  $M$  функции наложения  $S$  и импульсного отклика  $h$  конечны. При этом исходный отклик  $H$  должен быть полностью определён, то есть его размерность должна быть не меньше, чем  $K + M$ .

Метод комбинированных сдвигов легко справляется с задачей реконструкции импульсного отклика системы при функции наложения  $S$

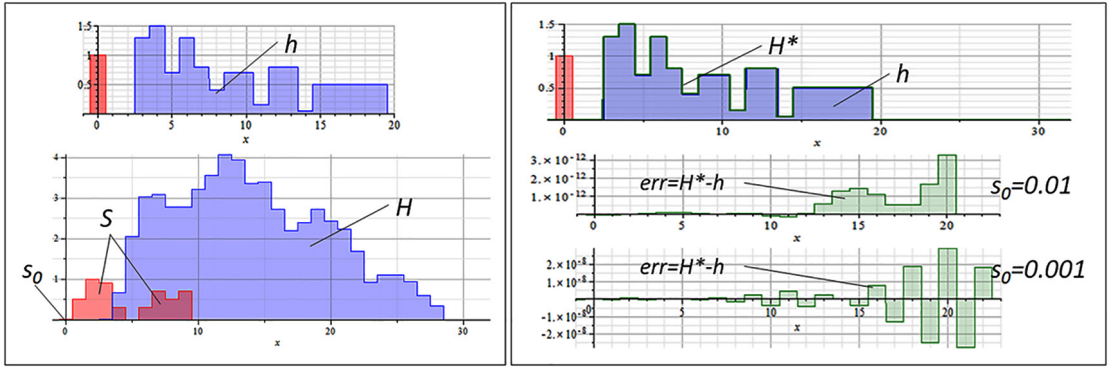


Рисунок 4. Реконструкция импульсного отклика  $h$  из исходного  $H$  при функции наложения  $S$  методом комбинированных сдвигов

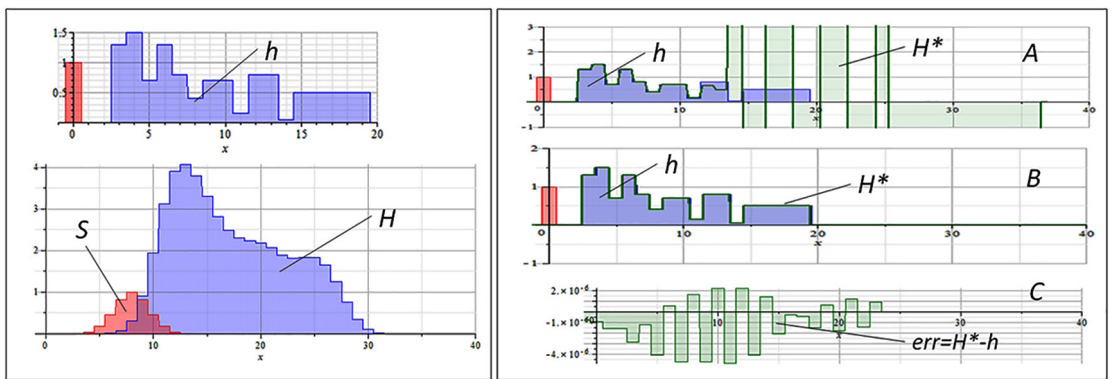


Рисунок 5. Реконструкция импульсного отклика  $h$  из исходного  $H$  при наложениях  $S$  в виде функции Гаусса методами пошаговых (А) и комбинированных (В) сдвигов

на Рисунке 2 со сколь угодно малыми коэффициентами  $s_0$ , при которых метод пошаговых сдвигов приводил к расходимости итерационной последовательности. Пример такой реконструкции методом комбинированных сдвигов представлен на Рисунке 4. При  $s_0=0.01$  погрешность реконструкции  $err=H^*-h$  составляет  $3.0 \cdot 10^{-12}$ , а при  $s_0=0.001$  не превышает  $3.0 \cdot 10^{-8}$ .

