Выдвигающая организация: **Федеральное Государственное унитарное предприятие Государственный научный центр Российской Федерации "Институт Теоретической и Экспериментальной Физики"**

Название работы: **Природа явления Казимировского скейлинга статического потенциала в квантовой хромодинамике**

Соискатель: **Шевченко Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории 190 ИТЭФ**

Описание работы

Содержание

1 Введение

Парадигмой современной физики элементарных частиц является квантовая теория поля [1]. Спектр физических задач, решаемых теоретико-полевыми методами, весьма широк и также включает в себя ряд проблем физики твердого тела, фазовых переходов, астрофизики и многих других областей, даже таких экзотических, как динамика финансовых рынков и моделирование искусственного интеллекта. Центральным объектом изучения современной квантовой теории поля является вакуум. Структура вакуумного состояния и, в частности, его симметрии в значительной степени определяют физические свойства системы. Более того, в рамках эффективной теории поля правильный выбор вакуума является, по сути, основной нетривиальной задачей, поскольку характер возбуждений над вакуумом и взаимодействия между ними, как правило, диктуются разрешенными симметриями.

Типичная теория классического поля определяется заданием многообразия M, удовлетворяющего определенным условиям гладкости, набора функций - полей $\phi_i(x)$, где $x \in M$, имеющих заданные трансформационные свойства по отношению к преобразованиям группы Лоренца и, возможно, по отношению к каким-либо группам внутренних симметрий, а также функционала действия $S[\phi]$, имеющего вид $S[\phi] = \int_M d^4x \; L(\phi(x))$ (см., например, [2]). Построение соответствующей квантовой теории возможно различными способами. Например, в формализме континуального интеграла статистическая сумма квантовой теории поля имеет вид:

$$Z = \int \mathcal{D}\mu(\phi) \exp(-S[\phi]) \tag{1}$$

где мера интегрирования $\mathcal{D}\mu(\phi)$ требует дополнительного определения. Вопросы математически корректной трактовки интегралов типа (1) являются глубоко нетривиальными. В дальнейшем нас будут интересовать только теории на $\mathbf{R}^4$ или $\mathbf{R}^3_1$, и мы всегда будем предполагать, что существует конструктивный способ вычисления средних типа (1). Наиболее популярным способом работы с данной квантовой теорией поля (и, соответственно, наиболее распространенным методом вычисления интегралов вида (1)) является теория возмущений. Последняя состоит в разбиении действия на несколько слагаемых $S[\phi] \to S_0[\phi] + gS_{int}[\phi]$, причем статистическая сумма Z, отвечающая "свободному"действию $S_0[\phi]$, может быть корректно определена и, более того, точно вычислена. Амплитуды и функции Грина представляются затем в виде (формальных) рядов по g (в физически интересных теориях в $D = 4$ параметром разложения является $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{g^2}{4\pi^2}$, что существенно улучшает применимость теории возмущений, например, в электродинамике, где безразмерный заряд электрона, вообще говоря, сам по себе не мал: $g = e \sim 0.3$, в то время как $\frac{\alpha}{\pi} \sim 0.002$). Как правило, эти ряды сходятся асимптотически (то есть, расходятся) и теоретико-возмущенческий подход перестает работать в области больших констант связи.

Универсальным методом вычисления Z и производных величин вне рамок теории возмущений в настоящее время является аппроксимация континуального интеграла по полям конечным произведением обыкновенных интегралов путем рассмотрения теорий на пространственно-временной решетке [3]. Не вдаваясь в детальное обсуждение решеточных теорий отметим, что в ряде случаев решеточные расчеты являются, к сожалению, единственным источником информации о поведении теории в области сильной связи.

Среди различных квантовых теорий поля важнейшую роль играют теории абелевых и неабелевых калибровочных полей, в частности, квантовая электродинамика (КЭД) и квантовая хромодинамика (КХД) (см. [4] и монографии [5]). Весьма существенным здесь является вопрос о том, какие конфигурации полей учитываются в сумме (1). Исходя из физических соображений разумно потребовать, чтобы все полевые конфигурации, которые никакими экспериментами не могут быть идентифицированы, как различные (и, в частности, имеющие одно и то же действие), давали бы вклад в интеграл (1) каким-нибудь одним своим представителем. В том случае, если действие обладает инвариантностью относительно преобразований калибровочной группы, интегрирование ведется по калибровочно неэквивалентным полевым конфигурациям. Следует подчеркнуть, что подобное ограничение не является внутренним требованием теории. В частности, в абелевой калибровочной теории наличие малой массы векторного бозона (фотона) разрушило бы калибровочную инвариантность и привело бы к другому определению меры. Также возможность производить сингулярные калибровочные преобразования и учитываемые этим монопольные и струнные степени свободы теории должна быть подтверждена или отвергнута экспериментом (в случае КЭД, на сегодняшний день магнитные монополи не обнаружены, хотя, с другой стороны, квантование электрического заряда является надежно установленным фактом [1]). Кроме того, для одной и той же теории мера, выраженная в одних переменных, может включать только гладкие конфигурации, и, напротив, быть сингулярной в других переменных.[1] Таким образом, в функциональном подходе наряду с заданием действия теории необходимо установить вакуум, над которым будет развиваться динамика и выбрать меру интегрирования в производящем функционале (последнее весьма важно в решеточных теориях поля, поскольку именно баланс энтропии и энергии, т.е. в обсуждаемом случае меры и действия определяет непрерывный предел теории).

На любом из перечисленных шагов теория возмущений может оказаться неприменимой. Следует сразу подчеркнуть, что в настоящий момент не существует какой-либо универсальной вычислительной схемы, которая позволяла бы проводить вычисления всех непертурбативных, т.е. лежащих вне рамок теории возмущений величин в любой данной теории поля с контролируемой в рамках самого метода точностью (что фактически означало бы точное решение теории). Оказывается, однако, что многие проявления непертурбативной физики могут быть извлечены из весьма общих представлений о вакуумных свойствах теории, даже при отсутствии (возможно, недостижимого в принципе) детального микроскопического понимания происхождения этих свойств. Так, в насто-

[1] Подобная ситуация имеет место, например, при абелевом проецировании неабелевых теорий с конфайнментом.

ящей работе на основе строгого теоретико-полевого формализма выясняется вопрос о специфических непертурбативных особенностях вакуума КХД, проявляющихся в наблюдаемом явлении т.н. Казимировского скейлинга статического потенциала. Работа организована следующим образом. В части 2 дается общее введение в предмет квантовой хромодинамики и дается введение в физику конфайнмента. В части 3 вводится язык калибровочно-инвариантных полевых корреляторов и обсуждаются основные свойства этих объектов. Центральная часть работы - часть 4 - посвящена анализу явления Казимировского скейлинга статического потенциала. Заключение содержится в части 5.

Оригинальная часть работы основана, главным образом, на четырех публикациях - это статьи [6], [7], [8] и [9] в списке литературы.

2 Физика сильных взаимодействий и явление кон-файнмента

2.1 Квантовая хромодинамика

В настоящее время практически не осталось сомнений в том, что квантова[я] хромодинамика (КХД) является адекватной теорией, описывающей сильны[е] взаимодействия, и любой подход в этой области должен соотноситься и базиро-ваться на КХД [1, 4].

Всюду в дальнейшем мы работаем в Евклидовой метрике, подразумевая что по окончании вычислений должен быть произведен виковский поворот [к] метрике Минковского. Фундаментальный лагранжиан теории формулируется [в] терминах векторных глюонных и спинорных кварковых полей и имеет вид:

$$L_{QCD} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\sum_f \bar{\psi}_f\left(\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi_f\right) - \sum_f m_f\bar{\psi}_f\psi_f \qquad (2$$

где индекс f обозначает ароматовые степени свободы, g – константа связи[,] m_f есть токовая масса фермиона и векторное калибровочное поле $A_\mu(x) =$ $A^a_\mu(x)t^a$, $a = 1..N^2-1$ является элементом алгебры Ли калибровочной группы[,] которая в КХД на основании различных экспериментальных данных отожде-ствляется с группой $SU(3)$. При калибровочных преобразованиях вектор-потен-циал изменяется как

$$A_\mu \to \omega^{-1}A_\mu\omega + \frac{i}{g}\omega^{-1}\partial_\mu\omega$$

где $\omega \in SU(3)$. Напряженность поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu A_\nu]$ преобразу-ется однородно $F_{\mu\nu} \to \omega^{-1}F_{\mu\nu}\omega$, а лагранжиан (2) калибровочно–инвариантен[.] Теория, задаваемая статистической суммой

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(-\int L_{QCD}\, d^4x\right) \qquad (3$$

обладает чрезвычайно богатыми свойствами как на классическом, так и на кван-товом уровне. В рамках теории возмущений наиболее примечательной особен-ностью (3) является свойство асимптотической свободы[2] [12], состоящее в том[,] что бегущая константа связи уменьшается с ростом переданного импульса. Со-ответствующее двухпетлевое выражение имеет вид:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)}\left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0{}^2}\frac{\ln\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right]}{\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)}\right] \qquad (4$$

где $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$. Формула (4) является решением уравнения

$$\mu\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi}\,\alpha_s{}^2 - \frac{\beta_1}{4\pi^2}\,\alpha_s{}^3 - \ldots \qquad (5$$

[2] обзор истории открытия асимптотической свободы дан в работе [11].

в двухпетлевом приближении, когда прочие коэффициенты β–функции положены равными нулю. Численно $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$, где n_f обозначает количество типов кварков с массами меньше или порядка μ и положительность β_0 обеспечивает свойство асимптотической свободы — теория возмущений применима при переданных ипульсах, много больших характерной величины Λ.

Теоретико-возмущенческий подход в неабелевых калибровочных теориях имеет ряд специфических черт [2, 5]. В настоящей работе проблема Грибова, проблема Ву-Янга и весь круг вопросов, связанных с глобальной фиксацией калибровки и общей структурой пространства орбит не обсуждается, см. в этой связи обзор [13].

Отметим, что существенным отличием теорий возмущений в абелевом и неабелевом случаях является то, что в последнем невозможно калибровочно-инвариантное выделение S_0, иными словами, не существует калибровочной теории свободных неабелевых полей, в то время как (некомпактная) абелева фотодинамика – вполне хорошо определенная теория. Это обстоятельство, разумеется, не является серьезным препятствием в рамках теории возмущений самой по себе, поскольку калибровочная инвариантность имеет место в каждом порядке ряда теории возмущений. Оно, однако, указывает, что понятие "свободного глюона"(как, например, асимптотического состояния) не имеет калибровочно-инвариантного смысла и, следовательно, может быть неадекватным для описания физики задачи в том или ином режиме.

Экспериментальные данные показывают [1], что кварки, глюоны и их связанные состояния, не являющиеся синглетами по цветовой группе $SU(3)$, действительно не наблюдаются как асимптотические состояния — $SU(3)$ теория Янга-Миллса (с достаточно малым числом легких кварков) демонстрирует явление конфайнмента цвета (см. обзор [18]). Проблема теоретической интерпретации конфайнмента занимает одно из центральных мест в современной физике и выходит за рамки теории сильных взаимодействий. Речь по сути идет об общих способах понимания и методах работы с квантовой теорией поля за пределами области применимости теории возмущений. Как уже отмечалось, не существует какого-либо универсального способа расчетов в непертурбативном режиме, в то же время, для каждой данной теории имеется свой набор эффективных непертурбативных подходов. Все многообразие различных непертурбативных методов можно (достаточно условно) разделить на такие, которые представляют собой разложения по каким-либо параметрам, которые *a priori* предполагаются малыми (как правило, не зависящим от величины константы связи); и такие, в которых подобные разложения не используются. К первой категории "квазипертурбативных"методов, применяемых для анализа КХД, можно отнести $1/N$ разложение [19], метод абелевых проекций и гипотезу абелевой доминантности [30, 20], эффективные киральные лагранжианы [21], правила сумм и операторное разложение [22], метод вакуумных корреляторов и гипотеза гауссовой доминантности [23], модель инстантонного вакуума (см. обзоры [24]), а также ряд других, альтернативных, подходов (см., например, [25]); а ко второй, в первую очередь – многочисленные точные результаты, полученные в двумерных, суперсимметричных и топологических моделях. Отметим такж привлекшую большое внимание в последнее время группу результатов, полу ченных в рамках т.н. AdS/CFT correspondence [14].