Также легко метод комбинированных сдвигов справляется с реконструкцией импульсного отклика при наложениях в виде функции Гаусса. Пример такой реконструкции методами пошаговых (А) и комбинированных (В) сдвигов представлен на Рисунке 5. Погрешность реконструкции методом комбинированных сдвигов (С) не превышает  $4.0 \cdot 10^{-12}$ , в то

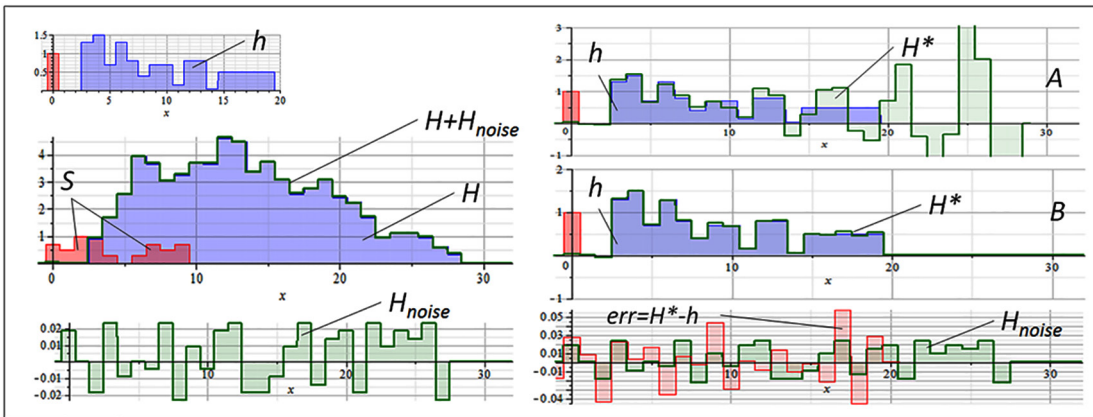


Рисунок 6. Реконструкция импульсного отклика  $h$  при наличии помех  $H_{noise}$  в исходном отклике  $H$  методом пошаговых (А) и комбинированных (В) сдвигов

время как применение метода пошаговых сдвигов невозможно, так как приводит к расхождению итерационной последовательности.

Возможность выбора члена, относительно которого осуществляется реконструкция, является важным достоинством метода комбинированных сдвигов при обработке статистических данных, так как означает, что реконструкция проводится относительно члена с наибольшей набранной статистикой. Это преимущество определяет и возможность реконструкции отклика при наличии помех в экспериментальных данных.

На Рисунке 6 представлены результаты реконструкции импульсного отклика  $h$  методом пошаговых (А) и комбинированных (В) сдвигов при наличии случайных помех ( $H_{noise}$ ) порядка 1.0 % от максимального значения исходного отклика  $H$ . В то время как в методе пошаговых сдвигов итерационная последовательность расходится (А), погрешность реконструкции  $err = H^* - h$  методом комбинированных сдвигов (В) такого же порядка как уровень помех  $H_{noise}$ .

Метод комбинированных сдвигов дает возможность оптимизации экспериментальных данных путем моделирования отклика измерительной системы при любой выбранной функции наложения. При этом до-

статочно, чтобы вектор  $\mathbf{s}$  в уравнении (11) описывал желаемую функцию наложения. На практике оптимизация может оказаться единственной альтернативой в случае невозможности реконструкции импульсного отклика системы.

Таким образом, метод комбинированных сдвигов позволяет реконструировать импульсный отклик системы относительно выбранного члена с наибольшей статистикой, смоделировать экспериментальные данные от функции наложения оптимального вида или импульсного отклика меньшей дискретизации, что означает повышение разрешающей способности измерительных систем. При этом применение метода комбинированных сдвигов ограничивается условием конечности интервалов функции наложения и импульсного отклика. Также метод комбинированных сдвигов требует выполнения большого объема вычислений при операциях с матрицами большой размерности.

#### 4. Восстановление изображений

В многомерном случае интегральный отклик измерительной системы  $H(\mathbf{x})$ ,  $x=(x_1, x_2, \dots)$  при наложении многомерного изображения  $I(\mathbf{x})$  по закону  $S(\mathbf{x})$  можно представить в виде свёртки:

$$H(x_1, x_2, \dots) = S * I = \iiint S(\xi_1, \xi_2, \dots) I(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots) d\xi_1 d\xi_2 \dots \quad (12)$$

В дискретном случае функции  $S(\mathbf{x})$  и  $I(\mathbf{x})$  описываются выражениями:  $S = \sum_{k_1, k_2, \dots} s_{k_1 k_2 \dots} \delta_{k_1 k_2 \dots}$  и  $I = \sum_{m_1, m_2, \dots} I_{m_1 m_2 \dots} \delta_{m_1 m_2 \dots}$  соответственно, где  $\delta_{i_1 i_2 \dots}$  — многомерный символ Кронекера, отличающийся от 0 и равный 1 только в объеме, ограниченном  $i_1, i_2, \dots$ -ми интервалами разбиения осей  $x_1, x_2, \dots$  соответственно. При этом интегральному отклику  $H(x)$  будет соответствовать суммарный:



$$H = \sum_{p_1, p_2, \dots} H_{p_1 p_2 \dots} \delta_{p_1 p_2 \dots} = \sum_{k_1, k_2, \dots; m_1, m_2, \dots} s_{k_1 k_2 \dots} I_{m_1 m_2 \dots} \delta_{k_1 + m_1, k_2 + m_2, \dots} \quad (13)$$