Необходимость развития непертурбативных методов заложена уже в выра жении (4). Физически значение $\alpha_s(\mu)$ на данном масштабе μ связано с величи ной Λ. Явление размерностной трансмутации, заключающееся в возникновени в квантовой теории поля, которая задается масштабно–инвариантным действи ем, размерного параметра играет огромную роль в КХД. В частности, вид (4 указывает на то, что при $\mu \sim \Lambda$ теория возмущений становится неприменн мой. Однако, непертурбативные поправки могут быть существенны и в област $\mu \gg \Lambda$. Кроме того, как будет обсуждаться далее, в КХД естественным образо существуют различные непертурбативные величины, характеризующие преде лы применимости теории возмущений. Их связь между собой и с параметро Λ в настоящее время в полной общности не установлена, в то же время не никаких сомнений в наличии таких связей.

2.2 Критерии и сценарии конфайнмента

В различных теориях поля понятию конфайнмента может приписываться раз личный смысл, и в этом разделе анализируются основные проявления конфай нмента, типичные для большинства калибровочных теорий. В наиболее общем случае, говорят, что теория находится в фазе конфайнмента, если спектр е асимптотических состояний обнаруживает определенную структуру, и, в част ности, в нем нет частиц, которые отвечают полям, присутствующим в фунда ментальном лагранжиане теории.[3] При этом конкретная динамическая реали зация может существенно различаться для разных теорий.

Одним из объектов, поведение которых сигнализирует о наличии в кали ровочной теории конфайнмента, является среднее от петли Вильсона, опреде ляемое как

$$\langle W(C)\rangle = \frac{1}{N_c}\left\langle \mathrm{Tr}\,\mathrm{P}\exp\left(ig\oint\limits_C A_\mu dz_\mu\right)\right\rangle \quad (6$$

Физически, величина (6) есть, с точностью до множителей, калибровочно– инва риантная функция Грина кварк– антикварковой пары, которая распространя ется по заданной траектории. В фазе конфайнмента имеет место *закон площад* :

$$\langle W(C)\rangle \sim \exp\left(-\sigma S\right) \quad (7$$

причем здесь S обозначает площадь минимальной поверхности, натянутой н контур C, а размерный параметр σ – струнное натяжение – совпадает с сило

[3] Один из недостатков этого определения состоит в том, что, например, при хиггсовско механизме фундаментальные поля также не являются асимптотическими состояниями, и, по этому, согласно этому определению, эффект Хиггса аналогичен конфайнменту. В некоторо смысле, это вопрос терминологии [26]. В теории Янга-Миллса различие может быть форма лизовано дополнительными требованиями на квантовые числа.

притяжения кварка и антикварка друг к другу и экспериментально составляет величину порядка 0.2 ГэВ^2, что есть около 15 тонн в единицах СИ. Результат (7) заменяется на *закон периметра* $\langle W(C)\rangle \sim \exp(-L/a)$ при отсутствии конфайнмента (здесь L – длина контура C, и a – ультрафиолетовое обрезание). Следует отметить, что последнее поведение может соответствовать как кулоновской фазе, так и фазе Хиггса, в которой калибровочный бозон массивен.

Закон площади ассоциируется с формированием струны, соединяющий кварк и антикварк.[4] Подобные "эффективные струны"являются физическими объектами, представляющими большой интерес как в квантовой теории поля, так и в физике конденсированных сред. Впервые объекты такого рода рассматривались в знаменитой статье [31]. Есть ряд оснований полагать, что динамика этих струн существенно отличается от поведения струн, рассматриваемых в теории (супер)струн (см. [72] и также ссылки в [27]). В дальнейшем мы обсудим некоторые аспекты струнной динамики в применении к КХД.

Одно из важнейших проявлений конфайнмента заключается в появлении массовой щели - генерации ненулевых масс белых состояний. Так, в рамках чистой глюодинамики (то есть в отсутствие кварков) легчайшим (и, следовательно, стабильным) возбуждением над вакуумом является глобол с квантовыми числами 0^{++}, масса которого M задает масштаб всех остальных масс теории. В частности, отношение $M/\sqrt{\sigma}$ является безразмерным числом, которое, в принципе, должно быть вычислено теоретически, исходя из (2). Весьма интересен вопрос о том, возможно ли описание эффекта возникновения конституентной массы в теориях с конфайнментом в терминах какого-либо эффективного механизма Хиггса. Несмотря на многолетние дискуссии, вопрос остается в настоящее время открытым.

2.3 Непертурбативный вакуум КХД

В то время как согласие теории с экспериментом в области применимости теории возмущений КХД достигает высокого уровня, в непертурбативном режиме, как уже подчеркивалось, необходимо привлечение различных модельных представлений, большинство из которых не следуют непосредственно из лагранжиана КХД. Сравнение предсказаний подобных моделей с экспериментом позволяет выбрать модели, удачно описывающие тот или иной класс явлений, так, например, конституентная кварковая модель хорошо объясняет адронный спектр (за исключением голдстоуновских частиц), партонная модель применима при больших переданных импульсах, инстантоны удобны для описания киральных эффектов и т.п. Однако, связь всех этих моделей друг с другом не всегда возможна даже на идейном уровне, не говоря уже о количественных соответствиях, и, более того, могут иметь место более серьезные противоречия, например, модель инстантонного газа не обеспечивает конфайнмент. В любом случае, представление о нетривиальном вакууме теории является важным и

[4] В случае частицы, состоящей из трех кварков - бариона, конфигурация струны, разумеется, более сложная.

в большинстве моделей неотъемлемым элементом микроскопической картины конфайнмента. Ранее речь шла о классификации непертурбативных подходов с точки зрения того, используется в них разложение по какому-либо парамет- ру или нет. Для феноменологических моделей вакуума КХД нам будет боле удобно иное подразделение, а именно, к первому классу моделей мы будем от- носить такие, в которых непертурбативный КХД вакуум представляется как суперпозиция некоторым образом скоррелированных полевых конфигураций. Это могут быть классические решения (инстантоны), топологические дефекты типа магнитных монополей или вортексов и т.п. К другому классу мы отнесем модели, которые не конкретизируют полевое содержание вакуума, а работают с вторичными, производными объектами - как правило, это корреляторы полей или соответствующие функции Грина. Например, в теории возмущений посл того, как в нашем распоряжении уже есть пропагаторы, мы можем забыть о том, что для их вычисления нам пришлось произвести в производящем функ ционале суммирование по плоским волнам. Аналогичным образом, для любой модели первого типа можно поставить вопрос о том, как выглядит соответ ствующий ей ансамбль квантовых корреляторов глюонных и кварковых полей $\langle\mathcal{O}[A_\mu, \bar{\psi}, \psi]\rangle$ вычисленных по полевым конфигурациям, которые считаются ди намически существенными в этой модели. Напротив, для моделей второго тип можно исследовать вопрос о том, какими полевыми конфигурациями насыща ются те или иные корреляторы. Ответ, разумеется, будет зависеть от конкрет ной модели. Можно сказать, что выяснение свойств корреляторов эквивалентн выяснению структуры вакуума.

Как уже отмечалось, важнейшим инструментом анализа непертурбативно го содержания КХД являются вычисления на решетках. Этот подход имее богатую историю (см., например, [3], а также материалы ежегодных конфе ренций Lattice на http://arXiv.org). Конфайнмент и другие непертурбативны эффекты уже много лет являются объектами детального изучения в подобны расчетах. Результаты таких симуляций могут сравниваться как с реальным "натурными"экспериментами, так и с теоретическими предсказаниями различ ных моделей. Последнее сравнение имеет большой самостоятельный интере Поскольку единственным динамическим агентом в решеточных расчетах явл ется сам лагранжиан КХД, подобное сравнение позволяет отделить модели, н противоречащие КХД (по крайней мере, в решеточной формулировке) от моде лей, где такие противоречия имеют место. Анализ такого типа будет проведе в части 4 работы.

3 Калибровочно-инвариантные характеристики вакуума КХД

Пертурбативная КХД оперирует с функциями Грина глюонных и кварковых полей вида $\langle \mathrm{Tr}(A_\mu(x)...A_\nu(y))\rangle$, $\langle\bar\psi(x)...\psi(y)\rangle$ в какой-то заранее выбранной калибровке. Однако применимость таких объектов за пределами пертурбативной области существенно ограничена ввиду их калибровочной неинвариантности (см. обсуждение в [15]).

Разумно попытаться найти какие-то калибровочно-инвариантные объекты, имеющие при этом относительно простую лоренцеву структуру, которые могут использоваться в качестве кандидатов на роль величин, характеризующих квантовый вакуум теории Янга-Миллса.

В работах [23] было предложено рассматривать в качестве таких величин неприводимые калибровочно-инвариантные корреляторы, или кумулянты следующего вида:

$$D^{(n)}_{\mu\nu,\rho\sigma,...,\alpha\beta} = \langle\langle \mathrm{Tr}(\Phi(x_0,x_1)F_{\mu\nu}(x_1)\Phi(x_1,x_0)\cdot\Phi(x_0,x_2)F_{\rho\sigma}(x_2)\Phi(x_2,x_0)\cdot ...$$

$$...\cdot\Phi(x_0,x_n)F_{\alpha\beta}(x_n)\Phi(x_n,x_0))\rangle\rangle \tag{8}$$

где фазовые факторы $\Phi(x,y)$ определены согласно

$$\Phi(x,y) = \mathrm{P}\exp\left(-ig\int\limits_x^y A_\mu(z)dz_\mu\right) =$$

$$\stackrel{def}{=} 1 - ig\int\limits_x^y A_\mu(z)dz_\mu + (-ig)^2\int\limits_x^y dz_\mu\int\limits_x^z dt_\nu A_\nu(t)A_\mu(z) + ... \tag{9}$$

Отметим, что кроме очевидной зависимости от положения точек x_i, $i = 0..n$ коррелятор (8) зависит от формы контуров, вдоль которых ведется интегрирование в (9). Это обстоятельство является серьезным (но неизбежным) техническим усложнением, возникающим в неабелевой теории при рассмотрении калибровочно-инвариантных нелокальных операторов.

Средние в (8) понимаются в смысле

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A\ \exp\left(-S_{QCD}\right)\ Q \tag{10}$$

а приводимые средние как

$$\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)F_{\mu_2\nu_2}(x_2)\rangle = \langle\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)F_{\mu_2\nu_2}(x_2)\rangle\rangle + \langle F_{\mu_1}(x_1)\rangle\langle F_{\mu_2\nu_2}(x_2)\rangle \tag{11}$$

$$\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)F_{\mu_2\nu_2}(x_2)F_{\mu_3\nu_3}(x_3)\rangle = \langle\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)F_{\mu_2\nu_2}(x_2)F_{\mu_3\nu_3}(x_3)\rangle\rangle +$$
$$+\langle\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)F_{\mu_2\nu_2}(x_2)\rangle\rangle\langle F_{\mu_3\nu_3}(x_3)\rangle + \langle\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)F_{\mu_3\nu_3}(x_3)\rangle\rangle\langle F_{\mu_2\nu_2}(x_2)\rangle +$$
$$+\langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)\rangle\langle\langle F_{\mu_2\nu_2}(x_2)F_{\mu_3\nu_3}(x_3)\rangle\rangle + \langle F_{\mu_1\nu_1}(x_1)\rangle\langle F_{\mu_2\nu_2}(x_2)\rangle\langle F_{\mu_3\nu_3}(x_3)\rangle, \tag{12}$$

и аналогично для высших корреляторов. Вопросы обоснования и операционно определения средних в смысле (10) вне рамок теории возмущений в настояще работе не обсуждаются, они предполагаются существующими в смысле, анало гичном тому, который придается правой части (10) в решеточных теориях поля см. общую дискуссию в [3].