Рассмотренные методы пошаговых и комбинированных сдвигов можно применять для реконструкции многомерных изображений при определенных функциях наложения, которые позволяют свести уравнения (12) и (13) к одномерному случаю или к комбинации одномерных.

Наиболее простым является случай параллельного смещения с наложением, то есть ‘смазывания’ изображения  $I(\mathbf{x})$  вдоль одной из осей. Так, если, не теряя общности, считать, что смещение происходит вдоль оси  $x = x_1$ , то выражения (12)–(13) сразу преобразуются к одномерному случаю (1)–(2):

$$H(x, x_2, \dots) = \int S(\xi) I(x - \xi, x_2, \dots) d\xi, \quad (14)$$

$$H = \sum_{p, p_2, \dots} H_{pp_2 \dots} \delta_{pp_2 \dots} = \sum_{k, m} s_k I_{m m_2 \dots} \delta_{k+m, m_2, \dots}$$

В этом случае методы пошаговых (3), (5) и комбинированных (11) сдвигов применимы для реконструкции изображений  $I(\mathbf{x})$ . Изображения могут быть и цветными, при этом каждый из цветовых слоев восстанавливается аналогично.

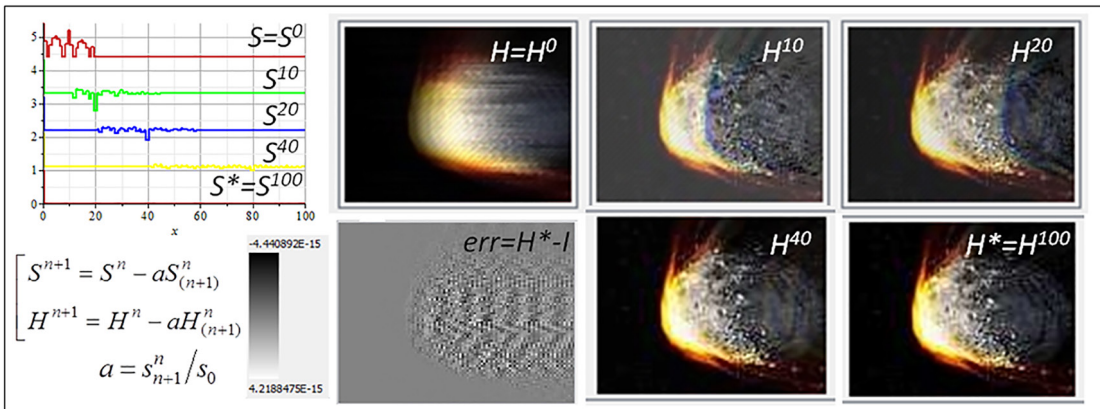


Рисунок 7. Восстановление цветного двумерного изображения  $I$  из смазанного  $H$  при функции наложения  $S$  методом пошаговых сдвигов

На Рисунке 7 представлены диаграммы последовательного восстановления цветного двумерного изображения  $I$  размером  $79 \times 100$  пикселей из смазанного по оси  $x$  изображения  $H$  при функции наложения  $S$  методом пошаговых сдвигов на 0, 10, 20, 40 и 100-том шагах итерации (3). При этом ошибки восстановления  $err = H^* - I$  не превысили  $5 \cdot 10^{-15}$ .

Аналогичным образом можно восстановить смазанный, например, быстродвигающийся объект на изображении. Если направление смещения изображения не совпадает с осями изображения, то наиболее простым способом восстановления является приведение задачи к виду (14), (15) путем поворота координатных осей до совмещения оси смещения с одной из координатных осей. При этом, однако, необходимо учитывать возрастание ошибок дискретизации при повороте осей.