В последующей серии работ (см. обзор [15] и цитированную в нем литера туру) было показано, что многие амплитуды в КХД могут быть вычислены терминах некоторых интегральных средних от величин (8). В частности, сред нее по вакууму от петли Вильсона имеет вид [23]:

$$\langle W_D(C)\rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_D \, \mathrm{P} \exp\left(i \int\limits_C A^a_\mu T^a dz_\mu\right) \right\rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_D \, \mathcal{P} \exp\left(i \int\limits_S F^a(u, x_0) T^a d\sigma(u)\right)\right.$$

$$= \mathrm{Tr}_D \mathcal{P}_x \, \exp \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_S i^n \, \langle\langle F(u^{(1)}, x_0)..F(u^{(n)}, x_0)\rangle\rangle d\sigma(u^{(1)})...d\sigma(u^{(n)}) =$$

$$= \exp \sum_{n=2}^{\infty} i^n \, \Delta^{(n)}_D[S] \qquad (13)$$

где интегрирование ведется по некоторой поверхности $S\,:\, \partial S = C$, и такж обозначено

$$F_{\mu\nu}(u, x_0) = \Phi(x_0, u) F_{\mu\nu}(u) \Phi(u, x_0) \qquad (14)$$

Смысл индекса D будет прояснен ниже. При выводе (13) была использова неабелева теорема Стокса [74]. Отметим, что при использовании так называем обобщенной контурной калибровки [75] фазовые факторы

$$\Phi(x_0, u^{(k)}) = P \exp\left[i \int\limits_{x_0}^{u^{(k)}} A_\mu(z) dz_\mu\right] \qquad (15)$$

могут быть выбраны тождественно равными единице.

Для данной теории поля корреляторы, определенные посредством (8), (1 могут изучаться вне связи с петлей Вильсона как калибровочно-инвариантн объекты, представляющие самостоятельный интерес. В то же время, кластерн разложение петли Вильсона предполагает наличие всего ансамбля корреля ров (как это имеет место в (13)). Как будет подробно обсуждаться в дальне шем, особое значение имеет низший нетривиальный, билокальный, или гаусс кумулянт:

$$\Delta^{(2)}_D[S] = \frac{1}{2} \int\limits_S d\sigma_{\mu\nu}(z_1) \int\limits_S d\sigma_{\rho\sigma}(z_2) D^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}(z_1, z_2, x_0) \qquad (16)$$

где

$$D^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y, x_0) = \langle\langle \mathrm{Tr}_D F_{\mu\nu}(x, x_0) F_{\rho\sigma}(y, x_0)\rangle\rangle \qquad (17)$$

По построению гауссов коррелятор зависит не только от положения точек и y, но и, как уже отмечалось, от выбора контуров в определении (14). Д старших членов необходимо правильно учесть упорядочение, см. например, [9], где проводятся явные вычисления для четырехточечного коррелятора.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу о распространении бесспиновой частицы массы m, несущей фундаментальный заряд по цвету ("кварка"), в поле бесконечно тяжелого "антикварка" (см. обзор [15] и цитированную там литературу). Соответствующая калибровочно-инвариантная функция Грина имеет вид

$$\mathcal{G}(x,y) = \langle \phi^\dagger(x)\Phi(x;y)\phi(y)\rangle \tag{18}$$

где мы обозначили поле кварка $\phi(x)$. Можно показать, что $\mathcal{G}(x,y)$ в представлении Фока-Фейнмана-Швингера записывается в виде

$$\mathcal{G}(x,y) = \int\limits_0^\infty ds \int\limits_{z_\mu(0)=x_\mu}^{z_\mu(s)=y_\mu} \mathcal{D}z_\mu \exp\left(-m^2 s - \frac{1}{4}\int\limits_0^s d\tau \left(\frac{dz_\mu(\tau)}{d\tau}\right)^2\right) \cdot \langle \mathrm{Tr} W(C)\rangle \tag{19}$$

где замкнутый контур C формируется траекторией "кварка" $z_\mu(\tau)$, и траекторией "антикварка", которая представляет собой прямую линию, соединяющую точки x и y. Подчеркнем, что бесспиновый случай рассмотрен нами здесь в качестве примера исключительно ввиду его наглядности, для реальных задач о динамике спинорных кварков разработан последовательный формализм включения спиновых эффектов. Аналогичным образом может быть рассмотрена задача о двухчастичном мезонном или трехчастичном барионном состоянии. Во всех случаях функция Грина, содержащая, в принципе, полную информацию о волновых функциях и спектре системы, записыватся в терминах интегралов по траекториям от петель Вильсона, которые, в свою очередь, выражаются через корреляторы посредством (13). Таким образом, набор корреляторов $D^{(n)}$ содержит в себе богатую, и, что еще более важно, универсальную динамическую информацию, необходимую для расчетов различных непертурбативных эффектов. Заранее отметим, что сам коррелятор (17) тесно связан с функцией Грина глюонного возбуждения в поле источника, заряженного по присоединенному представлению калибровочной группы - глюлампа [16].

При переходе к практической стороне дела немедленно возникает вопрос - как в действительности ведут себя корреляторы (8) как функции своих аргументов и откуда можно получить информацию об их поведении? Разумеется, в теории возмущений проблема решается просто - величина $D^{(n)}$ дается своим для каждого n рядом теории возмущений, члены которого вычисляются по стандартным правилам, см., например, [39, 10]. Вне рамок теории возмущений существуют несколько возможных путей получения такой информации. Первый способ состоит в нахождении непертурбативных решений цепочки уравнений типа уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона, которые связывают корреляторы разных порядков, однако к настоящему времени на этом пути не было достигнуто существенного прогресса. Другой, аналитический путь позволяет вычислять корреляторы в терминах функций Грина связянных состояний глюонов в поле статического источника - глюлампов [56]. Третий, и наиболее успешный на сегодняшний день путь заключается в использовани данных численных симуляций теории на решетке. В этом направлении в ре шеточных расчетах накоплен ряд результатов [34], которые мы кратко обсудим ниже. Однако, вполне очевидно, что апелляция к численным расчетам каких-т конкретных (например, низшего) корреляторов бессмысленна, если неизвестн общие свойства всего ансамбля корреляторов. Для их обсуждения мы вернемс к соотношению (13).

Как уже отмечалось, ценой, которую мы заплатили за явную калибровоч ную инвариантность (13) является зависимость корреляторов (8), (17) от фор мы контуров, фигурирующих в фазовых факторах $\Phi(x;y)$, которые, вообщ говоря, произвольны, точнее, могут быть произвольно выбраны в достаточн широком классе. Как следствие, величины $\Delta^{(n)}[S]$ в (13) явно зависят от вы бранного профиля поверхности интегрирования, в то время как $W(C)$ от S очевидно, не зависит. Можно показать, что здесь нет противоречия, и явна зависимость от S, присутствующая в каждом члене $\Delta^{(n)}[S]$, сокращается в пол ной сумме, и в этом смысле выбор поверхности интегрирования S в теорем Стокса (соответствующий выбору формы контуров в корреляторах $D^{(n)}$) дей ствительно произволен, как и должно быть. Можно, однако, поставить вопро иначе: допустим, в задаче имеется какая-то физически выделенная поверхност какова в этом случае иерархия кумулянтов $\Delta^{(n)}[S]$ на этой конкретной повер ности? Подобный вопрос имеет общий интерес, но также и практический смысл в ряде конкретных задач можно легко указать физически выделенную повер ность. Например, для одной вильсоновской петли таковой является поверхност минимальной площади, ограниченная контуром. В более сложном примере вз имодействующих петель [17] можно рассматривать поверхность, соответству щую минимальной полной энергии системы. В любом случае, различают д ситуации:

$$\left|\Delta^{(2)}[S]\right| \gg \left|\sum_{n=3}^{\infty} \Delta^{(n)}[S]\right| \qquad (20)$$

и тогда ансамбль корреляторов (и сам вакуум теории) называется *стохасти ческим*; ситуация же, когда соотношение (20) не выполняется (например, в кумулянты одного порядка), соответствует ансамблю, называемому *когерент ным*.

Большой интерес представляет вопрос о том, является вакуум глюодинам ки и КХД стохастическим или когерентным? Наиболее прямым способом о ветить на него было бы вычисление корреляторов для различных n наприме на решетке, и сравнение результатов с критерием (20). К сожалению, на совр менном этапе развития технологии решеточных расчетов эта задача являет весьма сложной и практически все полученые на решетке результаты относя ся только к поведению гауссовского коррелятора. Ниже будет показано, ч поведение статического потенциала для высших представлений калибровочн группы доставляет уникальную возможность выяснить структуру ряда (13), тем самым, в некотором смысле, структуру непертурбативного вакуума КХД

3.1 Соотношения между корреляторами

Введенные выше полевые корреляторы не являются независимыми. Ограничения, налагаемые на них тождествами Бьянки, приводят к связи низших корреляторов с высшими. В настоящем разделе мы обсуждаем некоторые важные физические следствия этого обстоятельства.

В работе [37] исследовалась связь между билокальным и трилокальным корреляторами. В работе [6] анализ был продолжен, и в рассмотрение были включены также корреляторы, зависящие от четырех точек пространства–времени — квартичные.

В том случае, когда двухточечный коррелятор рассматривается в линейной геометрии, употребительна следующая параметризация [23]:

$$\langle F_{\mu\nu}(x)\Phi(x,y)F_{\rho\sigma}(y)\Phi(y,x)\rangle = (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})D(z)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z_\mu}(\delta_{\nu\sigma}z_\rho - \delta_{\nu\rho}z_\sigma) - \frac{\partial}{\partial z_\nu}(\delta_{\mu\sigma}z_\rho - \delta_{\mu\rho}z_\sigma)\right] D_1(z) \tag{21}$$

В формуле (21) подразумевается, что фазовые факторы соединяют точки x и y по прямой линии и коррелятор зависит, таким образом, лишь от $z^2 = (y-x)^2$.

В случае, когда билокальный коррелятор является производной величиной свободного массивного пропагатора, функции D и D_1 имеют вид:

$$D(z) = 0 \quad ; \quad D_1(z) = \frac{m^2}{2\pi^2}\frac{K_2(mz)}{z^2} \tag{22}$$

где $K_2(z)$ есть функция МакДональда. Укажем также соотношения между D и D_1 и функциями $\tilde{D}$ и $\tilde{D}_1$, отвечающими коррелятору дуальных напряженностей $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{D}(z) = D(z) + 2D_1(z) + z^2\frac{dD_1(z)}{dz^2} \quad ; \quad \tilde{D}_1(z) = -D_1(z) \tag{23}$$

В общем случае структура функций $D(z)$ и $D_1(z)$ может быть прояснена, если записать их как:

$$D(z) = D^{pert}(z) + D^{np}(z) + D^{mix}(z) \tag{24}$$

и аналогично для $D_1(z)$. Часть $D^{pert}(z) \to \infty$ при $z^2 \to 0$ и физически отвечает обменам пертурбативными глюонами. Первые члены разложения $D^{pert}(z)$ (а также и $D_1^{pert}(z)$) в ряд теории возмущений можно найти в [10, 39]. Отметим, что одноглюонный обмен не вносит вклада в $D^{pert}(z)$.

В теориях с нетривиальным вакуумом, как, например, в КХД, имеется часть коррелятора, $D^{np}(z)$, не описываемая теорией возмущений. Стандартной процедурой является нормировка регулярной при $z = 0$ непертурбативной части функций $D(z)$, $D_1(z)$ на глюонный конденсат

$$\mathrm{Tr}D^{(2)}_{\mu\nu,\mu\nu}(0) = \langle \mathrm{Tr}(F^a_{\mu\nu}\,F^a_{\mu\nu})\rangle = 12\,(\,D^{np}(0) + D_1^{np}(0)\,) \tag{25}$$

Вопрос о физической природе смешанных членов D^{mix}, D_1^{mix} более сложе и в настоящее время является открытым. Он тесно связан с вопросом о конде сате размерности два в КХД, и в настоящей работе нами не обсуждается (см в этой связи [29]).

Удобно работать с таким набором корреляторов, в котором фазовые фак торы Ф соединяют соседние точки по траекториям, принадлежащим данном фиксированному классу траекторий. Поскольку для 2–точечного коррелятор очевидна выделенность прямолинейных траекторий, наиболее естественным яв ляется именно такой выбор, которого мы будем придерживаться в этой част работы и для высших корреляторов.

Благодаря неабелевой природе рассматриваемых полей $F_{\mu\nu}$, производная о коррелятора по аргументу z_σ отлична от коррелятора $D_\sigma F_{\mu\nu}(z)$ с остальны полями. Как будет видно, эта разница является главным пунктом, обеспечи вающим нетривиальное поведение непертурбативных частей корреляторов ка функций своих аргументов.

Факторы переноса в неабелевом случае дифференцируются по правилу (см например, [32]):

$$\frac{\partial \Phi(z,z')}{\partial z'_\gamma} = i\Phi(z,z')A_\gamma(z') + i(z'-z)_\rho \tilde{I}_{\rho\gamma}(z,z') \tag{26}$$

где обозначено

$$\tilde{I}_{\rho\gamma}(z,z') = \int_0^1 d\alpha\, \alpha\, \Phi(z, z+\alpha(z'-z))F_{\rho\gamma}(z+\alpha(z'-z))\cdot$$
$$\cdot\Phi(z+\alpha(z'-z), z') \tag{27}$$

Аналогично

$$\frac{\partial \Phi(z,z')}{\partial z_\gamma} = -iA_\gamma(z)\Phi(z,z') + i(z'-z)_\rho I_{\rho\gamma}(z,z') \tag{28}$$

$$I_{\rho\gamma}(z,z') = \int_0^1 d\alpha \cdot \alpha\Phi(z, z'+\alpha(z-z'))F_{\rho\gamma}(z'+\alpha(z-z'))\cdot$$
$$\cdot\Phi(z'+\alpha(z-z'), z') \tag{29}$$

В дальнейшем мы часто для упрощения записи будем опускать аргументы фазовых факторов. Используя определение (26), рассмотрим производную 2-точечного коррелятора, определенного формулой (21):

$$\frac{\partial}{\partial z_{2\xi}} D^{(2)}_{\mu_1\nu_1;\mu_2\nu_2} = \langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}(z_1)\Phi D_\xi F_{\mu_2\nu_2}(z_2)\Phi)\rangle +$$
$$+ i(z_2-z_1)_\sigma \Big(\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}(z_1)\tilde{I}_{\sigma\xi}(z_1,z_2)F_{\mu_2\nu_2}(z_2)\Phi(z_2,z_1))\rangle -$$
$$- \langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}(z_1)\Phi(z_1,z_2)F_{\mu_2\nu_2}(z_2)I_{\sigma\xi}(z_2,z_1))\rangle \Big) \tag{30}$$

Для левой части этого равенства прямым дифференцированием легко получить:

$$\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\rho}\frac{\partial}{\partial z_{2\xi}}D^{(2)}_{\mu_1\nu_1;\mu_2\nu_2} = 4\,\varepsilon_{\mu_1\nu_1\xi\rho}\,\frac{dD(z)}{dz^2}\,z_\xi \tag{31}$$

Таким образом, производная от билокального коррелятора связана с корреляторами следующего, 3-го порядка линейным соотношением:

$$\varepsilon_{\mu_1\nu_1\sigma\rho}\frac{dD(z)}{dz^2} = \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\rho}\Big(\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}(z_1)\tilde{I}_{\sigma\xi}(z_1,z_2)F_{\mu_2\nu_2}(z_2)\Phi(z_2,z_1))\rangle -$$

$$-\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}(z_1)\Phi(z_1,z_2)F_{\mu_2\nu_2}(z_2)I_{\sigma\xi}(z_2,z_1)\rangle\Big) \tag{32}$$

Здесь было принято во внимание тождество Бьянки $\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\rho}D_\xi F_{\mu_2\nu_2}(z) = 0$ и обозначено $z_2 - z_1 = z$.

Данное выражение является вполне общим и справедливо как для пертурбативных, так и для непертурбативных компонент фигурирующих в нем корреляторов. В настоящей работе мы сосредоточим свое внимание на последних, характеризующихся, как уже говорилось, регулярным поведением в нуле.

В пределе $z \to 0$ соотношение (32) можно упростить, учитывая, что при $z_1 \to z_2$ будет $\tilde{I}_{\sigma\xi}(z_1,z_1) = I_{\sigma\xi}(z_1,z_1) = \frac{1}{2}F_{\sigma\xi}(z_1)$. Тогда, сворачивая по всем свободным индексам, получим:

$$\left.\frac{dD(z)}{dz^2}\right|_{z=0} = \frac{f^{abc}}{96}\langle F^a_{\mu_1\nu_1}F^b_{\nu_1\nu_2}F^c_{\nu_2\mu_1}\rangle. \tag{33}$$

Остановимся на вопросе о том, какими тензорными структурами насыщается среднее в правой части (33). Для 3–точечного коррелятора имеются две независимые кронекеровские структуры, а именно:

$$D^{(3)}_{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3} = -i\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}\Phi F_{\mu_2\nu_2}\Phi F_{\mu_3\nu_3}\Phi)\rangle =$$

$$= \frac{1}{6}\,\varepsilon_{\mu_1\nu_1ab}\varepsilon_{\mu_2\nu_2bc}\varepsilon_{\mu_3\nu_3ca}\cdot D_3 +$$

$$+\frac{1}{6}\Big(\varepsilon_{\mu_1\nu_1\nu_2a}\varepsilon_{\mu_3\nu_3\mu_2a} - \varepsilon_{\mu_1\nu_1\mu_2a}\varepsilon_{\mu_3\nu_3\nu_2a} + \text{перест.}\Big)\cdot D_2 + \tag{34}$$

где точками обозначены некронекеровские члены. Легко убедиться, что часть, пропорциональная функции D_3 не дает вклада в $\left.\frac{dD}{dz^2}\right|_0$, в то время как функция D_2 дает:

$$f^{abc}\langle F^a_{\mu_1\nu_1}F^b_{\nu_1\nu_2}F^c_{\nu_2\mu_1}\rangle = 48D_2(0). \tag{35}$$

то есть

$$\left.\frac{dD(z)}{dz^2}\right|_{z=0} = \frac{D_2(0)}{2} \tag{36}$$

Формула (36), имеет простую интерпретацию в терминах дуального эффекта Мейснера. Вводя трехмерные обозначения для компонент хромоэлектрического и хромомагнитного поля $F^a_{0\alpha} = E^a_\alpha$; $F^a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} H^a_\gamma$, левую часть (35) можно переписать в виде:

$$f^{abc}\langle F^a_{\mu_1\nu_1} F^b_{\nu_1\mu_2} F^c_{\nu_2\mu_1}\rangle = f^{abc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(3\langle E^a_\alpha E^b_\beta H^c_\gamma\rangle + \langle H^a_\alpha H^b_\beta H^c_\gamma\rangle) \quad (37)$$

Отличие от нуля средних с нечетным числом операторов магнитного поля следует ассоциировать с возможностью создания в таком вакууме спонтанных магнитных потоков за счет расщепления электрических или магнитных силовых линий, возникновение же таких (некоррелированных на больших растояниях) потоков является главным обстоятельством, делающим возможным конфайнмент в стохастическом вакууме КХД. Отметим здесь также, что цветовая структура тройного конденсата определяется только антисимметричными константами f^{abc}, действительно, из (37) легко получить, что симметричный по цвету вклад отсутствует:

$$d^{abc}\langle F^a_{\mu_1\nu_1} F^b_{\mu_2\nu_2} F^c_{\mu_3\nu_3}\rangle = 0$$

то есть

$$\langle F^a_{\mu_1\nu_1} F^b_{\mu_2\nu_2} F^c_{\mu_3\nu_3}\rangle = \frac{f^{abc}}{6} D^{(3)}_{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}(0)$$

Вернемся вновь к уравнению (32). Несложными преобразованиями оно может быть переписано в эквивалентном виде:

$$z^2 \frac{dD(z)}{dz^2} = \frac{1}{2} \int_0^z t dt \left(D_2(z-t,t) + D_2(-t,t-z) \right) \quad (38)$$

Допустим, что можно параметризовать функции D и D_2 следующим образом, учитывающим их циклическую симметрию:

$$D(z) = D(0)\, h(z) h(-z); \;\; D_2(z-t,t) = D_2(0)\, h_2(z-t) h_2(t) h_2(-z)$$

Тогда, как нетрудно проверить, уравнению (32) будут удовлетворять также решения более простого уравнения:

$$h(-z) \frac{dh(z)}{dz} = -\frac{a^2}{4} h_2(-z) \int_0^z dt\, h_2(t) \cdot h_2(z-t) \quad (39)$$

где $a^2 = -\frac{2\,D_2(0)}{D(0)}$. Простейшее предположение состоит в том, что $h(z) = h_2(z)$ в всей области изменения аргумента. Тогда уравнение (39) может быть решено, регулярное в точке $z = 0$ решение имеет вид:

$$h(z) = 2\,\frac{J_1(az)}{az}$$

где $J_1(az)$ - функция Бесселя первого рода. Подобное поведение противоречит наблюдаемому на решетках, что указывает на то, что соотношение $h(z) = h_2(z)$ не имеет места в реальном вакууме глюодинамики. В то же время заметим, что такая зависимость $h(z)$ дает конечный ненулевой вклад от 2–точечного коррелятора в струнное натяжение σ:

$$\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} d^2z\, D(z) = \frac{\pi\,(D(0))^2}{D_2(0)}$$

Существенным здесь было предположение об отрицательности отношения $\frac{D_2(0)}{D(0)}$, т.е. о вещественности a, ненулевая мнимая часть у a привела бы к нефизическому росту корреляционных функций с расстоянием.

В то же время остается открытым вопрос о том, насколько совместима данная картина с представлением о вакуумном ансамбле КХД как о гауссовом. В гауссовой модели все корреляторы полей нечетного порядка, в том числе и $D^{(3)}$, предполагаются в первом приближении малыми, корреляторы же высших четных порядков факторизуются на произведения 2-точечных. В то же время из уравнения (32) ясно видно, что такая картина является, строго говоря, внутренне противоречивой для любой отличной от константы функции $D(z)$. Можно, с одной стороны, расширить определение гауссового ансамбля, постулировав факторизацию высших корреляторов на произведения двух- и трехточечных. При равенстве нулю низшего трехточечного коррелятора такой ансамбль совпадает с обычным гауссовым, поскольку это условие автоматически зануляет и все высшие корреляторы нечетного порядка, в противном случае мы имеем дело с новым ансамблем, который естественно назвать минимально расширенным гауссовым. Однако, с другой стороны, можно показать [6], что даже в предположении малости интегральных вкладов корреляторов нечетного порядка функция $D(z)$ является нетривиальной функцией своего аргумента. Чтобы рассмотреть ситуацию в этом случае, найдем вторую производную билокального коррелятора в нуле:

$$\frac{\partial^2 D^{(2)}}{\partial z_{2\xi}\partial z_{1_\rho}}\varepsilon_{\mu_1\nu_1\rho\eta}\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\gamma}\Big|_{z_1\to z_2} = \varepsilon_{\mu_1\nu_1\rho\eta}\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\gamma}\times$$
$$\times\Big[-\frac{i}{2}\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[F_{\rho\xi}F_{\mu_2\nu_2}])\rangle + \frac{i\,z_\sigma}{6}\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[D_\rho F_{\sigma\xi}F_{\mu_2\nu_2}])\rangle -$$
$$-\frac{z_\sigma z_\phi}{24}\Big(6\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}F_{\phi\rho}[F_{\sigma\xi}F_{\mu_2\nu_2}])\rangle + 6\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[F_{\mu_2\nu_2}F_{\sigma\xi}]F_{\phi\rho})\rangle +$$
$$+\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[F_{\sigma\xi}F_{\phi\rho}]F_{\mu_2\nu_2})\rangle + \langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}F_{\mu_2\nu_2}[F_{\phi\rho}F_{\sigma\xi}])\rangle\Big)\Big] \qquad (40)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 D^{(2)}(z)}{\partial z_{2\xi}\partial z_{1_\rho}}\varepsilon_{\mu_1\nu_1\rho\eta}\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\gamma} = 16\,\frac{d^2D(z)}{(dz^2)^2}\,(z_\gamma z_\eta - \delta_{\gamma\eta}z^2)\; - \;24\,\frac{dD}{dz^2}\,\delta_{\gamma\eta} \qquad (41)$$