Важным случаем смазанных изображений является равномерно смазанное изображение, которое образуется, например, при регистрации быстродвигающихся объектов. Значительно сократить число необходимых итераций при восстановлении изображений таких объектов позволяет модифицированный метод (5). Так, например, равномерно смазанное изображение с функцией наложения  $S = \delta_{0-20}$  на Рисунке 8 можно восстано-

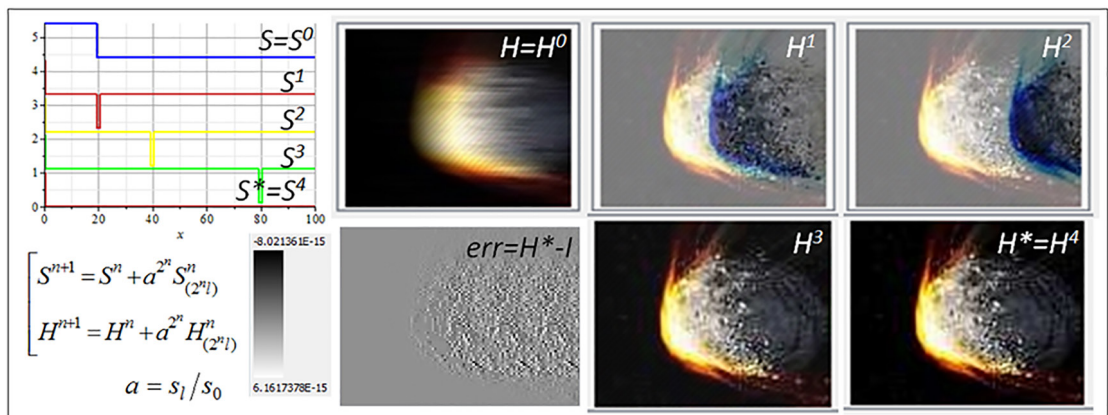


Рисунок 8. Восстановление цветного изображения  $I$  из равномерно смазанного  $H$  модифицированным методом пошаговых сдвигов

вить модифицированным методом всего за 4 итерации вместо 100 итераций необходимых в предыдущем случае. При этом смещая  $S$  на один интервал и вычитая  $S_{(1)}$  из исходной функции, получим:  $S^1 = S - S_{(1)} = \delta_0 - \delta_{21}$ , к которой применим модифицированный метод (5), позволяющий резко сократить число итераций, необходимых для реконструкции.

Если функция наложения допускает разделение переменных в виде:  $S(\mathbf{x}) = S_1(x_1)S_2(x_2)\dots S_n(x_n)$ , то многомерные уравнения (12), (13) можно свести к комбинации одномерных (1), (2) и решить задачу восстановления изображений рассмотренными одномерными методами. Действительно, в случае разделения переменных уравнение свертки можно представить как:

$$H(x_1, x_2, \dots) = \int d\xi_1 S(x_1 - \xi_1) \int d\xi_2 S(x_2 - \xi_2) \dots \int d\xi_n S(x_n - \xi_n) I(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (15)$$

и восстановить изображение, последовательно реконструируя функции  $I_1(\mathbf{x}), I_2(\mathbf{x}), \dots, I_n(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$  рассмотренными ранее одномерными методами пошаговых или комбинированных сдвигов:

$$\left[ \begin{array}{l} H(x_1, x_2, \dots) = \int d\xi_1 S(x_1 - \xi_1) I_1(\xi_1, x_2, \dots, x_n); \\ I_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int d\xi_2 S(x_2 - \xi_2) I_2(x_1, \xi_2, \dots, x_n); \\ \dots \\ I_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int d\xi_n S(x_n - \xi_n) I(x_1, x_2, \dots, \xi_n). \end{array} \right. \quad (16)$$

Порядок реконструируемых функций может быть произвольным. Так, например, в двумерном случае существует два пути восстановления изображения через реконструкцию  $I_x(x, y)$  или  $I_y(x, y)$ :

$$\left[ \begin{array}{l} H(x, y) = \int d\xi S_x(x - \xi) I_x(\xi, y) \\ I_x(x, y) = \int d\eta S_y(y - \eta) I(x, \eta) \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{l} H(x, y) = \int d\eta S_y(y - \eta) I_y(x, \eta) \\ I_y(x, y) = \int d\xi S_x(x - \xi) I(\xi, y) \end{array} \right. \quad (17)$$