получим:

$$-48D''|_0 = \lim_{z\to 0}\Big[\,\frac{iz_\sigma}{6z^2}\varepsilon_{\mu_1\nu_1\rho\eta}\varepsilon_{\mu_2\nu_2\xi\eta}\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[D_\rho F_{\sigma\xi}, F_{\mu_2\nu_2}])\rangle -$$

$$
-\frac{z_\sigma z_\phi}{24 z^2}\Big(6\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}F_{\phi\rho}[F_{\sigma\xi}F_{\mu_2\nu_2}])\rangle + 6\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[F_{\mu_2\nu_2}F_{\sigma\xi}]F_{\phi\rho})\rangle +
$$

$$
+\,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}[F_{\sigma\xi}F_{\phi\rho}]F_{\mu_2\nu_2})\rangle + \,\langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}F_{\mu_2\nu_2}[F_{\phi\rho}F_{\sigma\xi}])\rangle\Big)\Big] \qquad (42
$$

Первые два слагаемых правой части (42) в гауссовом вакууме исчезают, дл
анализа оставшихся введем 4-точечный коррелятор:

$$
D^{(4)} = \langle \mathrm{Tr}(F_{\mu_1\nu_1}\Phi F_{\mu_2\nu_2}\Phi F_{\mu_3\nu_3}\Phi F_{\mu_4\nu_4}\Phi)\rangle = D_4^{connect} +
$$

$$
+(\alpha_0\cdot\ \varepsilon_{\mu_1\nu_1ab}\,\varepsilon_{\mu_2\nu_2bc}\,\varepsilon_{\mu_3\nu_3cd}\,\varepsilon_{\mu_4\nu_4dc} + \alpha_1\cdot\ \varepsilon_{\mu_1\nu_1ab}\,\varepsilon_{\mu_3\nu_3ba}\,\varepsilon_{\mu_2\nu_2cd}\,\varepsilon_{\mu_4\nu_4dc} +
$$

$$
+\alpha_2\cdot\ \varepsilon_{\mu_1\mu_2ab}\,\varepsilon_{\mu_4\nu_4ba}\,\varepsilon_{\mu_2\nu_2cd}\,\varepsilon_{\mu_3\nu_3dc})\cdot D_4^{Gauss} + \ldots \qquad (4
$$

где точками опять обозначены некронекеровские члены, а неприводимая 4-
точечная функция $D_4^{connect}$ должна для гауссового ансамбля быть положена ра
ной нулю.

Используя определение (25) легко получить:

$$
\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{16}{3};\ \alpha_1 = -\frac{2}{3};\ D_4^{Gauss} = \left(\frac{D(0)+D_1(0)}{8}\right)^2 \qquad (4
$$

Несложные, хотя и довольно длинные вычисления, объединяющие все пред
дущие результаты, приводят к соотношению [6]:

$$
\left.\frac{d^2D(z)}{(dz^2)^2}\right|_{z=0} = \frac{7}{2}\left(\frac{D(0)+D_1(0)}{4}\right)^2 \qquad (4
$$

Таким образом, и в случае гауссового ансамбля (если малость $D_4^{connect}$ име
место по динамическим причинам), сам факт наличия непертурбативного ко
денсата полей:

$$
D(0) + D_1(0) \neq 0 \qquad (4
$$

автоматически приводит к появлению динамической зависимости от z у фун
ции $D(z)$, хотя и более мягкой, чем в случае (32).

Обратим внимание на то, что выше ничего не говорилось о пертурбативн
частях корреляторов и их влиянии на непертурбативные части, и, в частност
о функции D^{mix}. Этот важный вопрос, получивший недавно новое развити
лежит целиком вне рамок настоящей работы (см. [29]).

Установление вида зависимости $D(z)$ во всей области изменения аргумен
а также измерение высших корреляторов позволило бы путем проверки со
ношений (36) и (45) сделать независимый вывод о том, какой тип вакуума ре
лизуется в глюодинамике и каков статус приближения вакуума КХД гауссов
или минимально расширенным гауссовым ансамблем стохастических полей.
следующем разделе мы покажем, как данные по статическому потенциал
высших представлениях позволяют получить эту информацию независимым о
разом.

4 Статический потенциал в КХД как функция представления источников

4.1 Общий формализм

Приведем необходимые для дальнейшего математические определения. Среднее от петли Вильсона $W(C)$ для прямоугольного контура $C = R \times T$ (который мы выбираем лежащим в плоскости "34") для представления размерности D калибровочной группы $SU(3)$ имеет вид

$$\langle W_D(C) \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_D \, \mathrm{P} \exp \left(ig \int\limits_C A^a_\mu T^a dz_\mu \right) \right\rangle \tag{47}$$

Операция взятия следа Tr_D нормирована согласно $\mathrm{Tr}_D \hat{1} = \frac{1}{D} \mathrm{Tr} \hat{1} = 1$, а генераторы фундаментального представления нормированы как $\mathrm{Tr} T^a T^b = \delta^{ab}/2$. Представления $SU(3)$ размерности $D = 3, 8, 6, 15a, 10, 27, \ldots$ характеризуются $3^2 - 1 = 8$ эрмитовыми генераторами T^a, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$. Важнейшей характеристикой представления является собственное значение C_D квадратичного оператора Казимира $\mathcal{C}^{(2)}_D$, которое определяется как

$$\mathcal{C}^{(2)}_D = \delta_{ab} \, T^a T^b = T^a T^a = C_D \cdot \hat{1} \tag{48}$$

Наша нормировка соответствует $C_D = N$ для присоединенного представления $SU(N)$. Поскольку любая простая алгебра ранга k имеет в точночти k примитивных операторов Казимира [49, 50] порядка $m_1, .., m_k$, возможно выразить операторы высших порядков через низшие. В физически интересном случае группы $SU(3)$ примитивные операторы Казимира - это $\mathcal{C}^{(2)}_D$ и $\mathcal{C}^{(3)}_D = d_{abc} T^a T^b T^c$. Операторы более высокого ранга

$$\mathcal{C}^{(r)}_D = d^{(r)}_{(i_1..i_r)} T^{i_1} .. T^{i_r} \tag{49}$$

с полностью симметричными тензорами $d^{(r)}_{(i_1..i_r)}$ на группе $SU(N > 3)$ выражаются в терминах δ_{ik} и симметричных констант группы d_{ijk} (см., например, [48] и ссылки там). Следуя обозначениям [42] вводим отношение $d_D = C_D / C_F$, где фундаментальный Казимир $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ равен $4/3$ для $SU(3)$. Для представлений $SU(3)$, заданных координатами Дынкина (μ, ν) собственное значение $\mathcal{C}^{(2)}_D$ может быть вычислено как (см., например, [48]):

$$C_D(\mu, \nu) = \frac{1}{3} \left(\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 + 3\mu + 3\nu \right) \tag{50}$$

Статический потенциал между источниками, преобразующимися по представлению D и расположенными на расстоянии R дается соотношением

$$V_D(\mu, R) = - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(C) \rangle, \tag{51}$$

где μ обозначает характерный масштаб перенормировки. Левая часть (51) м жет быть представлена как сумма двух частей: R-зависящий потенциал и собс энергетическая часть, явным образом зависящая от ультрафиолетового обре ния μ

$$V_D^{phys}(R) = V_D(\mu, R) - V_D^{self}(\mu)$$ (5

где оба члена в правой части расходятся при $\mu \to \infty$, а $V_D^{phys}(R)$ имеет конечн предел. Таким образом, для данных, экстраполированных к непрерывному пр делу предполагается примененной соответствующая вычитательная процеду и в дальнейшем мы будем понимать под $V_D(R)$ только первую, потенциальн часть выражения (51), то есть $V_D^{phys}(R)$.

В фазе конфайнмента потенциал обычно параметризуется как сумма перту бативной кулоновской, удерживающей линейной и несущественной постоян части:

$$V_D(R) = \sigma_D R + v_D + \frac{\alpha_D}{R}$$ (

где все коэффициенты зависят от D. Кулоновский член известен до двух пет в непрерывном пределе [51], [52] и пропорционален C_D, а именно

$$V_D^{pert}(R) = -C_D\,\frac{\alpha_V(1/R^2)}{R}$$ (

где эффективная бегущая константа $\alpha_V(1/R^2)$ полиномиально зависит от log(Указанное обстоятельство нетривиально, однако можно привести аргумен что в трех петлях соотношение (54) нарушится.[5] Наибольший интерес пр ставляет поведение непертурбативной части (53).

В статье [45] была высказана центральная для нашей работы гипотеза, гласно которой полный потенциал пропорционален квадратичному операт Казимира C_D, т.е. имеет место соотношение $\sigma_D/\sigma_F = d_D$. В работе [38] эта потеза была названа гипотезой Казимировского скейлинга (КС).

Результаты измерений статического потенциала на решетках [42, 43, 44] ходятся в прекрасном согласии с гипотезой КС. Более ранние вычисления в целом также согласуются с [42], хотя имеется ряд тонкостей, обусловлен использовавшейся в той или иной работе техникой расчетов (см. [54], а также суждение и ссылки в [43]). Прежде всего, эти данные могут быть интерпрет ваны в терминах ограничений, налагаемых на примесь высших казимировс членов в потенциале [46, 7]. Именно, запишем мотивированное выражением (разложение для потенциала в виде

$$V_D(R) = d_D V^{(2)}(R) + d_D^2 V^{(4)}(R) + \ldots$$ (5

[5] Необходимо заметить, что, строго говоря понятие потенциала не является хорошо о деленным с точки зрения теории возмущений, если в рассмотрение включаются диагра достаточно высокого порядка (см., например, [51]). Мы, однако, игнорируем эту сложн ввиду того, что используемое нами определение потенциала (51) изначально непертурба но.

Таблица 1: Данные по КС статического потенциала [7]. Обработка исходных данных http://arXiv.org/abs/hep-lat/9908021. Параметры даны в безразмерных единицах, фактор пересчета $a_s^{-1} = 2.4$ ГэВ. Ошибки включают статистические и систематические.

D	$\sigma_D^{(4)} \cdot 10^4$	$\Delta\sigma_D^{(4)} \cdot 10^4$	$v_D^{(4)} \cdot 10^4$	$\Delta v_D^{(4)} \cdot 10^4$	$\left\|\sigma_D^{(4)}/\sigma_D^{(2)}\right\|$	χ^2/N
8	-3.5	1.2	-2.5	2.8	0.004	19 / 43
6	-6.4	1.2	1.0	2.6	0.007	26 / 42
15a	-5.2	0.6	-0.6	1.1	0.003	39 / 42
10	-5.0	0.5	0.2	1.0	0.003	22 / 41

где точки обозначают опущенные члены, содержащие более высокие степени отношения Казимиров d_D, а также высшие Казимиры (Казимир третьего порядка в случае $SU(3)$). В соответствии с гипотезой КС можно ожидать относительной малости $V^{(4)}(R)$ на фоне $V^{(2)}(R)$. Можно заметить при этом, что в разложении (55) вся зависимость от представления содержится только в коэффициентах, в то время как члены $V^{(n)}(R)$ являются D-независимыми. Подчеркнем также, что члены ряда (55) не находятся в одно-однозначном соответствии с членами ряда (13). Например, гауссовский член дает вклад только в $V^{(2)}(R)$, в то время как, например, квартичный коррелятор, вообще говоря, может вносить вклад как в $V^{(4)}(R)$, так и в $V^{(2)}(R)$. Мы будем подробно обсуждать это в конце части 4.