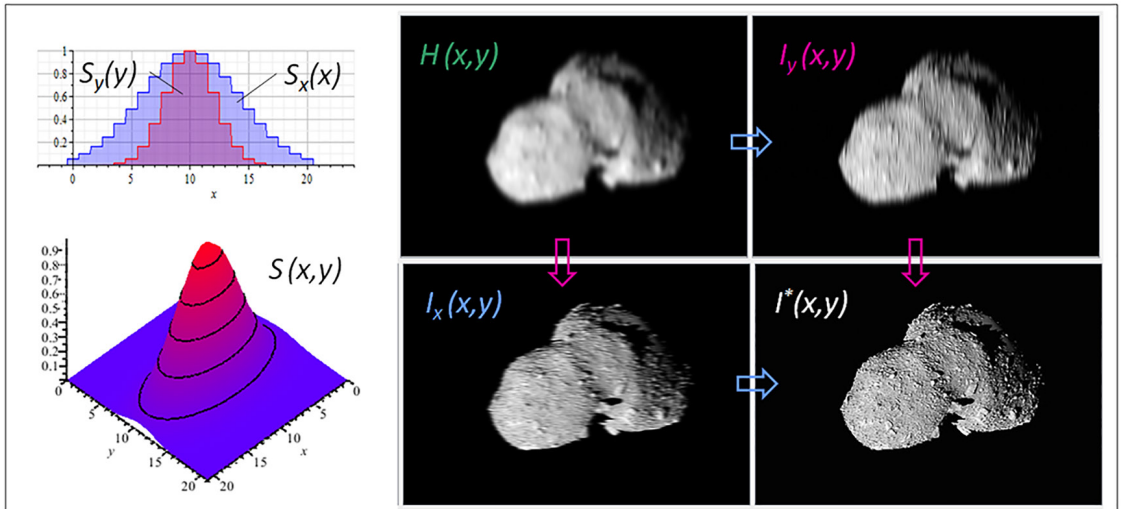


Рисунок 9. Восстановление двумерного изображения  $I(x,y)$  из размытого по Гауссу изображения  $H(x,y)$  методом комбинированных сдвигов

На Рисунке 9 представлен пример восстановления размытого изображения при функции наложения в виде двумерной функции Гаусса, которая допускает разделение переменных:

$$S(x, y) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right] = \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right) \exp \left( -\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right).$$

Стрелками показаны два возможных пути восстановления изображения  $I(x,y)$  из исходного размытого  $H(x,y)$  — через реконструкцию размытых по  $x$  или по  $y$  изображений  $I_x(x,y)$  и  $I_y(x,y)$ , соответственно. Ошибка реконструкции  $err = I^*(x,y) - I(x,y)$  не превысила 1.5 %, а разница между изображениями, восстановленными разными путями  $err = I_{xy}^*(x,y) - I_{yx}^*(x,y)$  составила  $2 \cdot 10^{-4} \%$ .

Функция Гаусса имеет важное практическое значение при восстановлении изображений, поскольку описывает случайные отклонения регистрируемых объектов или регистрирующей аппаратуры от начального зафиксированного положения.

## Заключение

Предлагаемые математические методы реконструкции позволяют путём обработки экспериментальных данных устранить искажения в них, вызванные наложениями из-за различных нестабильностей работы оборудования, и оптимизировать измерения, что означает возможность повышения разрешающей способности измерительной аппаратуры вплоть до физических ограничений и является альтернативой техническим методам, сопряжённым с трудноразрешимыми научно-техническими проблемами и требующим больших материальных затрат.

Универсального метода решения задачи реконструкции экспериментальных данных, наложенных друг на друга, не существует. Возможность реконструкции зависит от вида функции наложения, точности её определения, от размера экспериментальных данных, уровня помех в них и многих других причин, что требует разработки различных методов эффективных в том или ином случае. Методы пошаговых и комбинированных сдвигов взаимно дополняют друг друга.

Важным достоинством методов является возможность восстановления многомерных данных, в частности, смазанных при параллельном смещении или размытых по Гауссу изображений или объектов в них.

Благодаря простоте и эффективности предлагаемые методы могут применяться в различных областях, при обработке данных в экспериментальной физике, в области цифровой обработки сигналов и изображений, при разработке методов деконволюции в математике.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М: Наука, 1970.
- [2] Новиков-Бородин А.В. Реконструкция экспериментальных данных время-пролётных спектрометров методом пошагового сдвига. Приборы и техника эксперимента, 2018, № 6. С. 17–24.
- [3] Рябов Ю.В., Грачев М.И., Каманин Д.В., Кузнецова Е.А., Кузнецов В.Л., Коптелов Э.А., Либанова О.Н., Литвин В.С., Матушко В.Н., Разин В.И., Садыков Р.А., Соболевский Н.М., Федченко В.А. Импульсный нейтронный источник на протонном пучке Московской мезонной фабрики. ФТТ, 2010. Т. 52. № 5. С. 957.
- [4] Аксенов В. Пульсирующий ядерный реактор ИБР-2М. Наука в России. 2011. №1. С.20–24.