Параметризуя КС-нарушающий член $V^{(4)}(R)$ как $V^{(4)}(R) = v^{(4)} + \sigma^{(4)} R$, можно получить значения, представленные в Таблице 1.

Эти результаты наглядно показывают высокую точность, с которой выполняется КС, в частности отношение $|\sigma^{(4)}/\sigma^{(2)}|$ менее 1% во всех рассмотренных случаях. Мы не обнаруживаем также сильной систематической зависимости $\sigma_D^{(4)}$ от D, что свидетельствует о правомерности разложения типа (55). Заметим, что для извлечения данных по $V^{(4)}(R)$ нет необходимости специфицировать зависимость $V^{(2)}(R)$ от R, поскольку при любой координатной зависимости потенциал демонстрирует точный скейлинг, если в него вносит вклад только $V^{(2)}(R)$.

Аппроксимация данных к непрерывному пределу, произведенная в [43] в основном не изменила картины, представленной в Таблице 1. Отклонения отношения $V_D(R)/V_F(R)$ от d_D, представленные в [43], находятся на уровне с[...]тистических ошибок измерения. Казимировский скейлинг статического пот[...]циала, таким образом, является надежно установленным в пределах точнос[...] современного анализа фактом.

Вместе с тем, крайне важно подчеркнуть, что режим КС не может им[...] места во всем диапазоне расстояний. Во-первых, можно указать полевые стр[...]туры, ответственные за отклонения от КС [9], обсуждению этого вопроса [...]священа часть 4.3 настоящей работы. Помимо этого, на достаточно больш[...] расстояниях в теории должны проявлятся эффекты разрыва струны (даж[...] чистой глюодинамике, т.е. КХД без кварков). Вследствие этого эффекта ча[...] потенциала, отвечающие октетным компонентам экранируются динамическ[...] глюонами из вакуума, с образованием т.н. глюлампных состояний. В частнос[...] представления нулевой "триальности"экранируются полностью. Например, д[...] присоединенного представления имеем $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ с си[...]глетной компонентой. Экранирование для более высоких представлений т[...]бует большего числа динамических глюонов. В случае ненулевой "триальн[...]сти"присутствует нескомпенсированный триплет, (например, $\mathbf{6} \otimes \mathbf{8} = \overline{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \oplus$[...] что делает асимптотически струнное натяжение равным фундаментальному[...]

Вполне очевидно, что в случае, когда играют роль эффекты разрыва ст[...]ны выражения вида (55) не имеют смысла. Эти вопросы были рассмотрен[...] [47, 55] в рамках разложения сильной связи, соответствующий результат д[...] например, присоединенной петли имеет вид (в приближении больших N_c)

$$\langle W_{adj}(C)\rangle = \exp[-\tilde{\sigma}_{adj} \cdot \text{Площадь}(C)] + \frac{\eta}{N_c^2} \exp[-M_{gl} \cdot \text{Периметр}(C)] \quad (5$$

Аналогичный результат можно также получить в формализме так называем[...] бэкграундной теории возмущений, см., например, [8]. Потенциал, таким об[...]зом, имеет в этом случае два различных режима $R \le R_c$ и $R \ge R_c$ (где R_c ра[...] критическому расстоянию, где второй член в (56) начинает доминировать)[...] пределе $T \to \infty$ это соответствует:

$$V(R) = \sigma R\, \theta(R_c - R) + \sigma R_c\, \theta(R - R_c)$$

Потенциал выполаживается при $R > R_c$. Однако динамические оценки пока[...]вают [56], что величина R_c довольно велика в единицах струнного натяжен[...] порядка 1.5 Фм для присоединенного представления $SU(3)$. Другими слова[...] легчайший глюлампп сравнительно тяжелый, и чтобы родить его из ваку[...] нужно затратить большую энергию. На расстояниях, которые анализировал[...] в [42, 43, 44] аналог второго члена в (56) вносит вклад на уровне статистичес[...] ошибок. Это обстоятельство приводит к тому, что размер области КС являе[...] довольно большим, как минимум для не слишком высоких D - от самых мал[...] R, где работает теория возмущений, вплоть до критического расстояния R_c.

4.2 Феноменологические модели вакуума КХД и Казимировский скейлинг

Как было отмечено в [7, 8], подавляющее большинство имеющихся в литературе феноменологических моделей непертурбативного вакуума КХД не содержат КС в качестве своего естественного ингредиента, и, более того, встречают внутренние трудности при описании этого феномена. Это, разумеется, не означает, что все до сего момента рассматривавшиеся модели неправильны, - напротив, именно уточнение границ применимости той или иной модели позволяет сделать ее, в некотором смысле, более правильной. Показательно проиллюстрировать это утверждение на примере моделей инстантонного газа/жидкости [57], см. обзор [58]; сценариев конденсации абелевых монополей [30, 59], см. обзоры [60, 61]; а также сценариев конденсации вортексов [62, 63, 64], и некоторых других.

Начнем с модели разреженного инстантонного ансамбля. Строго говоря, поскольку в этой модели отсутствует конфайнмент, с самого начала нельзя рассчитывать на воспроизведение в ней КС. Соответствующий анализ, тем не менее, показателен, поскольку содержит общие черты для целого семейства моделей, основанных на представлении вакуума КХД в виде некоторой суперпозиции классических решений (инстантоны, дионы и т.п.).

Инстантонный ансамбль характеризуется средней плотностью $n = N/V$, где N - число инстантонов и антиинстантонов, а V - 4-объем. Распределение инстантонов по размерам задается функцией $D(\rho)$, а средний радиус дается соотношением $\bar\rho = \int_0^\infty d\rho\rho D(\rho)$. Феноменологически $n \approx 1$ Фм$^{-4}$ и $\bar\rho \approx 0.35$ Фм, в этом случае параметр разреженности $n\rho^4/N_c$ много меньше единицы, что *a posteriori* оправдывает разложение по малой плотности в этой модели.

Статический потенциал в такой модели был посчитан в [65], см. также [66].

$$V(R) = \frac{1}{N_c}\int\limits_0^\infty d\rho\,\frac{dn(\rho)}{d\rho}\int d^3z\,\mathrm{Tr}\left[1 - W(z,\rho,R)\right] \tag{57}$$

при этом $\int_0^\infty dn(\rho) = n$; $\int_0^\infty \rho dn(\rho) = \bar\rho\, n$ и полный топологический заряд вакуума предполагается равным нулю: $N_I = N_{\bar I} = N/2$. Потенциал нормирован условием $V(R=0)=0$. Для зарядов в высших представлениях обобщение (57) имеет вид:

$$V_D(R) = 4\pi\frac{N}{V}\int\limits_0^\infty d\rho\nu(\rho)\rho^3\frac{1}{d(D)}\sum_{J\in D}(2J+1)F_J(x)\ , \quad x = \frac{R}{2\rho} \tag{58}$$

где функция $F_J(x)$ может быть извлечена из [66]. Здесь $d(D)\equiv D$, и сумма идет по $SU(2)$ мультиплетам $J = 0, \frac{1}{2}, 1, ..$ для разложения соответствующего $SU(3)$ представления. Укажем на тождество $d(D)\cdot C_D = \frac{8}{3}\sum\limits_{J\in D} J(J+1)(2J+1)$ и также $\sum\limits_{J\in D}(2J+1) = d(D)$.

Численно, можно найти, что на малых расстояниях

$$V(R) = 1.79\cdot\gamma R^2\cdot\epsilon_D + \mathcal{O}(R^4) \tag{59}$$

где $\gamma = \pi \frac{N}{V} \int_0^\infty d\rho \nu(\rho)\rho$ и численные коэффициенты ϵ_D for $D = 3, 8, 10$ име вид

$$\epsilon_3 : \epsilon_8 : \epsilon_{10} = 1 : 1.87 : 3.11$$

вместо КС результата 1 : 2.25 : 4.5. Аналогичная ситуация имеет м и на больших расстояниях, где нарушение КС находится на уровне 20% (дополнительные подробности в [7])

Эти результаты показывают, что инстантонный ансамбль довольно си но нарушает КС. Было бы весьма интересно проверить, как происходит та нарушение в процессе процедуры "охлаждения"на решетке, когда в вакуум конце концов начинают доминировать классические конфигурации. В реаль же вакууме КХД можно предложить два возможных объяснения того, поч инстантоны не разрушают КС. Первое состоит в сценарии подавления инс тонов (см. в этой связи [68]), а второе апеллирует к неприменимости приб жения малой плотности [36]. Мы не обсуждаем эти сценарии здесь и отсыл заинтересованного читателя к цитированной литературе.

Аналогичным образом обстоит дело в модели доминантности центра гр пы. Отсылая за деталями к [7], укажем, что наложить следующие из КС точ ограничения на этот класс моделей довольно сложно, ввиду большой произв ности параметров моделей, однако общая картина иллюстрируется тем, ч например, отклонение $SU(2)$ потенциала, индуцированного вортексами от составляет величину порядка 30% для $j = 1$ и $\sim 80\%$ для $j = 3/2$ на боль расстояниях [64], хотя, вероятно, и может быть существенно уменьшено под кой параметров. Отметим также данные из [69], которые мы интерпретиру терминах отношения

$$\xi_D(R) = \frac{1}{d_D} \frac{V_D(R)}{V_f(R)}$$

таким образом, что в теории с точным КС $\xi(R) \equiv 1$. Выбирая R_0 из усло $R_0 V_f(R_0) = 2.5$ (отвечающему переходной области между пертурбативны непертурбативным режимами потенциала), будем иметь из [69]

$$\xi_8(R_0) = 0.98\,,\ \xi_{27}(R_0) = 0.83\,,\ \xi_8(2R_0) = 0.86\,,\ \xi_{15a}(2R_0) = 0.63\,,\ \xi_{10}(3R_0) =$$

Неприемлемо большой масштаб нарушения КС очевиден.

В работе [8] исследовался также важный вопрос о том, каким образом может быть совмещен с представлением о конфайнменте как о дуальном эфф те Мейсснера ([30, 59, 77], а также [78] и обзоры [60, 61]). Универсальный у состоит в том, что модели, не имеющие какого-либо встроенного механиз обеспечивающего явную калибровочную инвариантность, испытывают проб мы с воспроизведением КС. Однако самой по себе калибровочной инвариант сти недостаточно. В качестве примера можно упомянуть модель MIT-меш [70, 71], в которой $\sigma_D/\sigma_F = \sqrt{d_D}$ в явном противоречии с [43]. Качествен это происходит из-за того, что модель MIT не имеет аналога струны - к чевого элемента современной картины конфайнмента. Грубо говоря, два ко струны несут факторы gT_D^a каждый, что и обеспечивает КС, поскольку пол вклад в энергию пропорционален квадрату заряда, то есть C_D. В MIT модели, напротив, заряд входит линейным образом.

В то же время, КС доставляет хорошую возможность проверить представление о струне, обеспечивающей конфайнмент, как о простейшей струне Намбу-Гото [72]. Квантовая динамика такой струны приводит к дополнительным вкладам в потенциал на больших расстояниях вида [73]:

$$\sigma R \to \sigma R - \frac{\pi}{12}\frac{1}{R} + \ldots \tag{61}$$

которые нарушают КС, поскольку

$$\frac{V_D(R)}{V_F(R)} - d_D = \frac{d_D - 1}{V_F(R) R_0}\,\frac{\pi}{12}\,\frac{R_0}{R} + .. \tag{62}$$

где R_0 обозначает некоторый характерный масштаб, например, длину Зоммера. Как подробно обсуждается в [8], к сожалению, точность данных [43] недостаточна, чтобы выделить надежный сигнал (62) над фоном. Вместе с тем дальнейшие измерения в этом направлении должны всячески приветствоваться, поскольку в разности типа (62) не возникает стандартной проблемы идентификации "люшеровского"$1/R$ струнного члена на фоне кулоновского потенциала (ср. (61) и (53)), и, тем самым, реализуется замечательная возможность непосредственно детектировать квантовую динамику струны КХД.

Имеется также ряд интересных возможностей опосредованно использовать данные по КС - например, для потенциалов при ненулевой температуре, для предсказания поведения профиля струн в высших представлениях и т.д. Мы отсылаем заинтересованного читателя к оригинальным работам [7, 8] и ссылкам в них, а в оставшейся части этой главы приведем основные результаты, относящиеся к интерпретации КС на калибровочно-инвариантном языке, развитом в части 3.

4.3 Калибровочно-инвариантное описание КС

Вернемся к соотношению (13):

$$\langle W_D(C)\rangle = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} i^n\, \Delta_D^{(n)}(R,T)\right) \tag{63}$$

В фазе конфайнмента вакуум разупорядочен в том смысле, что средние в правой части (63) экспоненциально затухают с характерной корреляционной длиной λ. Для низшего гауссового коррелятора эта корреляционная длина была померяна в [34] и найдена достаточно маленькой: $\lambda \approx 0.2$ Фм в $SU(3)$ теории без динамических кварков (см. в этой связи также работы [76]). Принцип гауссовской доминантности означает, что на минимальной поверхности лидирующий вклад обеспечивается двухточечным коррелятором $\langle FF\rangle$. Легко видеть, что

$$\mathrm{Tr}_D\langle F(1)F(2)\rangle = \frac{C_D}{N_c^2-1}\,\langle F^a(1)F^a(2)\rangle = \frac{d_D}{2N_c}\,\langle F^a(1)F^a(2)\rangle, \tag{64}$$

то есть гауссовское приближение обеспечивает точный КС. Важно отмет
что факт пропорциональности выражения (64) оператору Казимира не зави
от того, по какой траектории соединены точки в корреляторе. Аналогичн
образом, свойство гауссового вакуума обеспечивать точный КС не зависит
координатного профиля потенциала, и, в частности, от численного значени
Оно выполняется, как уже отмечалось, вплоть до тех расстояний, где эффе
разрыва струны становятся значительными.

Среднее от петли Вильсона не зависит от выбранной поверхности интегр
вания. В этом смысле поверхность S в (13) не несет самостоятельной динами
Это верно, однако, только в том случае, когда кумулянты удовлетворяют о
ношениям, обсуждавшимся в части 3, и также суммируется весь ряд вели
$\Delta^{(n)}[S]$. С другой стороны, типичное выражение для действия удерживаю
струны имеет вид [72]

$$\langle W_D(C)\rangle = \sum_{S:\partial S=C} \exp(-A_{str}[S])$$

причем действие струны $A_{str}[S]$ явно зависит от S, а S-независимость пра
части достигается суммированием по S. Имеет место, таким образом, некот
дуальность между суммой по n в (63) и интегралом по S в (65). Эта анал
имеет интересные феноменологические следствия [35].

Приступим к изучению структуры кластерного разложения, базируяс
работе [9]. В теории возмущений каждый член $\Delta_D^{(m)}(R,T)$ пропорционален к
станте связи g в степени по крайней мере выше, чем m. В это смысле пер
бативный вакуум всегда приближенно гауссов. В то же время полный ряд,
известно, расходится ввиду факториального роста коэффициентов. С непер
бативной точки зрения нет общих оснований полагать, что между корреля
рами существует какая-бы то ни было иерархия. Мы рассмотрим структ
вкладов в КС-нарушающую часть потенциала. Будет показано, что подоб
вклады физически отвечают обменам бесцветными состояниями [9].

Удобно выбрать калибровку, задаваемую условиями [41]

$$\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \mathrm{P}\exp\left[i(\vec{y}-\vec{x})\int\limits_0^1 \vec{A}(\vec{x}(1-s)+\vec{y}s, z_4)ds\right] \equiv 1$$

где $z_4 = x_4 = y_4$, а также

$$\Phi(x_4,y_4) = \mathrm{P}\exp\left[i\int\limits_{x_4}^{y_4} A_4(\vec{0},z_4)dz_4\right] \equiv 1$$

Указанный выбор сделан нами исключительно из соображений компактно
записи, в действительности, как нетрудно убедиться, все формулы имеют я
калибровочно-инвариантный вид.

Петля Вильсона записывается как

$$\langle W_D(C)\rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_D\, \mathrm{P}\exp\left(i\int\limits_0^T A_4^a(\vec{z},t)T_D^a dt\right)\right\rangle$$

где $|\vec{z}| = R$ и вектор-потенциал выражается через напряженность

$$A_4^a(\vec{z},t) = \int_0^1 ds\, \vec{z}\vec{E}^a(s\vec{z};t) \quad ; \quad \vec{E}_i^a(x) = F_{i4}^a(x) \tag{69}$$

В матричной форме

$$\langle W_D(C)\rangle = \mathrm{Tr}_D \left(\hat{\mathbf{1}}_D + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_0^T dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \,\langle A_4(\vec{z},t_n)\ldots A_4(\vec{z},t_1)\rangle \right) \tag{70}$$

Средние в правой части (70) пропорциональны единичной матрице в цветовом пространстве, ввиду чего имеем

$$\int_0^T dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \,\langle A_4(\vec{z},t_n)\ldots A_4(\vec{z},t_1)\rangle = \hat{\mathbf{1}}_D \cdot \langle \mathrm{Tr}_D\, \mathcal{K}_D^{(n)}(R,T)\rangle \tag{71}$$

Мы будем опускать аргументы R и T в корреляторах $\langle \mathrm{Tr}_D\, \mathcal{K}_D^{(n)}(R,T)\rangle$ для простоты записи, актуальная зависимость корреляторов от своих аргументов также не будет интересовать нас здесь. Центральное значение имеет цветовая структура.

Установим соотношение между $\langle \mathrm{Tr}_D\, \mathcal{K}_D^{(n)}\rangle$ и $\Delta_D^{(m)}$. Очевидно, что по соображениям симметрии $\langle \mathrm{Tr}_D \mathcal{K}_D^{(1)}\rangle \equiv 0$, а для высших членов имеем

$$\Delta_D^{(2,3)} = \langle \mathrm{Tr}_D \mathcal{K}_D^{(2,3)}\rangle \;\; ; \;\; \Delta_D^{(4)} = \langle \mathrm{Tr}_D \mathcal{K}_D^{(4)}\rangle - \frac{1}{2}\left[\langle \mathrm{Tr}_D \mathcal{K}_D^{(2)}\rangle\right]^2 \tag{72}$$

и по аналогии с (72) $\Delta_D^{(m)} = \langle \mathrm{Tr}_D \mathcal{K}_D^{(m)}\rangle - (\ldots)$ где $(\ldots)$ обозначает сумму произведений корреляторов $\langle \mathrm{Tr}_D \mathcal{K}_D^{(p)}\rangle$ более низких порядков $p < m$. Выражения (72) не являются функциями Грина какого-либо физического состояния, а описывают глюламны (см. [9]). Также следует подчеркнуть, что вышенаписанные формулы должны рассматриваться как определения, в том числе, и вне рамок теории возмущений (в пертурбативном случае каждый коррелятор дается своим рядом по степеням константы g.)

Нас интересует специальная структура вида

$$\delta V_{D_2/D_1} = V_{D_2}(R) - d_{D_2/D_1} \cdot V_{D_1}(R) \tag{73}$$

вклад в которую, очевидно, дают только КС нарушающие члены.

Для конкретного примера мы ограничимся случаем фундаментального и присоединенного представлений, в общей ситуации рассмотрение проходит аналогично. Выражение (73) принимает вид

$$\delta V_{a/f} = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{m=2}^{\infty} i^m \left(\Delta_{adj}^{(m)} - \frac{2N^2}{N^2-1} \cdot \Delta_{fund}^{(m)} \right) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{m=2}^{\infty} i^m \delta\Delta_{a/f}^{(m)} \tag{74}$$

Как легко понять,

$$\delta\Delta^{(2)}_{a/f} = \delta\Delta^{(3)}_{a/f} \equiv 0$$

и сумма в (74) в действительности начинается с $m = 4$.

Следующим принципиальным шагом является использование тождеств

$$\left\langle |W_f(C)|^2 \right\rangle = \frac{1}{N^2} + \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) \langle W_a(C) \rangle$$

с величиной $\left\langle |W_f(C)|^2 \right\rangle$ вычисленной в терминах корреляторов (71). Все не ходимые технические детали этого вычисления могут быть найдены в ори нальной публикации [9]. Приведем окончательный результат. Он состоит в т что вклад в величины $\delta\Delta^{(m)}_{a/f}$ (а, следовательно, и в $\delta V_{a/f}$) вносят только кор ляторы вида $\langle \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(m-p)}_{f_1} \ \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(p)}_{f_2} \rangle$. Вклад же коррелятора $\langle \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(m)}_f \rangle$ в точно сокращается. Например, для низшего квартичного члена будем иметь

$$\delta\Delta^{(4)}_{a/f} = \left(\frac{N^2}{N^2-1}\right) \cdot \left(\langle \mathrm{Tr}_{f_1} \mathcal{K}^{(2)}_{f_1} \mathrm{Tr}_{f_2} \mathcal{K}^{(2)}_{f_2} \rangle - \left(1 + \frac{2}{N^2-1}\right) \left[\langle \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(2)}_f \rangle \right]^2 \right)$$

Это выражение калибровочно инвариантно, поскольку поля $A_4(x)$ в коррел рах $\langle \mathrm{Tr} \mathcal{K}^{(n)} \rangle$ являются функционалами $F_{i4}(x)$ согласно (69).

Результат (76) нетривиален. Левая часть (76) тождественно зануляется, е имеет место точный КС. Можно сказать иначе: отличие (76) от нуля явля ся мерой нарушения КС. Коэффициент перед вторым членом в правой ча (76) (равный 5/4 для $SU(3)$) обеспечивает точное сокращение приводимых стей из первого члена. В пределе больших N_c (76) обращается в нуль. Ана гично обстоит дело и в более высоких порядках кластерного разложения: нарушающие вклады пропорциональны корреляторам бесцветных операто $\langle \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(m-p)}_{f_1} \ \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(p)}_{f_2} \rangle$. Показательно сравнение с (53), где потенциал выра через корреляторы вида $\langle \mathrm{Tr}_f \mathcal{K}^{(m)}_f \rangle$.

5 Заключение

Кратко подытожим физическую интерпретацию явления КС, сформулированную в настоящей работе [6, 7, 8, 9]. Удерживающая струна, ограниченная контуром петли Вильсона населена в фазе конфайнмента квазилокальными объектами - глюолампами. Иначе говоря, различные участки струны взаимодействут друг с другом посредством обмена глюолампами.[6] Эффективная теория, описывающая этот "газ"глюоламнов является топологической в том смысле, что общий ответ для потенциала не зависит от профиля поверхности, на которой она определена. С другой стороны, при выборе минимальной поверхности газ становится приближенно идеальным - доминируют лишь обмены низшими, легчайшими глюолампы (иными словами, гауссовы корреляторы). Глюолампы взаимодействуют между собой посредством обменов бесцветными глюболами, как это показывается в формулах типа (76). Свойство КС следует из того, что взаимодействие глюоламнов друг с другом сравнительно мало. Эта малость обеспечивается, во-первых, $1/N_c^2$ подавлением, а, во-вторых, тем фактом, что высшие глюболы, насыщающие корреляционные функции, подобные (76) - компактные и массивные частицы (так, легчайший скалярный глюбол предположительно имеет массу порядка 1.5 ГэВ). Явление КС служит основным аргументом в пользу того, что вакуум КХД является стохастическим, а не когерентным, иными словами, подтверждает гипотезу гауссовой доминантности. Это, в свою очередь, позволяет использовать низший гауссовский коррелятор в многообразных феноменологических расчетах (см. обзор [15]). В то же время, качественная картина динамики глюоламнов на мировом листе является оригинальной и представляет большой самостоятельный интерес, выходящий за пределы задач, связанных с физикой статического потенциала.

Выражая содержание работы одной фразой, можно сказать, что свойство Казимировского скейлинга статического потенциала в квантовой хромодинамике является нетривиальным следствием специфической структуры массовой щели в этой теории.

[6] В теории струн это имеет прямую аналогию с т.н. полями Калба-Рамона. Подчеркнем, что глюолампы не являются реальными "физическими частицами", а представляют собой эффективные степени свободы на мировом листе струны.

Благодарности

Автор глубоко признателен своему учителю Юрию Антоновичу Симонову.

Автор благодарит Н.Агасяна, Д.Антонова, Э.Ахмедова, П.Волковицкого, Ф.Губар
А.Дубина, А.Кайдалова, Ю.Калашникову, Б.Кербикова, А.Нефедьева, Л.Окуня, М.Поликарпова, К.Тер-Мартиросяна, М.Чернодуба, а также И.Амбьорна (Копенгаген), Г.Бали (Глазго), Л.Дел Деббио (Пиза), А.Ди Джиакомо (Пиза), Х.Г.Доша
(Гейдельберг), Г.'т Хоофта (Утрехт), Б.Баккера (Амстердам), Д.Тжона (Утрехт), И.Хошека (Прага) за многочисленные полезные обсуждения и поддержку.

Публикации, входящие в данную работу, были частично поддержаны грантами РФФИ 00-02-17836, РФФИ 00-15-96786, РФФИ 01-02-06284, ИНТАС 01-110, а также фондом ФОМ Научного общества Нидерландов.

Список литературы

[1] *Review of Particle Physics*, Eur.Phys.J.**C3** (1998) 1-794.

[2] Itzykson C., Zuber J.-B., *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
S.Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge Univ.Press, Cambridge 1995.

[3] M. Creutz, *Quarks, Gluons, and Lattice* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983).
H.J. Rothe, *Lecture Notes in Physics* **43** (World Scientific, Singapore, 1992).
I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).

[4] J.F. Donoghue, E. Golowich, and B.R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).
QCD: 20 Years later, proceedings, Aachen, 1992, Eds. P.M. Zerwas and H.A. Kastrup (World Scientific, Singapore, 1993).

[5] А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, М.,Наука, 1978.
F.J. Yndurain, *Quantum Chromodynamics: an Introduction to the Theory of Quarks and Gluons* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983).

[6] Ю.А.Симонов, В.И.Шевченко, ЯФ, **60** (1997) 1328.

[7] V.I.Shevchenko, Yu.A.Simonov, Phys.Rev.Lett. **85** (2000) 1811

[8] V.Shevchenko, Yu.Simonov, hep-ph/0104135; Int.Journ.Mod.Phys. **A18** (2003) 127

[9] V.Shevchenko, Phys.Lett. **B550** (2002) 85

[10] V.Shevchenko, hep-th/9810222.

[11] G. 't Hooft, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **74** (1999) 413

[12] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.

[13] P.van Baal, hep-th/9711070.

[14] J.M.Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys. **2** (1998) 231

[15] A.Di Giacomo, H.G.Dosch, V.I.Shevchenko, Yu.A.Simonov, Phys.Rept. **372** (2002) 319

[16] M Foster, C Michael, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **63** (1998) 724

[17] V.Shevchenko, Yu.Simonov, Phys.Rev. **D66** (2002) 056012

[18] Yu.A. Simonov, Phys. Usp. **39** (1996) 313.

[19] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 190** (1981) 455.

[20] Y. Matsubara, S. Ejiri, T. Suzuki, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **34** (1994) 176-178.

[21] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rep. **C 87** (1982) 79.

[22] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B 147** (1979) 385, 448.
V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Fortschr. Phys. **8** (1984) 585.

[23] H.G. Dosch, Phys. Lett. **B 190** (1987) 177.
H.G. Dosch, Yu.A. Simonov, Phys. Lett. **B 205** (1988) 339.

[24] D.I. Diakonov, Prog. Part. Nucl. Phys. **36** (1996) 1 .
T. Schäfer and E.V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323.

[25] P. Haagensen, Phys.Lett., **B382** (1996) 356;
V.Gribov, Eur.Phys.J. **C10** (1999) 91;
K-I. Kondo, Phys. Rev. **D 57** (1998) 7467; ibid. **D 58** (1998) 085013, 105016, 105019.

[26] G.'t Hooft, hep-th/9903189.

[27] D.Antonov, Surveys High Energ.Phys. **14** (2000) 265

[28] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F. Weisskopf, Phys. Rev. **D 9** (1974) 3471.

[29] R. Akhoury, V. I. Zakharov, Phys.Lett. **B438** (1998) 165-172.

[30] S. Mandelstam, Phys. Lett. **B 53** (1975) 476.
G.'t Hooft, in: *High Energy Physics*, Ed. A. Zichichi (Editrice Compositori, Bologna, 1976).

[31] A.A. Abrikosov, Sov. Phys.- JETP **5** (1957) 1174

[32] Yu.M. Makeenko and A.A. Migdal, Nucl. Phys. **B 188** (1981) 269.

[33] S.Mandelstam, Phys.Rev. **175** (1968) 1580;
Ann.Phys. **19**, 1 (1962) 25.

[34] A. Di Giacomo and H. Panagopoulos, Phys. Lett. **B 285** (1992) 133.
L. Del Debbio, A. Di Giacomo, and Yu.A. Simonov, Phys. Lett. **B 332** (1994) 111.
M. D'Elia, A. Di Giacomo, and E. Meggiolaro, Phys. Lett. **B 408** (1997) 315.
A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, and H. Panagopoulos, Nucl. Phys. **B 483**

(1997) 371.
A. Di Giacomo, M. D'Elia, H. Panagopoulos, and E. Meggiolaro, hep-lat/9808056.

[35] V.Shevchenko, in preparation

[36] Y. Koma, E. -M. Ilgenfritz, H. Toki, T. Suzuki, Phys.Rev. **D64** (2001) 011501

[37] Yu.A. Simonov, Yad. Fiz., **58**, 113 (1995);
Yu.A. Simonov, in *Lecture Note in Physics*, vol 479, (Springer, 1997);
Симонов Ю.А. **ЯФ**, 50 (1989) 213.

[38] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, Phys.Rev. **D53** (1996) 5891

[39] M. Eidemüller, M. Jamin, Phys.Lett.**B 416** (1998) 415.

[40] S.V.Ivanov, G.P.Korchemsky, Phys.Lett. **B154** (1985) 197.

[41] I.Balitskii, Nucl.Phys.**B 254** (1985) 166.

[42] G. S. Bali, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **83** (2000) 422

[43] G.S. Bali, Phys.Rev. **D62** (2000) 114503

[44] S.Deldar, Phys.Rev. **D62** (2000) 034509; S.Deldar, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **73** (1999) 587

[45] J.Ambjørn, P.Olesen, C.Peterson, Nucl. Phys. **B240** 189, 533 (1984).

[46] Yu.A.Simonov, JETP Lett., **71** (2000) 187.

[47] C.Bernard, Phys.Lett. **B108** (1982) 431

[48] J.A. de Azcárraga, et al, Nucl.Phys.**B510** (1998) 657; J.A. de Azcárraga, A.J.Macfarlane, math-ph/0006013.

[49] H.B.G.Casimir, Proc.Roy.Acad. Amsterdam **34** (1931) 844;

[50] I.M.Gelfand, Math. Sbornik **26** (1950) 103; (English transl.: Los Alamos Sci.Lab. AEC-TR-6133, 1963)

[51] M.Peter, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 602, Nucl. Phys. **B501** 471 (1997); Y.Schröder, Phys. Lett. **B447** 321 (1999)

[52] P.Weisz, R.Wohlert, Nucl.Phys. **B236** (1984) 397

[53] N.A.Campbell, I.H.Jorysz, C.Michael, Phys. Lett. **B167** (1986) 91

[54] C.Michael, Nucl. Phys.Proc. Suppl.) **26** (1992) 417; C.Michael, hep-ph/9809211.

[55] J.Greensite, M.B.Halpern, Phys.Rev.**D27** (1983) 2545

[56] Yu.A.Simonov, Nucl.Phys. **B592** (2001) 350.

[57] C.G.Callan, R.Dashen, D.J.Gross, Phys.Rev.**D17** (1978) 2717, **D19** (1979) 1826; E.V.Shuryak, Nucl.Phys.**B203** (1982) 93,116,140; D.I.Diakonov, V.Yu.Petrov, Nucl.Phys.**B245** (1984) 259, Nucl.Phys.**B272** (1986) 457.

[58] T. Schaefer, E. Shuryak, Rev.Mod.Phys. **70** (1998) 323

[59] G.'t Hooft, Nucl.Phys. **B190** (1981) 455

[60] M.N.Chernodub, F.V.Gubarev, M.I.Polikarpov, V.I.Zakharov, hep-lat/0103033

[61] J.M. Carmona, M. D'Elia, A. Di Giacomo, B. Lucini, G. Paffuti hep-lat/0103005

[62] G.'t Hooft, Nucl.Phys.**B138** (1978) 1.

[63] M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, Phys.Lett. **B474** (2000) 177;

[64] M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **73** (1999) 572; L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, hep-lat/9802003; M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, Phys.Rev. **D57** (1998) 2603

[65] C.G. Callan, Jr., R. Dashen, D. J. Gross, F.Wilczek, A. Zee, Phys.Rev.**D18** (1978) 4684

[66] D.Diakonov, Yu.Petrov, M.Pobylitsa, Phys.Lett. **B226** (1989) 372; D.Diakonov, V.Petrov, Proc. of the Int. workshop - Nonperturbative approaches to quantum chromodynamics, Trento, 1995, ed. by D.Diakonov

[67] M. Fukushima, E.-M. Ilgenfritz, H. Toki, hep-ph/0012358

[68] M.Polikarpov, A.Veselov, Nucl.Phys. **B297** (1988) 34

[69] S.Deldar, JHEP **0101** (2001) 013

[70] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F. Weisskopf, Phys. Rev. **D 9** (1974) 3471.

[71] K.Johnson and C.B.Thorn, Phys. Rev. **D13**, 1934 (1976); T.H.Hansson, Phys.Lett. **B166** (1986) 343

[72] A.M.Polyakov, *Gauge fields and strings*, Harwood Academic Publishers, Chur, 1987.

[73] M.Lüscher, K.Symanzik, P.Weisz, Nucl.Phys.**B173** (1980) 365.

[74] V.Volterra, B.Hostinsky, "Opèrations infinitèsimale linèaires", Gauthiers Villars, Paris, 1939; M.B. Halpern, Phys.Rev. **D19** (1979) 517; N.Bralic, Phys.Rev. **D22** (1980) 3090; Y. Aref'eva, Theor.Math.Phys. **43** (1980) 353; Yu.A.Simonov, Phys.Atom.Nucl. **50** (1989) 213; M. Hirayama, M. Ueno, Prog.Theor.Phys. **103** (2000) 151

[75] S.V.Ivanov, G.P.Korchemsky, Phys.Lett. **B154** (1985) 197; L.Lukaszuk, E.Leader, A.Johansen, Nucl.Phys. **B562** (1999) 291 V.Shevchenko, Yu.Simonov, Phys.Lett. **B347** (1998) 146 (1986) 91;

[76] J.Ambjørn, P.Olesen, Nucl.Phys. **B170** (1980) 60; P.Olesen, Nucl.Phys. **B200** (1982) 381

[77] S.Mandelstam, Phys.Lett.**B53** (1975) 476, Phys.Rep.**C23** (1976) 245

[78] Z.F. Ezawa, A.Iwazaki, Phys.Rev. **D25** (1982) 2681; ibid **D26** (1982) 631; S.Maedan, T.Suzuki, Prog. Theor. Phys.**81** (1989) 229

[79] Yu.A.Simonov, Phys.Atom.Nucl. **60** (1997) 2069; Yu.A. Simonov, J.A. Tjon, Phys.Rev. **D62** (2000) 014501